Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко, А. А. Бабайцев, Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 173, 116–125

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-116-125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:36:13

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 116–125
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-116-125

УДК 517.956

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. В. В. ПАНКОВ, А. Д. БАЕВ, В. Д. ХАРЧЕНКО, А. А. БАБАЙЦЕВ

Аннотация. Доказаны коэрцитивные априорные оценки решений краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, содержащего весовые производные специального вида до порядка $2m$ и обычные частные производные до порядка $2k - 1$ при условии $2m > 2k - 1$. На границе полосы наложены условия типа Дирихле. Получена коэрцитивная априорная оценка решения рассматриваемой задачи. Оценка получена в специальных весовых пространствах типа пространств Соболева.

Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовое пространство Соболева.

A PRIORI ESTIMATE OF SOLUTIONS OF ONE BOUNDARY-VALUE PROBLEM IN A STRIP FOR A HIGHER-ORDER DEGENERATE ELLIPTIC EQUATION

© 2019 V. V. PANKOV, A. D. BAEV, V. D. KHARCHENKO, A. A. BABAITSEV

ABSTRACT. Coercive a priori estimates of solutions of a Dirichlet-type boundary-value problem in a strip for a certain higher-order degenerate elliptic equation containing weighted derivatives of a special form up to the order $2m$ and ordinary partial derivatives up to the order $2k - 1$ under the condition $2m > 2k - 1$ are proved. At the boundary of the strip, Dirichlet-type conditions are imposed. A coercive a priori estimate for solutions of the problem considered in special weighted Sobolev-type spaces is obtained.

Keywords and phrases: a priori estimate, degenerate elliptic equation, Sobolev weight space.

AMS Subject Classification: 35S05, 35S11

Введение. Теория краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в настоящее время интенсивно развивается. Краевые задачи для таких уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 14.Z50.31.0037).

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина (см. [7, 8]). В работе В. П. Глушко [9] были доказаны априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [1–3] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка. В работах А. Д. Баева и С. С. Бунеева [4, 5] были исследованы краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка. В [10] были получены коэрцитивные априорные оценки для одного эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе $t = 0$ в уравнение нечетного порядка.

В настоящей работе получены априорные оценки решений краевых задач в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение нечетного порядка по одной из переменных. Таким образом, работа является естественным продолжением исследований, начатых в [4, 5, 10]. Формулировка полученных результатов содержится в [6].

1. Основные определения и результаты. В полосе $\mathbb{R}_d^n = \{x \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассмотрим уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x, t) = F(x, t), \quad (1)$$

где

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v - b(-1)^k \partial_t^{2k-1}v, \quad L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ — комплексные числа, $\operatorname{Im} \bar{b}a_{0,2m} = 0$. Здесь

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x^\tau = i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} \dots \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t = 0$ полосы $\mathbb{R}_d^n$ задаются условия

$$B_j(D_x)v|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1}v|_{t=0} = G_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2)$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$. На границе $t = d$ полосы $\mathbb{R}_d^n$ заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1}v|_{t=d} = 0. \quad (3)$$

Уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x, t) = F(x, t),$$

где

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b(-1)^k \partial_t^{2k-1}v,$$

было исследовано в [10]; при этом на границе $t = 0$ надо было ставить на одно условие меньше.

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \bar{b}L_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η) .

Условие 2. Для некоторого $s \geq 2m + \max_{1 \leq j \leq k-1} (m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. При всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ выполняется неравенство

$$\sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Определим пространства, в которых будет исследоваться задача (1)–(3). Введем в рассмотрение интегральное преобразование, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$ записывается в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [1]. Там же было отмечено, что для преобразования F_α можно построить обратное преобразование:

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)] \Big|_{\tau=\phi(t)},$$

где $F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. В [1] было доказано, что для преобразования F_α справедливо равенство, являющееся аналогом равенства Парсеваля. Это дает возможность рассмотреть его не только на функциях из $L_2(\mathbb{R}_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}_d^n)$ ($s \geq 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x, t) \in L_2(\mathbb{R}_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} = \left\{ \sum_{l=0}^{\left[\frac{(2k-1)s}{2m}\right]} \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} \left[\left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s - \frac{2m}{2k-1}l\right)} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [\partial_t^l v(x, t)] \right] \right\|_{L_2(\mathbb{R}_d^n)}^2 \right\}^{1/2},$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа.

