Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Усков, Исследование сингулярных возмущений в дескрипторных уравнениях в частных производных первого порядка с матрично-дифференциальным оператором, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 173, 132–139

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-173-132-139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 08:39:56

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 132–139
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-132-139

УДК 517.922, 517.928, 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДЕСКРИПТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2019 г. В. И. УСКОВ

Аннотация. В работе рассматриваются дифференциальные уравнения, вырожденность которых обусловлена наличием матрично-дифференциального операторного коэффициента при производной, возмущенного с помощью малого параметра. Свойства этого оператора применяются при исследовании начально-краевых задач для рассматриваемых уравнений на наличие явления погранслоя; определяются условия регулярности вырождения.

Ключевые слова: банахово пространство, матрично-дифференциальный оператор, дифференциальное уравнение первого порядка, малое возмущение, параметр, явление погранслоя.

SINGULAR PERTURBATIONS IN FIRST-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MATRIX-DIFFERENTIAL OPERATORS

© 2019 V. I. USKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider differential equations whose degeneracy is due to the presence of a matrix-differential operator coefficient of the derivative perturbed by a small parameter. Properties of this operator are used in the study of initial-boundary-value problems for equations considered for the presence of a boundary layer. Regularity conditions of degeneracy are determined.

Keywords and phrases: Banach space, matrix-differential operator, first-order differential equation, small perturbation, parameter, boundary layer.

AMS Subject Classification: 35F40

1. Введение. Рассмотрим начально-краевые задачи для уравнений

$$(A + \varepsilon B) \frac{\partial u}{\partial t} = Cu(x, t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$A \frac{\partial u}{\partial t} = (B + \varepsilon C)u(x, t, \varepsilon), \quad (2)$$

где A, B, C — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 с всюду плотными в E_1 областями определения; оператор A фредгольмов с нулевым индексом (Φ_0 -оператор); $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; $(x, t) \in \Omega = [0, 2\pi] \times [0, T]$.

Впервые уравнения, неразрешенные относительно производной, изучались, по-видимому, в работе А. Пуанкаре [12]. Такие уравнения называют *дифференциально-алгебраическими*, или *дескрипторными*. Исследование таких уравнений сосредоточено в нескольких математических школах: воронежская (С. Г. Крейн, А. Г. Баскаков, С. П. Зубова и др.), челябинская (Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров и их ученики), иркутская (Ю. Е. Бояринцев, Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова, В. Ф. Чистяков, М. В. Фалалеев и их ученики), екатеринбургская (И. В. Мельникова и ее ученики). За рубежом активные исследования ведут А. Favini, А. Yagi, S. Campbell, P. Kunkel, V. Mehrmann, R. März и др.

Вырожденные системы уравнений в частных уравнений встречаются в различных областях приложений: гидродинамике (уравнения Навье—Стокса), теплотехнике, электротехнике и т. д. Такие уравнения относят к уравнениям соболевского типа (см. [2]).

Задача Коши для дескрипторных уравнений с Φ_0 -оператором при производной, возмущенным с помощью малого параметра, исследована на жесткость в [4, 5]; построено асимптотическое разложение решения (см. [7]).

Несмотря на то, что параметр ε входит регулярно в уравнения (в пределе тип уравнения не меняется), могут возникать особенности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Целью настоящей работы является применение свойств оператора A при исследовании поставленных задач на наличие явления погранслоя; определение условий регулярности вырождения.

2. Необходимые сведения. Приведем сведения, необходимые для решения поставленных задач.

Свойство 1. Пусть линейный оператор A действует из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 . Свойство Φ_0 этого оператора влечет разложения

$$E_1 = \text{Coim } A \oplus \text{Ker } A, \quad E_2 = \text{Im } A \oplus \text{Coker } A, \quad (3)$$

здесь $\text{Coim } A$ — прямое дополнение к ядру $\text{Ker } A$; $\text{Coker } A$ — дефектное подпространство; $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Coker } A < \infty$; сужение $\tilde{A}$ оператора A на $\text{Coim } A$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$ (см. [9]).

