Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Половинкина, Формула среднего значения для гиперболического уравнения с факторизуемым оператором, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 173, 126–131

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-126-131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:24:37

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 126–131
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-126-131

УДК 517.956.226

ФОРМУЛА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ФАКТОРИЗУЕМЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2019 г. М. В. ПОЛОВИНКИНА

Аннотация. Получена формула среднего значения для линейного гиперболического уравнения в частных производных с оператором, распадающимся на множители первого порядка. Эта формула может быть интерпретирована как распространение на рассматриваемый случай принципа Асгейрссона.

Ключевые слова: сопровождающее распределение, формула среднего значения, факторизация дифференциального оператора, формула включений-исключений.

MEAN-VALUE FORMULA FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH A FACTORIZABLE OPERATOR

© 2019 M. V. POLOVINKINA

ABSTRACT. A mean-value formula for a linear partial differential hyperbolic equation with an operator splitting into first-order factors is obtained. This formula can be interpreted as an extension of the Asgeirsson principle to the case considered.

Keywords and phrases: accompanying distribution, mean-value formula, factorization of a differential operator, inclusion-exception formula.

AMS Subject Classification: 35J15

1. Введение. В настоящей статье получена разностная формула среднего значения для линейного однородного гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами с символом, факторизуемым на множители первого порядка.

В литературе термины «формула среднего», «теорема о среднем» для того или иного дифференциального уравнения встречаются весьма часто. Иногда под этим понимают несколько различных факты. Каждый из этих фактов, тем не менее, можно охарактеризовать как соотношение, связывающее значения решения рассматриваемого уравнения на специально подобранном множестве. Большинство работ в этом направлении в том или ином варианте обращается к среднему значению в смысле А. Н. Колмогорова (см. [7]): под средним значением функции $f(x)$ по множеству Ω по мере $d\mu$ понимают число

$$M_{\Omega, \mu, \varphi}[f] = \varphi^{-1} \left(\int_{\Omega} \varphi(f(x)) d\mu / \int_{\Omega} d\mu \right), \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная строго монотонная функция одной вещественной переменной. Некоторые варианты выбора меры $d\mu$ функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ приводят среднее А. Н. Колмогорова (1) к классическим средним. Это распространяется и на средние нескольких чисел. Последнее становится

очевидным, если положить

$$d\mu = dx, \quad f(x) = x_k, \quad \text{если } x \in [k-1, k], \quad k = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Тогда выбор $\varphi(x) = x$ превращает среднее А. Н. Колмогорова (1) в среднее арифметическое чисел $x_1, \dots, x_m$, выбор $\varphi(x) = \ln x$ — в их среднее геометрическое, $\varphi(x) = 1/x$ — в среднее гармоническое, $\varphi(x) = x^\alpha$ — в среднее степенное, в частности, при $\varphi(x) = x^2$ получаем среднее квадратическое (см. [12]).

В случае непрерывной на измеримом по Жордану множестве Ω функции $f(x)$ при $d\mu = dx$, $\varphi(x) = x$ среднее А. Н. Колмогорова (1) превращается в классическое среднее по множеству Ω . Как правило, в теоремах о среднем для дифференциальных уравнений говорится именно о таких средних, хотя в подынтегральное выражение могут входить и некоторые производные от функции $f(x)$.

Наиболее широко известны теоремы о среднем для эллиптических уравнений. Базовым для использования в приложениях является следующий классический результат (см., например, [2, 6, 8]), восходящий к Гауссу: для того чтобы непрерывная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция $u(x)$ была гармонической в Ω , необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $x \in \Omega$ и всякого значения $r > 0$, при котором замыкание шара $B(x, r) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - x| < r\}$ вложено в Ω , ее значение в точке x равнялось среднему значению по сфере (шару) с центром в точке x и радиусом r :

$$u(x) = \frac{1}{|S_n|r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y = \frac{n}{|S_n|r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy, \quad (3)$$

где $|S_n|$ — площадь поверхности единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это утверждение называют теоремой (Гаусса) о среднем для уравнения Лапласа. Этот факт обобщается на эллиптические уравнения, а также и на обыкновенные дифференциальные уравнения. По этому поводу см. работы В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [3–5, 10], а также Т. Е. Моисеева [11].