Если s — такое натуральное число, что $(2k-1)s/(2m)$ — целое число, то эта норма эквивалентна следующей норме:

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l \leq s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(\mathbb{R}_d^n)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$s \geq \max \left\{ 2m, \max_{1 \leq j \leq k} \left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\}$$

— целое число, $m \geq 2k-1$ — целое число, и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $v(x, t)$ задачи (1)–(3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,2m/3}(\mathbb{R}_d^n)$, справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leq c \left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^k \|B_j v|_{t=0}\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}} \right),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v .

Здесь $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве Соболева–Слободецкого $H_s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Формулировка теоремы 1 содержится в [6].

2. Схема доказательства теоремы 1. Если применить к обеим частям уравнения (1) и условий (2)–(3) преобразование Фурье $F_{x \rightarrow \xi}$, то получим следующую задачу, зависящую от параметра $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u(\xi, t) = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t})u(\xi, t) - b(-1)^k \partial_t^{2k-1} u(\xi, t) = f(\xi, t), \quad (4)$$

$$B_j(\xi)u|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \partial_t^{j-1} u|_{t=0} = g_j(\xi), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (5)$$

$$u(\xi, t)|_{t=d} = \partial_t u(\xi, t)|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} u(\xi, t)|_{t=d} = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$u(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi}[\nu(x, t)], \quad f(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi}[F(x, t)], \quad g(\xi) = F_{x \rightarrow \xi}[G(x)].$$

Аналогично определенным выше пространствам введем пространства $\tilde{H}_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит пространству $\tilde{H}_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$ ($s \geq 0$ — целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\|u\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|} = \left\{ \sum_{k + \frac{2m}{2k-1} \leq j \leq s} \left\| F_{\alpha}^{-1} \left[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{k/2} F_{\alpha} [\partial_t^j u] \right] \right\|_{L_2(0; d)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Теорема 1 выводится из следующего утверждения.

Теорема 2. Предположим, что

$$s \geq \max \left\{ 2m, \max_{1 \leq j \leq k} \left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\},$$

$m \geq 2k-1$, причем s, m — целые числа. Пусть $f(\xi, t) \in \tilde{H}_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $u(\xi, t)$ задачи (4)–(6), принадлежащего при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ пространству $\tilde{H}_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$, справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 \leq c \left(\|f\|_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 + \sum_{j=1}^k \left(1 + |\xi|^2 \right)^{s-m_j - \frac{2m(j-1)}{2k-1} - \frac{m}{2k-1}} |g_j(\xi)|^2 \right) \quad (7)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, u, f, g .

Из определения преобразования F_{α} получим, что для любых $u(t) \in L_2(0; d)$, $w(t) \in L_2(0; d)$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\alpha}[u](\eta) \cdot \overline{F_{\alpha}[w](\eta)} d\eta = 2\pi(u, w); \quad (8)$$

здесь и в дальнейшем через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение в $L_2(0; d)$.

Кроме того, из определения преобразования F_{α} следует, что если $u(t) \in C^s[0; d]$ удовлетворяет условиям

$$u(d) = \partial_t u(d) = \dots = \partial_t^{s-1} u(d) = 0, \quad (9)$$

то справедливо равенство

$$F_{\alpha}[D_{\alpha, t}^j u](\eta) = \eta^j F_{\alpha}[u](\eta) \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, s. \quad (10)$$

Из (10) следует, что если $u(t) \in C^s[0; d]$, $w(t) \in C^s[0; d]$ и эти функции удовлетворяют условиям (9), то справедливо равенство

$$\left(D_{\alpha, t}^j u(t), w(t) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^j F_{\alpha}[u](\eta) \overline{F_{\alpha}[w](\eta)} d\eta. \quad (11)$$

В дальнейшем нам понадобятся аналоги неравенства Эрлинга—Ниренберга для весовых производных, которые в нашем случае можно сформулировать следующим образом.

Лемма 1. Если $u(t) \in \tilde{H}_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$ (s — натуральное число), то при любых $\varepsilon > 0$ и $j = 0, 1, 2, \dots, s-1$ справедливо неравенство

$$\left\| D_{\alpha, t}^j u \right\|^2 \leq \varepsilon^{2(s-j)} \left\| D_{\alpha, t}^s u \right\|^2 + \left(c\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)} \right) \|u\|^2 \quad (12)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u .

Здесь и в дальнейшем через $\|\cdot\|$ обозначается норма в пространстве $L_2(0; d)$.

Следствие 1. Если $u(t) \in \tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, то для любых $\varepsilon > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, 2m-1$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ справедливо неравенство

$$(1 + |\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 \leq \varepsilon^{2(2m-j)} \|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 + c(\varepsilon) (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \quad (13)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u , ξ .