Пусть D — некоторый линейный ограниченный оператор, ω — тип полугруппы этого оператора. Имеет место следующая оценка (см. [8]):

$$\|\exp(tD)\| \leq \mu \exp(\omega t), \quad \mu = \text{const} > 0. \quad (4)$$

2.1. Поведение решения уравнения с малым параметром. Рассмотрим допредельное уравнение с искомой функцией z и малым параметром $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

$$\Phi(\varepsilon, t, z(t, \varepsilon)) = 0 \quad (5)$$

и предельное уравнение для уравнения (5):

$$\bar{\Phi}(t, \bar{z}(t)) = 0.$$

Возможно следующее поведение решения $z(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

- (a) $z(t, \varepsilon) \Rightarrow \bar{z}(t)$ (равномерная сходимости);
- (b) $z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t) + v(t, \varepsilon)$, где $v(t, \varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точки $t = 0$ (явление погранслоя);
- (c) остальные случаи: $\|z(t, \varepsilon)\| \rightarrow \infty$ или $z(t, \varepsilon)$ не имеет предела.

Ограниченная функция $v(t, \varepsilon)$, определенная на $[0, T]$, называется *функцией погранслоя вблизи точки $t = 0$* , если при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место соотношение $v(t, \varepsilon) \Rightarrow 0$ на $[t', T]$ для всех $t' \in (0, T)$ и $v(t, \varepsilon) \not\Rightarrow 0$ на $[0, T]$ (см. [4]).

2.2. *О матрично-дифференциальном операторе.* Рассмотрим матрично-дифференциальный оператор

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ 1 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (6)$$

с областью определения

$$\text{dom } A = \left\{ \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}, v_k(x) \in C^2[0, 2\pi], v_k(0) = v_k(2\pi), k = 1, 2 \right\}, \quad (7)$$

действующий в банаховом пространстве

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}, v_k(x) \in C[0, 2\pi], k = 1, 2 \right\}. \quad (8)$$

В [6] доказано наличие Φ_0 -свойства у оператора A (разложения (3)), где

$$\begin{aligned} \text{Ker } A &= \{c_1 e_1(x) + c_2 e_2(x), c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}, \quad \text{Coker } A = \{k_1 e_1(x) + k_2 e_2(x), k_1, k_2 \in \mathbb{C}\}, \\ e_1(x) &= \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad e_2(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проекторы $P(x)$, $Q(x)$ на $\text{Ker } A$, $\text{Coker } A$ соответственно равны

$$P(x) = Q(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \cos(x-s) ds & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \sin(x-s) ds \\ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \sin(x-s) ds & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \cos(x-s) ds \end{pmatrix};$$

полуобратный оператор $A^-(x) = (H_{ij})$, $i, j = 1, 2$, где

$$\begin{aligned} H_{11} &= - \int_x^{2\pi} (\cdot) \cos(x-s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \cdot s \cdot \cos(x-s) ds, \\ H_{12} &= - \int_0^{2\pi} (\cdot) \sin(x-s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \cdot s \cdot \sin(x-s) ds, \\ H_{21} &= \int_0^{2\pi} (\cdot) \sin(x-s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \cdot s \cdot \sin(x-s) ds, \\ H_{22} &= - \int_0^{2\pi} (\cdot) \cos(x-s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \cdot s \cdot \cos(x-s) ds, \end{aligned}$$

Оператор $A_1 = QP = P$ обратим; $A_1^{-1} = I$ (I — единичный оператор в соответствующем подпространстве).

Нетрудно видеть, что операторы $Q(x)$, $P(x)$ и $A^-(x)$ ограничены при каждом $x \in [0, 2\pi]$.

2.3. *Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения.* Рассмотрим задачу

$$(A + \varepsilon B) \frac{dz}{dt} = Cz(t, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = z^0(\varepsilon) \in E_1, \quad (9)$$

где A, B, C — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 с всюду плотными в E_1 областями определения; A — Φ_0 -оператор; $z^0(\varepsilon)$ — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция; $z(t, \varepsilon) \in E_1$; $t \in [0, T]$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

В случае обратимости ненулевого оператора

$$A_1^{(1)} = QBP : \text{Ker } A \rightarrow \text{Coker } A \quad (10)$$

применив обозначения

$$\begin{aligned} S_0^{(1)} &= QB, \quad T_0^{(1)} = A^-B, \quad R_0 = (I + \varepsilon T_0^{(1)})^{-1}, \\ K_0 &= I - (A_1^{(1)})^{-1} S_0^{(1)} R_0, \quad V_1(\varepsilon) = R_0 K_0 A^-C + \varepsilon^{-1} R_0 (A_1^{(1)})^{-1} QC, \end{aligned} \quad (11)$$

сформулируем следующий результат.