Известны также и теоремы о среднем для гиперболических уравнений, среди которых прежде всего следует указать на классический принцип Асгейрсона (см. [6]) для ультрагиперболического уравнения и теорему А. В. Бицадзе и А. М. Нахушева о среднем значении для волнового уравнения (см. [1]). Здесь следует отметить, что в частном случае уравнения колебаний струны формула Асгейрсона превращается в разностное соотношение. О развитии теории гиперболических уравнений и систем см. монографию [14]).

В работе Л. Зальцмана [16] был выработан особый подход к получению формул среднего, связанный с анализом символа оператора. Этот подход (символический) с помощью методов Л. Хермандера (см. [13]) был обобщен в [15]. Ниже мы воспользуемся этим подходом, предварительно кратко изложив его.

2. Сопровождение линейного дифференциального оператора и формула среднего значения. Пусть $D_j = -i \partial / \partial x_j$, $j = 1, \dots, n$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, мультииндекс $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ имеет неотрицательные целые координаты, i — мнимая единица, $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$. Через $\delta(x - x_0)$ обозначается мера Дирака, сосредоточенная в точке x_0 . Символом «*» будем обозначать свертку распределений.

Рассмотрим уравнение

$$P(D)[u] \equiv \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta D^\beta u = 0. \quad (4)$$

Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta \xi^\beta$ будет символом оператора $P(D)$.

Определение 1. Распределение Φ с компактным носителем назовем *сопровождающим* (сопровождением) уравнение(я) (4) (оператор(а) $P(D)$), если для любого решения $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$\langle \Phi, u \rangle = 0, \quad (5)$$

называемое формулой среднего значения для уравнения (4).

Следующее утверждение является базовым результатом для дальнейшего изложения.

Теорема 1 (см. [15]). Пусть $P(D) = P_1(D)P_2(D)$, где P_1 и P_2 — многочлены. Пусть Φ_l — финитное распределение, сопровождающее оператор $P_l(D)$, $l = 1, 2$. Тогда распределение $\Phi = \Phi_1 * \Phi_2$ является сопровождением оператора $P(D) = P_1(D)P_2(D)$.

Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами, представляющее собой основной объект исследования настоящей статьи (основное уравнение):

$$P[u] \equiv \prod_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u = 0. \quad (6)$$

Здесь произведение понимается как суперпозиция операторов.

Будем называть характеристикой j -го типа для уравнения (6) прямую, заданную параметрическими уравнениями

$$\frac{dx_k}{ds} = a_{jk}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Будем считать, что все характеристики уравнения (6) просты.

Зафиксируем индекс $j \in \{1, \dots, m\}$ и рассмотрим уравнение, соответствующее отдельно взятому j -му множителю первого порядка оператора P , определенного левой частью основного уравнения (6):

$$P_j[u] \equiv \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0. \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть пара различных точек

$$\xi_j^{\alpha_j} = (\xi_{j1}^{\alpha_j}, \dots, \xi_{jn}^{\alpha_j}), \quad \alpha_j \in \{0; 1\}, \quad (9)$$

лежит на j -й характеристике основного уравнения (6). Тогда финитное распределение

$$\Phi_j(x) = \delta(x - \xi_j^1) - \delta(x - \xi_j^0) \quad (10)$$

является сопровождением уравнения (8) и оператора P_j .