Теорема 2 получается из доказанных ниже лемм, где константы $c > 0$, $\varepsilon > 0$ во всех оценках не зависят от u , ξ .

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1 и 2, а также $m \geq 2k-1$. Тогда для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (1 + |\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 &\leq c \left(\|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u(t)\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j-1} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)} + |\partial_t^{k-1} u(0)|^2 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от ξ , u .

Доказательство. Так как пространство $C^{2m}[0;d]$ плотно в пространстве $\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, то неравенство (14) достаточно доказать для функций из пространства $C^{2m}[0;d]$. Умножив скалярно в $L_2(0,d)$ обе части уравнения (4) на функцию $bu(t)$, получим

$$\operatorname{Re} \left(L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u, bu \right) - |b|^2 (-1)^k \operatorname{Re} \left(\partial_t^{2k-1} u, u \right) = \operatorname{Re} \left(A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u, bu \right). \quad (15)$$

Используя равенство (10) и условие 1, получим оценку

$$\operatorname{Re} \left(L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u, bu \right) \geq c_1 \sum_{j=0}^m (1 + |\xi|^2)^{m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2, \quad (16)$$

где $c_1 > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, u .

С использованием условия (3) получим равенство

$$(-1)^k \int_0^d \partial_t^{2k-1} u \cdot \bar{u} dt = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j-1} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)} + \frac{1}{2} \left| \partial_t^{k-1} u(0) \right|^2. \quad (17)$$

Применяя (16), (17) в (15) и используя неравенство Коши—Буняковского, получим для любого $\varepsilon > 0$ оценку

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{j=0}^m (1 + |\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 - \frac{1}{2} |b|^2 \left| \partial_t^{k-1} u(0) \right|^2 (1 + |\xi|^2)^m &\leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u(t)\|^2 + \varepsilon (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 + (1 + |\xi|^2)^m |b|^2 \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j-2} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)}. \end{aligned}$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (14). $\square$

Лемма 3. При выполнении условий леммы 2 для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 \leq \varepsilon \left(\|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 + \|\partial_t^{2k-1} u\|^2 \right) + c(\varepsilon) \left(\|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right) \quad (18)$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Умножив скалярно обе части равенства (4) на $a_{0,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u$, получим оценку

$$\begin{aligned} |a_{0,2m}|^{2m} \|D_{\alpha,t}^{2m}u\|^2 - \operatorname{Re} \left(b(-1)^k \partial_t^{2k-1}u, a_{0,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u \right) &\leq \\ &\leq \left| \sum_{\substack{|\tau|+j \leq 2m \\ |\tau| \geq 1}} a_{\tau j} \xi^\tau \left(D_{\alpha,t}^j u, a_{0,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u \right) \right| + \left| \left(A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u(t), a_{0,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u \right) \right|. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что

$$\left| \left(A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u(t), a_{0,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u \right) \right| \leq \varepsilon \|D_{\alpha,t}^{2m}u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u(t)\|^2. \quad (20)$$

С помощью (13) и неравенства Коши–Буняковского получим для любого $\varepsilon > 0$ оценку

$$\left| \sum_{\substack{|\tau|+j \leq 2m \\ |\tau| \geq 1}} a_{\tau j} \xi^\tau a_{0,2m} \left(D_{\alpha,t}^j u, D_{\alpha,t}^{2m}u \right) \right| \leq \varepsilon \|D_{\alpha,t}^{2m}u\|^2 + c_1(\varepsilon)(1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2. \quad (21)$$

Используя (20) и (21) в правой части (19), получим оценку

$$\begin{aligned} |a_{0,2m}|^{2m} \|D_{\alpha,t}^{2m}u\|^2 - \operatorname{Re} \left(b(-1)^k \partial_t^{2k-1}u, a_{0,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u \right) &\leq \\ &\leq \varepsilon \|D_{\alpha,t}^{2m}u\|^2 + c_2(\varepsilon) \left(\|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re} \left(\partial_t^{2k-1}u, D_{\alpha,t}^{2m}u \right) = (-1)^{k-1} \operatorname{Re} \left(\partial_t^k u, \partial_t D_{\alpha,t}^{2m} \partial_t^{k-2}u \right) + \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^j \operatorname{Re} K_j,$$

где операторы K_j определены формулой

$$K_j = I_{2m,1}(D_{\alpha,t}, \partial_t) \partial_t^{j-1}u.$$

Здесь $I_{2m,1}(D_{\alpha,t}, \partial_t)$ — коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{2m}$ и ∂_t . Интегрируя по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\partial_t^{2k-1}u, D_{\alpha,t}^{2m}u \right) &= (-1)^k \left(D_{\alpha,t}^m \partial_t^k u, D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1}u \right) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j K_j + \\ &+ (-1)^k \sum_{j=0}^{m-1} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^j \partial_t^k u \cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t^{k-1} \bar{u} \Big|_{t=d}. \end{aligned}$$