Лемма 1 (см. [3]). Пусть оператор $V_1(\varepsilon) : \text{Coim } A \rightarrow \text{Coim } A$, определяемый формулой (10), ограничен и сильно непрерывен при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда решение задачи (9) существует при выполнении условия

$$0 < \varepsilon \|T_0^{(1)}\| < 1. \quad (12)$$

Это решение единственно и имеет вид

$$z(t, \varepsilon) = \exp(t \cdot V_1(\varepsilon)) z^0(\varepsilon). \quad (13)$$

Теперь рассмотрим задачу

$$A \frac{dz}{dt} = Dz(t), \quad z(0) = z^0 \in E_1, \quad (14)$$

где A, D — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 с всюду плотными в E_1 областями определения; A — Φ_0 -оператор; $z(t) \in E_1$; $t \in [0, T]$.

Задача (14) решена методом каскадной декомпозиции, модифицированным в [10]. В случае обратимости ненулевого оператора

$$A_1^{(2)} = QDP : \text{Ker } A \rightarrow \text{Coker } A, \quad (15)$$

применив обозначения

$$S_0^{(2)} = QD, \quad T_0^{(2)} = A^-D, \quad \hat{S}_0 = I - (A_1^{(2)})^{-1} S_0, \quad T_1 = T_0^{(2)} \hat{S}_0, \quad (16)$$

сформулируем следующий результат.

Лемма 2. Пусть оператор $T_1 : \text{Coim } A \rightarrow \text{Coim } A$, определяемый формулой (16), ограничен. Тогда решение задачи (14) существует при выполнении условия

$$QDz^0 = 0. \quad (17)$$

Это решение единственно, имеет вид

$$z(t, \varepsilon) = \hat{S}_0 \exp(t \cdot T_1)(I - P)z^0 \quad (18)$$

и обладает следующим свойством:

$$QDz(t) \equiv 0, \quad t \in [0, T]. \quad (19)$$

3. Начально-краевая задача для дескрипторного уравнения в частных производных первого порядка с возмущением слева. Рассмотрим задачу

$$(A + \varepsilon B) \frac{\partial u}{\partial t} = Cu(x, t, \varepsilon), \quad u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x, \varepsilon), \quad u(0, t, \varepsilon) = u(2\pi, t, \varepsilon), \quad (20)$$

где оператор A определяется формулами (6)–(8); операторы B, C задаются вещественными числовыми матрицами $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$; $u^0(x, \varepsilon)$ — достаточно гладкая по x и голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; $(x, t) \in \Omega = [0, 2\pi] \times [0, T]$.

Под решением задачи (20) подразумевается функция $u(x, t, \varepsilon)$, обладающая следующими свойствами:

- (i) $u(x, t, \varepsilon)$ дифференцируема по t и дважды по x ;
- (ii) $u(x, t, \varepsilon)$ непрерывна по x вместе со своими производными $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$;

(iii) $u(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет (20) при всех $(x, t) \in \Omega$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Задача (20) — это задача вида (9). Предельная задача имеет вид

$$A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = C \bar{u}(x, t), \quad \bar{u}(x, 0) = \bar{u}^0(x), \quad \bar{u}(0, t) = \bar{u}(2\pi, t).$$

Пусть выполнено одно из неравенств: $b_{11} + b_{12} \neq 0$ или $b_{12} - b_{21} \neq 0$. Рассмотрим случай, когда оператор $A_1^{(1)}(x)$, определяемый формулой (10), ненулевой и обратимый в $\text{Ker } A$. Пусть при всех $(x, \varepsilon) \in [0, 2\pi] \times (0, \varepsilon_0)$ имеет место неравенство (12).

Здесь и далее используются обозначения: K^* — присоединенная матрица для матрицы K (см. [1]); $\tilde{B} = B + B^*$, $\tilde{C} = C + C^*$.

Вычисления показывают, что

$$A_1^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \tilde{B} P(x).$$

Обратный оператор существует (в подпространстве $\text{Ker } A$) при выполнении условия $\det \tilde{B} \neq 0$; решив уравнение

$$A_1^{(1)}(x) \xi(x) = \eta(x), \quad \xi(x) \in \text{Ker } A, \quad \eta(x) \in \text{Coker } A,$$

имеем:

$$(A_1^{(1)})^{-1} = 2\tilde{B}^{-1}.$$

Оператор V_1 (см. обозначения (11)) ограничен и сильно непрерывен. Тогда в силу леммы 1 решение задачи (20) единственно и определяется по формуле (13).