Доказательство. Вспомним известный факт: значения решения $u_j(x)$ уравнения (8) совпадают в любых двух точках на j -й характеристике, т.е., в наших обозначениях,

$$\langle \Phi_j(x), u_j(x) \rangle = \langle \delta(x - \xi_j^1) - \delta(x - \xi_j^0), u_j(x) \rangle = u_j(\xi_j^1) - u_j(\xi_j^0) = 0. \quad \square$$

Определение 2. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $l = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_m$, $\alpha_j \in \{0; 1\}$, где $\oplus$ означает сумму по модулю 2. Обозначим через Θ множество всех наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in \{0; 1\}$, $j = 1, \dots, m$. Введем в рассмотрение набор точек $A^\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Theta$, полагая, что две точки A^α и A^γ соединены отрезком характеристики j -го типа если и только если их верхние мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\alpha_r, \gamma_r \in \{0; 1\}$, $r = 1, \dots, m$, связаны соотношениями

$$\alpha_r = \gamma_r, \quad r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m, \quad \gamma_j = \alpha_j \oplus 1. \quad (11)$$

При этом $|\gamma| = |\alpha| \oplus 1$, где $|\alpha| = \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_m$. Множество G всех этих точек $A^\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Theta$, вместе с соединяющими их отрезками характеристик назовем характеристическим графом для основного уравнения (6).

Пусть теперь на каждой характеристике j -го типа выбрано по две точки (9). Пусть

$$A^\alpha = \sum_{j=1}^m \xi_j^{\alpha_j}. \quad (12)$$

Лемма 2. Множество G всех точек $A^\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Theta$, определенных формулой (12), вместе с соединяющими их отрезками характеристик, является характеристическим графом для основного уравнения (6).

Доказательство. Пусть две точки (9) лежат на j -й характеристике. Параметризацию j -й характеристики, заданной дифференциальным уравнением (7), введем таким образом, чтобы при $s = 0$ получить $x = \xi_j^0$. При этом предположении уравнения j -й характеристики примут вид

$$x_k = a_{jk}s + \xi_{jk}^0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Тогда условие $x = \xi_j^1$ приведет к равенствам

$$a_{jk}s + \xi_{jk}^0 = \xi_{jk}^1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Из равенств (14) заключаем, что

$$s = \frac{\xi_{jk}^1 - \xi_{jk}^0}{a_{jk}} = \text{const}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (15)$$

или

$$(-1)^{\alpha_j} s = \frac{\xi_{jk}^{-\alpha_j} - \xi_{jk}^{\alpha_j}}{a_{jk}} = \text{const}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (16)$$

что, в свою очередь, равносильно условию

$$a_{jk_1}(\xi_{jk_2}^1 - \xi_{jk_2}^0) = a_{jk_2}(\xi_{jk_1}^1 - \xi_{jk_1}^0), \quad k_1, k_2 = 1, \dots, n, \quad (17)$$

или

$$a_{jk_1}\xi_{jk_2}^1 - a_{jk_2}\xi_{jk_1}^1 = a_{jk_1}\xi_{jk_2}^0 - a_{jk_2}\xi_{jk_1}^0, \quad k_1, k_2 = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Пусть точки $A^\alpha = (\eta_1^\alpha, \dots, \eta_n^\alpha) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Theta$, заданы формулой (12). Тогда для координат этих точек мы будем иметь:

$$\begin{aligned} a_{jk_1}\eta_{k_2}^\alpha - a_{jk_2}\eta_{k_1}^\alpha &= a_{jk_1} \sum_{r=1}^m \xi_{r,k_2}^\alpha - a_{jk_2} \sum_{r=1}^m \xi_{r,k_1}^\alpha = \\ &= a_{jk_1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m \xi_{r,k_2}^\alpha - a_{jk_2} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m \xi_{r,k_1}^\alpha + a_{jk_1}\xi_{k_2}^\alpha - a_{jk_2}\xi_{k_1}^\alpha = \\ &= a_{jk_1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m \xi_{r,k_2}^\alpha - a_{jk_2} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m \xi_{r,k_1}^\alpha + a_{jk_1}\xi_{k_2}^{-\alpha} - a_{jk_2}\xi_{k_1}^{-\alpha} = \\ &= a_{jk_1}\eta_{k_2}^\gamma - a_{jk_2}\eta_{k_1}^\gamma, \quad k_1, k_2 = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (19)$$

Это и завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 3. Вершины $A^\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Theta$, произвольного характеристического графа $G = G(A^\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ могут быть представлены в виде (12), где каждая пара точек $\xi_j^{\alpha_j}$, $\alpha_j = 0, 1$, $j = 1, \dots, m$, лежит на j -й характеристике.