Так как при $j \leq m-1-k$ выполняется неравенство $j+k \leq m-1$, то, учитывая граничные условия (6), имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^j \partial_t^k u \cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t^{k-1} \bar{u} \Big|_{t=d} = \sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^j \partial_t^k u \cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t^{k-1} \bar{u} \Big|_{t=d}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left(\partial_t^{2k-1} u, D_{\alpha,t}^{2m} u \right) &= (-1)^k \operatorname{Re} \left(D_{\alpha,t}^m \partial_t^k u, D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u \right) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \operatorname{Re} K_j + \\
&+ (-1)^k \operatorname{Re} \sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^j \partial_t^k u \cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t^{k-1} \bar{u} \Big|_{t=d} = (-1)^k \operatorname{Re} \left(\partial_t D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u, D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \operatorname{Re} K_j + (-1)^k \operatorname{Re} \sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^j \partial_t^k u \cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t^{k-1} \bar{u} \Big|_{t=d} + \\
&+ (-1)^k \operatorname{Re} \left(I_{m,1} (D_{\alpha,t}^m, \partial_t) \partial_t^{k-1} u, D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u \right). \quad (23)
\end{aligned}$$

Здесь $I_{m,1}(D_{\alpha,t}^m, \partial_t)$ — коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^m$ и ∂_t . Так как

$$\operatorname{Re} \left(\partial_t D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u, D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u \right) = 0,$$

то справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left(\partial_t^{2k-1} u, D_{\alpha,t}^{2m} u \right) &= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \operatorname{Re} K_j + (-1)^k \operatorname{Re} \sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^j \partial_t^k u \cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t^{k-1} \bar{u} \Big|_{t=d} + \\
&+ (-1)^k \operatorname{Re} \left(I_{m,1} (D_{\alpha,t}^m, \partial_t) \partial_t^{k-1} u, D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u \right).
\end{aligned}$$

Используя это равенство в (22), получим оценку

$$\begin{aligned}
|a_{0,2m}|^{2m} \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 &\leq \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + c_2(\varepsilon) \left(\left\| A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u \right\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right) + \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{k-1} |\operatorname{Re} K_j| + \left| \operatorname{Re} \sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^j \partial_t^k u \cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t^{k-1} \bar{u} \Big|_{t=d} \right| + \\
&+ \left| \operatorname{Re} \left(I_{m,1} (D_{\alpha,t}^m, \partial_t) \partial_t^{k-1} u, D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u \right) \right| \right). \quad (24)
\end{aligned}$$

С помощью неравенства Коши—Буняковского и (13) получим

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1} |\operatorname{Re} K_j| + \left| \operatorname{Re} \left(I_{m,1} (D_{\alpha,t}^m, \partial_t) \partial_t^{k-1} u, D_{\alpha,t}^m \partial_t^{k-1} u \right) \right| &\leq \\
&\leq \varepsilon \left(\left\| \partial_t^{2k-1} u \right\|^2 + \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 \right) + c_3(\varepsilon) (1 + |\varepsilon|^2)^{2m} \|u\|^2. \quad (25)
\end{aligned}$$

Учитывая известную теорему «о следах», имеем

$$\begin{aligned}
\left| \operatorname{Re} \sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t) D_{\alpha,t}^j \partial_t^k u \cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1} \partial_t^{k-1} \bar{u} \Big|_{t=d} \right| &\leq c \sum_{j=1}^{2m-1} |\partial_t^j u(d)|^2 \leq \\
&\leq \varepsilon_1 \int_{d/2}^d |\partial_t^{2m} u|^2 dt + c_4(\varepsilon_1) \int_{d/2}^d |u(t)|^2 dt \leq \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + c_5(\varepsilon) \cdot (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2. \quad (26)
\end{aligned}$$

Используя (25), (26) в правой части неравенства (23), получим, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, оценку (18). $\square$

Лемма 4. При выполнении условий леммы 2 для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left\| \partial_t^{2k-1} u \right\|^2 \leq c \left(\left\| A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u \right\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right). \quad (27)$$

Доказательство. Из уравнения (4) получим с помощью неравенства (13):

$$\left\| \partial_t^{2k-1} u \right\|^2 \leq \left\| A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u \right\|^2 + \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 + c(\varepsilon) (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2$$

при любом $\varepsilon > 0$. Применяя (18) и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (27). $\square$