Легко видеть, что особенности в поведении решения порождаются экспонентой $\exp(t \cdot V_1(x, \varepsilon))$. Оператор V_1 допускает асимптотическое представление

$$V_1(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} W + o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где

$$W = W(x) = 2\tilde{B}^{-1} Q(x) C;$$

добавка $o(1)$ вмещает в себя нормы ограниченных операторов. Отсюда следует равенство

$$\exp(t \cdot V_1) = \mu(\varepsilon) \exp\left(\frac{t}{\varepsilon} W\right),$$

где $\mu(\varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция. Пользуясь оценкой (4), имеем:

$$\|\exp(t \cdot V_1)\| \leq \mu^* \cdot \exp\left(\omega_1 \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \mu^* = \max |\mu(\varepsilon)|,$$

где ω_1 — тип полугруппы оператора W . Из этой оценки следует, что неравенство $\omega_1 < 0$ является условием регулярности вырождения. Таким образом, имеет место следующее поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи (20).

Теорема 1. Пусть $W(x)$ — производящий оператор полугруппы отрицательного типа при каждом x . Тогда имеет место случай (b), и функции погранслоя имеют переменную t/ε .

Изучим спектр оператора $W(x)$. Введем обозначения $\tilde{B}^{-1} = (\hat{b}_{ij})$,

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= \frac{\hat{b}_{11}c_{11} + \hat{b}_{12}c_{21}}{\pi}, & \hat{k}_2 &= \frac{\hat{b}_{11}c_{12} + \hat{b}_{12}c_{22}}{\pi}, & \hat{k}_3 &= \frac{\hat{b}_{11}c_{21} - \hat{b}_{12}c_{11}}{\pi}, & \hat{k}_4 &= \frac{\hat{b}_{11}c_{22} - \hat{b}_{12}c_{12}}{\pi}, \\ \hat{k}_5 &= \frac{\hat{b}_{21}c_{11} + \hat{b}_{22}c_{21}}{\pi}, & \hat{k}_6 &= \frac{\hat{b}_{21}c_{12} + \hat{b}_{22}c_{22}}{\pi}, & \hat{k}_7 &= \frac{\hat{b}_{21}c_{21} - \hat{b}_{22}c_{11}}{\pi}, & \hat{k}_8 &= \frac{\hat{b}_{21}c_{22} - \hat{b}_{22}c_{12}}{\pi}. \end{aligned}$$

Оператор $W(x) = (W_{ij})$, $i, j = 1, 2$, определяется равенствами

$$\begin{aligned} W_{11} &= \hat{k}_1 \int_0^{2\pi} (\cdot) \cos(x-s) ds + \hat{k}_3 \int_0^{2\pi} (\cdot) \sin(x-s) ds, \\ W_{12} &= \hat{k}_2 \int_0^{2\pi} (\cdot) \cos(x-s) ds + \hat{k}_4 \int_0^{2\pi} (\cdot) \sin(x-s) ds, \\ W_{21} &= \hat{k}_5 \int_0^{2\pi} (\cdot) \cos(x-s) ds + \hat{k}_7 \int_0^{2\pi} (\cdot) \sin(x-s) ds, \\ W_{22} &= \hat{k}_6 \int_0^{2\pi} (\cdot) \cos(x-s) ds + \hat{k}_8 \int_0^{2\pi} (\cdot) \sin(x-s) ds. \end{aligned}$$

Из спектрального уравнения

$$W(x)v(x) = \lambda v(x), \quad v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$$

следует уравнение для нахождения собственных значений оператора W :

$$\det \begin{pmatrix} \pi \hat{k}_1 - \lambda & \pi \hat{k}_2 & -\pi \hat{k}_3 & -\pi \hat{k}_4 \\ \pi \hat{k}_5 & \pi \hat{k}_6 - \lambda & -\pi \hat{k}_7 & -\pi \hat{k}_8 \\ \pi \hat{k}_3 & \pi \hat{k}_4 & \pi \hat{k}_1 - \lambda & \pi \hat{k}_2 \\ \pi \hat{k}_7 & \pi \hat{k}_8 & \pi \hat{k}_5 & \pi \hat{k}_6 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

4. Начально-краевая задача для дескрипторного уравнения в частных производных первого порядка с возмущением справа. Рассмотрим задачу

$$A \frac{\partial u}{\partial t} = (B + \varepsilon C)u(x, t, \varepsilon), \quad u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x, \varepsilon), \quad u(0, t, \varepsilon) = u(2\pi, t, \varepsilon), \quad (21)$$

где оператор A определяется формулами (6)–(8), операторы B , C задаются вещественными числовыми матрицами $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$; $u^0(x, \varepsilon)$ — достаточно гладкая по x и голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; $(x, t) \in \Omega$.