Доказательство. Граф $G = G(A^\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, заданный условием теоремы, изоморфен m -мерному кубу с ребром, равным 1 и вершинами, которые обозначим $\tilde{A}^\alpha$, и для которых теперь числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ можно рассматривать как обычные координаты в пространстве $\mathbb{R}^m$. Ребро же этого графа, инцидентное вершинам A^α и A^γ , удовлетворяющим соотношениям (11), очевидным образом сопоставляется ребру куба с вершинами $\tilde{A}^\alpha$ и $\tilde{A}^\gamma$. Обозначим этот куб $\tilde{G}$. Изоморфизм можно задать с помощью линейного отображения куба $\tilde{G}$ на граф G (как и с помощью обратного отображения). Обозначим этот изоморфизм H . Пусть $\tilde{\xi}_k^{\alpha_k} = (0, \dots, \alpha_k, \dots, 0)$ (k -я координата равна α_k , остальные равны нулю, причем $\tilde{\xi}_k^0 = (0, \dots, 0)$ при всех $k = 1, \dots, m$). Тогда достаточно положить $\xi_k^{\alpha_k} = H(\tilde{\xi}_k^{\alpha_k})$, $k = 1, \dots, m$, $\alpha_k = 0, 1$, что приведет к соотношениям (12). $\square$

Теорема 2. Для любого регулярного решения $u(x)$ основного уравнения (6) и для любого характеристического для этого уравнения графа $G \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами $A^\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Theta$, выполняется разностное соотношение (формула среднего значения)

$$\sum_{\alpha \in \Theta} (-1)^{|\alpha|} u(A^\alpha) = 0. \quad (20)$$

Доказательство. В силу леммы 3 вершины графа G могут быть разложены по формуле (12). Для каждой пары вершин ξ_j^0, ξ_j^1 распределение вида (10) является сопровождением оператора (8). Тогда по теореме 1, в силу известной формулы

$$\delta(Z - Z_1) * \delta(Z - Z_2) = \delta(Z - Z_1 - Z_2),$$

распределение

$$\begin{aligned} \Phi(Z) &= \Phi_1(Z) * \Phi_2(Z) * \dots * \Phi_m(Z) = \\ &= (\delta(x - \xi_1^0) - \delta(x - \xi_1^1)) * \dots * (\delta(x - \xi_m^0) - \delta(x - \xi_m^1)) = \\ &= \sum_{\alpha \in \Theta} (-1)^{|\alpha|} \delta(x - A^\alpha) \end{aligned} \quad (21)$$

является сопровождением уравнения (6). Это равносильно утверждению теоремы. $\square$

Для случая двух переменных этот результат был доказан в [9].

Заметим, что из формулы (20) вытекает как частный случай «формула включений-исключений» для полинома. Уточним это. Мы рассмотрели случай, когда все характеристики уравнения (6) просты. Откажемся теперь от этого требования. Формально формула (20) не изменится, только на каждой кратной характеристике вместо двух точек в этом случае можно располагать не по две точки, а в количестве, равном удвоенной ее кратности. В самом простом случае, когда $n = 2$ и имеется единственная характеристика с кратностью m , уравнение (6) в переменных x, t примет вид

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial t} \right)^m u = 0. \quad (22)$$

Это уравнение после замены $\eta = x$, $\xi = bx - at$ приведет к виду

$$\frac{\partial^m u}{\partial \eta^m} = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) — обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое переменная ξ входит как параметр. Общим решением этого уравнения является полином одной переменной η степени $m - 1$. В этом случае формула (20) приобретает вид

$$u(0) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} u(x_{i_1} + \dots + x_{i_k}), \quad (24)$$

где $x_1, \dots, x_m$ суть произвольные точки числовой прямой. Эта формула и имеет вид «формулы включений-исключений для полинома степени $m - 1$ ».