Доказательство теоремы 2. Используя леммы 2–4, получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}^2 &\leq c \left(\|f\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)} + (1 + |\xi|^2)^m |\partial_t^{k-1} u(0)|^2 \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Используя неравенство Коши, получим оценку

$$\begin{aligned} \left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)} \right| &\leq \\ &\leq (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} \left(\varepsilon \left| \partial_t^{2k-2-j} u(\xi, 0) \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon = \varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{-m+qj+q/2}$, где $q = 2m/(2k-1)$, имеем

$$\begin{aligned} \left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)} \right| &\leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left(\varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{qj+q/2} \left| \partial_t^{2k-2-j} u(\xi, 0) \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m-qj-q/2} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right), \end{aligned}$$

где ε_1 — любое число. Заметим, что

$$\left| \partial_t^{2k-2-j} u(\xi, 0) \right|^2 = -2 \operatorname{Re} \left(\partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)} \right| &\leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left(2\varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{qj+q/2} \left| \operatorname{Re} \left(\partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u \right) \right| + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m-qj-q/2} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Применив для оценки первого слагаемого в правой части этого неравенства неравенство Коши, получим оценку

$$\begin{aligned} \left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)} \right| &\leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left(2\varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{qj+q/2} \left(\varepsilon_2 \left\| \partial_t^{2k-1-j} u \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \left\| \partial_t^{2k-2-j} u \right\|^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m-qj-q/2} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Выберем здесь $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{-q/2}$; тогда

$$\begin{aligned} \left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^j u(0)} \right| &\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left(2\varepsilon_1^{3/2} (1 + |\xi|^2)^{qj} \left\| \partial_t^{2k-1-j} u \right\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{qj+q} \left\| \partial_t^{2k-2-j} u \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m-qj-q/2} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Применив это неравенство и неравенство Эрлинга—Ниренберга в правой части (28), получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 &\leq c \left(\|Au\|^2 + \varepsilon_2 \left(\left\| \partial_t^{2k-1} u \right\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + c(\varepsilon_2) \sum_{j=0}^{k-2} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{2m - \frac{2m}{2k-1}j - \frac{m}{2k-1}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 + (1 + |\xi|^2)^m \left| \partial_t^{k-1} u(\xi, 0) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon_2 > 0$ достаточно малым, имеем

$$\|u\|_{2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 \leq c_1 \left(\|Au\|^2 + \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{2m - \frac{2m}{2k-1}j - \frac{m}{2k-1}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \quad (29)$$

Заметим теперь, что в силу условия 3

$$\left| \partial_t^{j-1} u(\xi, 0) \right| = \left| \frac{\sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \partial_t^{j-1} u|_{t=0}}{\sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau} \right| \leq c (1 + |\xi|)^{-m_j} |B_j(\xi) u|_{t=0} \leq c |g_j(\xi)|.$$

Применяя это неравенство в (29), получим оценку

$$\|u\|_{2m, \alpha, \frac{2m}{3}, |\xi|}^2 \leq c \left(\|f\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{2m - m_j - \frac{2m}{2k-1}j - \frac{m}{2k-1}} |g_j(\xi)|^2 \right).$$

Таким образом, доказана оценка (7) при $s = 2m$. Справедливость оценки (7) при $s > 2m$ доказывается методами, аналогичными методам работы [1]. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баяев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы // Докл. АН СССР. — 1982. — 265, № 5. — С. 1044–1046.
2. Баяев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2008.
3. Баяев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Докл. РАН. — 2008. — 422, № 6. — С. 727–728.

4. *Баев А. Д., Бунеев С. С.* Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Докл. РАН. — 2013. — 448, № 1. — С. 7–8.
5. *Баев А. Д., Бунеев С. С.* Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2012. — № 1. — С. 81–92.
6. *Баев А. Д., Панков В. В.* О существовании решений одного класса краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 1–3.
7. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. сб. — 1969. — 80 (112), № 4. — С. 455–491.
8. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы // Усп. мат. наук. — 1970. — 25, № 4. — С. 29–56.
9. *Глушко В. П.* Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / Деп. в ВИНТИ 27.03.1979, № 1048. — Воронеж: ВГУ, 1979.
10. *Панков В. В., Баев А. Д., Харченко В. Д.* Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 162–173.

Панков Владимир Владимирович
Воронежский государственный университет
E-mail: pankovfam@mail.ru

Баев Александр Дмитриевич
Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Харченко Виктория Дмитриевна
Воронежский государственный университет
E-mail: dmitrieva9696@gmail.com

Бабайцев Андрей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: 259608@mail.ru