Под *решением* задачи (21) подразумевается функция $u(x, t, \varepsilon)$, обладающая следующими свойствами:

- (i) $u(x, t, \varepsilon)$ дифференцируема по t и дважды по x ;
- (ii) $u(x, t, \varepsilon)$ непрерывна по x вместе со своими производными $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$;
- (iii) $u(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет (21) при всех $(x, t) \in \Omega$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Предельная задача для задачи (21) имеет вид

$$A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = B \bar{u}(x, t), \quad \bar{u}(x, 0) = \bar{u}^0(x), \quad \bar{u}(0, t) = \bar{u}(2\pi, t).$$

Рассмотрим случай, когда оператор $A_1^{(2)}(x, \varepsilon)$, определяемый формулой (15) с $D = B + \varepsilon C$ ненулевой и обратимый в $\text{Ker } A$ при каждом ε . Вычисления показывают, что

$$A_1^{(2)}(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} \tilde{D}(\varepsilon) P(x),$$

где $\tilde{D}(\varepsilon) = \tilde{B} + \varepsilon \tilde{C}$. Обратный оператор существует (в подпространстве $\text{Ker } A$) при выполнении условия

$$\Delta_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \det D(\varepsilon) \neq 0 \quad \text{при каждом } \varepsilon.$$

Решив уравнение

$$A_1^{(2)}(x, \varepsilon) \xi(x) = \eta(x), \quad \xi(x) \in \text{Ker } A, \quad \eta(x) \in \text{Coker } A,$$

получим

$$(A_1^{(2)})^{-1} = 2\tilde{D}^{-1}(\varepsilon) = 2\Delta_\varepsilon^{-1}\tilde{D}^*(\varepsilon). \quad (22)$$

Оператор $T_1(x, \varepsilon)$ (см. обозначения (16)) ограничен и сильно непрерывен. Поэтому в силу леммы 2 решение задачи (21) существует при выполнении условия (17). Это решение единственно, определяется формулой (18) и обладает свойством (19).

Далее,

$$T_1 = A^-B + \varepsilon A^-C + \Delta_\varepsilon^{-1}G(\varepsilon),$$

$$G(\varepsilon) = G_0 + \varepsilon G_1 + o(\varepsilon), \quad G_0 = -2A^-B\tilde{B}^*QB, \quad G_1 = -2A^-B(\tilde{B}^*QC + \tilde{C}^*QB) - 2A^-C\tilde{B}^*QB;$$

добавка $o(\varepsilon)$ вмещает в себя нормы ограниченных операторов. Операторы G_0, G_1 также ограничены.

Нетрудно видеть, что особенности в поведении решения порождаются экспонентой $\exp(t \cdot T_1(x, \varepsilon))$. Распишем определитель Δ_ε в виде

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_0 + \varepsilon\Delta_1 + \varepsilon^2\Delta_2,$$

где

$$\Delta_0 = \det \tilde{B}, \quad \Delta_1 = \det \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \det \tilde{C}$$

($\tilde{b}_{ij}, \tilde{c}_{ij}$ — элементы матриц $\tilde{B}, \tilde{C}$, $i, j = 1, 2$). Получаем следующие импликации:

$$\begin{aligned} \Delta_0 \geq 0, \quad \Delta_0 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} + b_{22} = 0, \\ b_{12} - b_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{B} = 0 \Leftrightarrow G_0 = 0; \\ \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} c_{11} + c_{22} = 0, \\ c_{12} - c_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{C} = 0; \\ \Delta_0 = 0 &\Rightarrow \Delta_1 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть $\Delta_0 \neq 0$. В этом случае $T_1 = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, что в силу оценки (4) влечет случай (а) поведения решения.

Теперь рассмотрим случай $\Delta_0 = 0$. Из импликаций (23) следует, что $T_1 = O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Экспонента расписывается в виде

$$\exp(t \cdot T_1) = \mu(\varepsilon) \exp\left(\frac{t}{\varepsilon} \cdot \frac{G_1}{\Delta_2}\right),$$

где $\mu(\varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция. Пользуясь оценкой (4), имеем

$$\|\exp(t \cdot T_1)\| \leq \mu^* \cdot \exp\left(\frac{1}{\Delta_2} \cdot \frac{t}{\varepsilon} \cdot \omega_2\right), \quad \mu^* = \max |\mu(\varepsilon)|,$$

где ω_2 — тип полугруппы оператора G_1 . Из последней оценки вытекает, что неравенство $\omega_2 < 0$ является условием регулярности вырождения.

Замечание 1. При $\Delta_2 = 0$ оператор $A_1^{(2)}$ необратим, так что требуется дальнейшее исследование.

Таким образом, имеет место следующее поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи (21).

Теорема 2. При условии $\Delta_0 > 0$ имеет место случай (а). Если $G_1(x)$ — производящий оператор полугруппы отрицательного типа при каждом x и выполнены условия $\Delta_0 = 0, \Delta_2 > 0$, то имеет место случай (b), и функции погранслоя имеют переменную t/ε .

Для изучения спектра оператора $G_1(x)$ введем обозначения $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22}$, $\tilde{c}_2 = \tilde{c}_{12} = -\tilde{c}_{21}$,

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= \frac{(b_{11} - b_{22})(b_{21}\tilde{c}_1 - b_{11}\tilde{c}_2) - (b_{12} + b_{21})(b_{11}\tilde{c}_1 + b_{21}\tilde{c}_2)}{4\pi}, \\ \tilde{k}_2 &= -\frac{(b_{11} - b_{22})(b_{11}\tilde{c}_1 + b_{21}\tilde{c}_2) + (b_{12} + b_{21})(b_{21}\tilde{c}_1 - b_{11}\tilde{c}_2)}{4\pi}, \\ \tilde{k}_3 &= \frac{(b_{11} - b_{22})(b_{22}\tilde{c}_1 - b_{12}\tilde{c}_2) - (b_{12} + b_{21})(b_{12}\tilde{c}_1 + b_{22}\tilde{c}_2)}{4\pi}, \\ \tilde{k}_4 &= -\frac{(b_{11} - b_{22})(b_{12}\tilde{c}_1 + b_{22}\tilde{c}_2) + (b_{12} + b_{21})(b_{22}\tilde{c}_1 - b_{12}\tilde{c}_2)}{4\pi}.\end{aligned}$$

Из спектрального уравнения

$$G_1(x)v(x) = \lambda v(x), \quad v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$$

вытекает уравнение для нахождения собственных значений оператора G_1 :

$$\det \begin{pmatrix} \pi\tilde{k}_1 - \lambda & -\pi\tilde{k}_2 & \pi\tilde{k}_3 & -\pi\tilde{k}_4 \\ \pi\tilde{k}_2 & \pi\tilde{k}_1 - \lambda & \pi\tilde{k}_4 & \pi\tilde{k}_3 \\ -\pi\tilde{k}_2 & -\pi\tilde{k}_1 & -\pi\tilde{k}_4 - \lambda & -\pi\tilde{k}_3 \\ \pi\tilde{k}_1 & -\pi\tilde{k}_2 & \pi\tilde{k}_3 & -\pi\tilde{k}_4 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. Зубова С. П. Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной// Докл. РАН. — 2009. — 428, № 4. — С. 444–446.
4. Зубова С. П. О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной// Докл. РАН. — 2014. — 454, № 4. — С. 383–386.
5. Зубова С. П., Раецкая Е. В. Исследование жесткости дескрипторной динамической системы в банаховом пространстве// Пробл. мат. анализ. — 2015. — 79. — С. 127–132.
6. Зубова С. П., Раецкая Е. В., Усков В. И. О свойствах вырожденности некоторого дифференциального оператора и их применение// Фундам. прикл. мат. (в печати).
7. Зубова С. П., Усков В. И. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай// Мат. заметки. — 2018. — 103, № 3. — С. 393–404.
8. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
9. Никольский С. М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1943. — 7, № 3. — С. 147–166.
10. Усков В. И. Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения первого порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. (в печати).
11. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solutions. — Zurich: EMA, 2006.
12. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation// Acta Math. — 1885. — 7. — P. 259–380.

Усков Владимир Игоревич

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова

E-mail: vum1@yandex.ru