Отметим еще одно обстоятельство. Известен следующий результат (теорема о среднем для уравнения колебаний струны, или одномерный принцип Асгейрссона): если функция двух переменных $u(x, t)$ является регулярным решением уравнения колебаний струны $u_{tt} = u_{xx}$, то она удовлетворяет равенству

$$u(x_1, t_1) + u(x_3, t_3) = u(x_2, t_2) + u(x_4, t_4), \quad (25)$$

где (x_i, t_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, — последовательно пронумерованные вершины прямоугольника, образованного линиями $x \pm t = x_i \pm t_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Легко теперь видеть, что этот результат тоже может быть сконструирован с помощью изложенной методики. С другой стороны, доказанная выше формула (20) может быть доказана по

той же классической схеме, по которой доказана формула (25), т.е. с помощью представления общего решения, которое имеет вид

$$u(x) = \sum_{j=1}^m f_j \left(a_{j1}x_2 - a_{j2}x_1, a_{j1}x_3 - a_{j3}x_1, \dots, a_{j1}x_n - a_{jn}x_1 \right), \quad (26)$$

где $f_j \in C^m(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \dots, m$, — произвольные функции. Однако этот путь предполагает, что характеристический граф уже построен. Приведенное выше доказательство включает в себя и построение характеристического графа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях// Диффер. уравн. — 1974. — 10, № 12. — С. 2184–2191.
2. Гильберг Д., Трудингер П. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
3. Ильин В. А. О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами// Диффер. уравн. — 1969. — 5, № 11. — С. 1940–1978.
4. Ильин В. А. Некоторые свойства регулярного решения уравнения Гельмгольца в плоской области// Мат. заметки. — 1974. — 15, № 6. — С. 885–890.
5. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Формула среднего значения для присоединенных функций оператора Лапласа// Диффер. уравн. — 1981. — 17, № 10. — С. 1908–1910.
6. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние. — М.: ИЛ, 1958.
7. Колмогоров А. Н. Об определении среднего// в кн.: Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985. — 1. — С. 136–138.
8. Курант Р., Гильберт Д. Уравнения математической физики. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
9. Мешков В. З., Половинкин И. П., Половинкина М. В., Ермакова Ю. Д., Равеева С. А. Формула среднего значения для двумерного линейного гиперболического уравнения// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 4. — С. 121–126.
10. Моисеев Е. И. Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения// Диффер. уравн. — 1980. — 16, № 5. — С. 827–844.
11. Моисеев Т. Е. Формула среднего значения для гармонической функции в круговом секторе// Докл. РАН. — 2010. — 432, № 5. — С. 592–593.
12. Ситник С. М. Обобщения неравенств Коши—Буняковского методом средних значений и их приложения// в кн.: Фундаментальная математика. Избранные труды участников Воронежского математического семинара по математическому анализу, теории функций и дифференциальным уравнениям (Минин Л. А., Новиков И. Я., Родин В. А., Ситник С. М., ред.)// Черноземный альманах научных исследований. — Воронеж, 2005. — С. 3–42.
13. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. — М.: Мир, 1986.
14. Benzoni-Gavage S., Serre D. Multi-Dimensional Hyperbolic Partial Differential Equations: First-Order Systems and Applications. — Oxford Univ. Press, 2006.
15. Meshkov V. Z., Polovinkin I. P. Mean-value properties of solutions of linear partial differential equations// J. Math. Sci. — 2009. — 160, № 1. — P. 45–52.
16. Zalcman L. Mean values and differential equations// Isr. J. Math. — 1973. — 14. — P. 339–352.

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru