Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Аль-Абайехи, А. Фигула, Геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в нильпотентных метрических алгебрах Ли, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 177, 10–23

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-177-10-23>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:20:20

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 177 (2020). С. 10–23
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-177-10-23

УДК 512.554.3

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ И ПЛОСКИЕ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОДАЛГЕБРЫ В НИЛЬПОТЕНТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ЛИ

© 2020 г. А. АЛЬ-АБАЙЕХИ, А. ФИГУЛА

Аннотация. Определены геодезические и плоские вполне геодезические подалгебры в нильпотентных метрических алгебрах высшей ступени размерности 5. Установлено, что в неравномерных метрических алгебрах Ли с одномерным центром геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры не зависят от выбора скалярного произведения.

Ключевые слова: нильпотентная метрическая алгебра Ли, геодезический вектор, нефилиформная метрическая алгебра Ли, плоская вполне геодезическая подалгебра, скалярное произведение.

GEODESIC VECTORS AND FLAT TOTALLY GEODESIC SUBALGEBRAS IN NILPOTENT METRIC LIE ALGEBRAS

© 2020 A. AL-ABAYECHI, Á. FIGULA

ABSTRACT. We determine geodesics and flat totally geodesic subalgebras in higher-step nilpotent metric Lie algebras of dimension 5. It is surprising that in nonfiliform metric Lie algebras with one-dimensional center, the geodesic vectors and flat totally geodesic subalgebras are independent of the choice of the inner product.

Keywords and phrases: nilpotent metric Lie algebra, geodesic vector, nonfiliform metric Lie algebras, flat totally geodesic subalgebras, inner product.

AMS Subject Classification: 17B60

1. Введение. Риманову геометрию групп Ли можно успешно изучать, работая с их алгебрами Ли (см. [8]). Геометрия нильмногообразий второй ступени N разработана понятия П. Эберлейном; в частности, в [3] он получил простые и полезные критерии, являющиеся необходимыми и достаточными для того, чтобы подалгебра алгебры Ли для N была вполне геодезической. Геометрия нильмногообразий высших ступеней также имеет замечательные свойства. В частности, для филиформных нильпотентных групп Ли они описаны М. М. Керром и Т. Л. Пейном (см. [6]). Дж. Кейрнс, А. Хинич Галич и Ю. Николаевский привели несколько результатов о возможной размерности вполне геодезических подалгебр нильпотентных метрических алгебр Ли (см. [1]); для N -градуированных филиформных алгебр Ли они определили максимальную размерность этих подалгебр и показали, что эта оценка достигается (см. [2]).

Конкретная классификация геодезических векторов и плоских вполне геодезических подалгебр в нильпотентных метрических алгебрах Ли n дана П. Т. Надем и З. Гомолией в [9] для случая,

Работа выполнена при поддержке проекта EFOP-3.6.1-16-2016-00022, софинансируемого Европейским Союзом и Европейским Социальным Фондом.

когда $\mathfrak{n}$ является двуступенно нильпотентной и имеет размерность ≤ 6 . При проведении этой классификации весьма полезным оказался тот факт, что линейная структура геодезических векторов и плоских вполне геодезических подалгебр двуступенно нильпотентных метрических алгебр Ли зависит только от класса изоморфизма алгебры Ли. Это выдающийся результат, поскольку в общем случае свойство подалгебр быть вполне геодезическими очень чувствительно к изменению скалярного произведения метрической алгебры Ли (см. [1]). В [4] были найдены классы эквивалентности изометрически изоморфных филиформных метрических алгебр Ли, а также классы эквивалентности изометрически изоморфных пятимерных метрических алгебр Ли, имеющих класс нильпотентности > 2 . Оказалось, что существует взаимно однозначное соответствие между этими классами эквивалентности и семейством метрических алгебр Ли на евклидовом векторном пространстве $\mathbb{E}^n$ с выделенным ортонормированным базисом, зависящим от вещественных параметров, определяемых структурой коэффициентов алгебры Ли. С помощью этого мы вводим геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в нильпотентных метрических алгебрах Ли высокой степени размерности ≤ 5 , получив их зависимости от вещественных параметров, описывающих различные классы изометрически изоморфных метрических алгебр Ли.

В разделе 2 собраны некоторые основные определения и результаты о геодезических векторах и плоских вполне геодезических подалгебрах в нильпотентных метрических алгебрах Ли. Раздел 3 посвящен трехступенно нильпотентным филиформным метрическим алгебрам Ли, а в разделе 4 изучаются филиформные метрические алгебры Ли. Показано, что все эти метрические алгебры Ли имеют двумерную плоскую вполне геодезическую подалгебру, но только пятимерные стандартные филиформные метрические алгебры Ли имеют трехмерную плоскую вполне геодезическую подалгебру. Наиболее удивительным является то, что в нефилiformных метрических алгебрах Ли с одномерным центром геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры не зависят от параметров, характеризующих различные классы изометрически изоморфных метрических алгебр Ли (см. теорему 3.1). Кроме того, в нильногообразиях, имеющих группы изометрии большей размерности как нильногообразия, плоские вполне геодезические подгруппы имеют один и тот же вид для произвольного скалярного произведения (см. теорему 3.2(3)).

2. Предварительные сведения. Обозначим *нижний центральный ряд* алгебры Ли $\mathfrak{n}$ символами $C^0\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ и $C^{j+1}\mathfrak{n} = [\mathfrak{n}, C^j\mathfrak{n}]$, $j \in \mathbb{N}$. Алгебра Ли $\mathfrak{n}$ называется *k-ступенно нильпотентной*, если $C^k\mathfrak{n} = \{0\}$, но $C^{k-1}\mathfrak{n} \neq \{0\}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$; n -мерная алгебра Ли $\mathfrak{n}$ называется *филиформной*, если она $(n-1)$ -ступенно нильпотентна. Филиформная алгебра Ли $\mathfrak{n}$ называется *стандартно филиформной*, если она обладает таким базисом $\{F_1, \dots, F_n\}$, что нетривиальные скобки Ли имеют вид

$$[F_1, F_i] = F_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Изучаются *нильпотентные алгебры Ли размерности ≤ 5 класса нильпотентности > 2* , не являющиеся прямыми суммами алгебр Ли более низких размерностей. С точностью до изоморфизма эти неразложимые алгебры Ли заданы следующими нетривиальными коммутаторами в базисе $\{F_1, F_2, \dots\}$ (см. [5, с. 646-647]):

Трехступенно нильпотентные алгебры Ли:

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_{4,3} : \quad & [F_1, F_2] = F_3, \quad [F_1, F_3] = F_4; \\ \mathfrak{l}_{5,5} : \quad & [F_1, F_2] = F_4, \quad [F_1, F_4] = F_5, \quad [F_2, F_3] = F_5; \\ \mathfrak{l}_{5,9} : \quad & [F_1, F_2] = F_3, \quad [F_1, F_3] = F_4, \quad [F_2, F_3] = F_5, \end{aligned} \tag{2.1}$$

Четырехступенно нильпотентные алгебры Ли:

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_{5,6} : \quad & [F_1, F_2] = F_3, \quad [F_1, F_3] = F_4, \quad [F_1, F_4] = F_5, \quad [F_2, F_3] = F_5; \\ \mathfrak{l}_{5,7} : \quad & [F_1, F_2] = F_3, \quad [F_1, F_3] = F_4, \quad [F_1, F_4] = F_5. \end{aligned}$$

Говорят, что d -мерная нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{n}$ является N -градуированной, если ее можно разложить в прямую сумму одномерных подпространств

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{i=1}^n V_i, \quad [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N},$$

где предполагается, что $V_i = 0$ при $i > d$. Говорят, что $\mathfrak{n}$ имеет адаптированный базис $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_d\}$ относительно градуировки, если любой вектор этого базиса X_k лежит в некотором V_i . Алгебры Ли, перечисленные в (2.1), кроме трехступенно нильпотентной нефилиформной алгебры Ли $\mathfrak{l}_{5,5}$ с одномерным центром, являются N -градуированно нильпотентными алгебрами Ли с адаптированным базисом $\{F_1, F_2, \dots\}$.

Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — это алгебра Ли $\mathfrak{g}$, наделенная евклидовым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$. Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$ естественным образом индуцирует левоинвариантную риманову метрику на связной односвязной группе Ли G . Связная подгруппа Ли H нильпотентной группы Ли G с левоинвариантной римановой метрикой (нильногообразие) играет важную роль в левых смежных классах H , определяя вполне геодезическое расслоение на G . Подгруппа H является вполне геодезическим римановым подмногообразием G , и соответствующая подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ называется *вполне геодезической подалгеброй* $\mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ называется *плоской*, если соответствующая подгруппа Ли является плоской как риманово подмногообразие G . Ненулевой вектор $X \in \mathfrak{g}$ называется геодезическим, если порожденная подалгебра $\{tX; t \in \mathbb{R}\}$ является вполне геодезической. В [1, лемма 1.2, замечание 1.4] приведена следующая чисто алгебраическая формулировка условия вполне геодезической подалгебры.

Лемма 2.1. *Подалгебра $\mathfrak{h}$ метрической алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ является вполне геодезической тогда и только тогда, когда соотношение*

$$\langle [X, Y], Z \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle = 0$$

выполняется для всех $Y, Z \in \mathfrak{h}$ и для всех X из ортогонального дополнения $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Ненулевой вектор $Y \in \mathfrak{g}$ является геодезическим в точности тогда, когда $\langle [X, Y], Y \rangle = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Следующие результаты доказаны в [9, леммы 1, 2]; и они будут использованы ниже для определения плоских вполне геодезических подалгебр.

Лемма 2.2. *Подалгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентной метрической алгебры Ли $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ является плоской тогда и только тогда, когда она абелева. Подалгебра $\mathfrak{h}$ в $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ является плоской вполне геодезической в точности тогда, когда каждый ненулевой элемент $\mathfrak{h}$ является геодезическим.*

Пусть $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — k -ступенно нильпотентная метрическая неразложимая алгебра Ли. Тогда центр $\mathfrak{z}$ является собственной подалгеброй идеала $\mathcal{C}^{k-2}\mathfrak{n}$. Пусть $\mathfrak{a}_{k-1}$ — ортогональное дополнение центра $\mathfrak{z}$ в $\mathcal{C}^{k-2}\mathfrak{n}$, т.е.

$$\mathcal{C}^{k-2}\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_{k-1} \oplus \mathfrak{z}, \quad \mathcal{C}^{k-1}\mathfrak{n} = [\mathcal{C}^{k-2}\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{a}_{k-1}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{z}.$$

Обозначим через $\mathfrak{a}_j$ ортогональное дополнение $\mathcal{C}^j\mathfrak{n}$ в $\mathcal{C}^{j-1}\mathfrak{n}$, $j = 1, 2, \dots, k-2$, т.е.

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{j=1}^{k-1} \mathfrak{a}_j \oplus \mathfrak{z}.$$

Имеем $[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{n}] \subseteq \mathcal{C}^j\mathfrak{n}$ и при $i < j$ имеем $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] \subseteq \mathcal{C}^j\mathfrak{n}$.

Предложение 2.3. *Ненулевой вектор*

$$Y = \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z \in \bigoplus_{j=1}^{k-1} \mathfrak{a}_j \oplus \mathfrak{z}$$

в k -ступенно нильпотентной метрической неразложимой алгебре Ли $\mathfrak{n}$ является геодезическим тогда и только тогда, когда

$$\left\langle \left[X, \sum_{j=1}^{k-1} A_j \right], \sum_{j=2}^{k-1} A_j + Z \right\rangle = 0$$

для всех $X \in \mathfrak{n}$.

Доказательство. Вектор

$$Y = \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z, \quad A_j \in \mathfrak{a}_j, \quad Z \in \mathfrak{z}$$

является геодезическим тогда и только тогда, когда

$$\left\langle \left[X, \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z \right], \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z \right\rangle = \left\langle \left[X, \sum_{j=1}^{k-1} A_j \right], \sum_{j=1}^{k-1} A_j + Z \right\rangle = \left\langle \left[X, \sum_{j=1}^{k-1} A_j \right], \sum_{j=2}^{k-1} A_j + Z \right\rangle,$$

поскольку $Z \in \mathfrak{z}$,

$$\left[X, \sum_{j=1}^{k-1} A_j \right] \in \mathcal{C}^1 \mathfrak{n}$$

и $A_1 \in (\mathcal{C}^1 \mathfrak{n})^\perp$. Это доказывает утверждение. $\square$

Следствие 2.4.

- (а) Векторы из $\bigcup_{j=1}^{k-1} \mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{z}$ являются геодезическими векторами k -ступенно нильпотентной метрической алгебры Ли $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
- (б) Любая подалгебра k -ступенно нильпотентной метрической алгебры Ли $\mathfrak{n}$, содержащаяся в $\bigcup_{j=1}^{k-1} \mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{z}$, является плоской вполне геодезической.

Доказательство. Утверждение (а) следует из условия, что ненулевой вектор $Y \in \mathfrak{n}$ является геодезическим (см. лемму 2.1). Условие (б) следует из условия (а) и второго условия леммы 2.2. $\square$

Предложение 2.5.

- (а) Не существует геодезического вектора вида $Y = A_{k+1} + Z$, $0 \neq A_{k+1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ тогда и только тогда, когда $\text{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{z}$ для всех $0 \neq A_{k+1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$.
- (б) Не существует геодезического вектора вида $Y = A_j + Z$, $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \dots, k-2$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{z} \subset \text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$ для всех $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \dots, k-2$.
- (с) Не существует геодезического вектора вида $Y = A_j + A_{j+1}$, $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \dots, k-2$, $0 \neq A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$ тогда и только тогда, когда $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})|_{\mathfrak{a}_{j+1}} = \mathfrak{a}_{j+1}$ для всех $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $j = 1, \dots, k-2$.
- (д) Вектор $Y = A_1 + A_2 + Z$, $0 \neq A_1 \in \mathfrak{a}_1$, $0 \neq A_2 \in \mathfrak{a}_2$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ является геодезическим в трехступенно нильпотентной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}$ тогда и только тогда, когда

$$\langle [X, A_1]|_{\mathfrak{a}_2}, A_2 \rangle + \langle [X, A_1 + A_2]_{\mathfrak{z}}, Z \rangle = 0 \quad X \in \mathfrak{n}.$$

Доказательство. Если $Y = A_{k-1} + Z$ — геодезический вектор с ненулевыми компонентами $A_{k-1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$, $Z \in \mathfrak{z}$, то для всех $X \in \mathfrak{n}$ имеем:

$$\langle [X, A_{k-1} + Z], A_{k-1} + Z \rangle = \langle [X, A_{k-1}], Z \rangle = 0,$$

так как $[X, A_{k-1}] \in \mathfrak{z}$. Следовательно, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ ортогонален к $\text{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n})$. Отсюда следует, что $\text{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{z}$. Наоборот, если $\text{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{z}$, причем $0 \neq A_{k-1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$, то существует $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$,

ортогональный к $\text{ad}_{A_{k-1}}(\mathfrak{n})$. В этом случае вектор $A_{k-1} + Z$, $0 \neq A_{k-1} \in \mathfrak{a}_{k-1}$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$, удовлетворяет условию

$$\langle [X, A_{k-1}], Z \rangle = \langle [X, A_{k-1} + Z], A_{k-1} + Z \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{n}.$$

Поэтому $A_{k-1} + Z$ — геодезический вектор. Это доказывает утверждение (а).

Пусть $Y = A_j + Z$ — геодезический вектор с ненулевыми компонентами $A_j \in \mathfrak{a}_j$, $Z \in \mathfrak{z}$. Тогда для всех $X \in \mathfrak{n}$ имеем

$$\langle [X, A_j + Z], A_j + Z \rangle = \langle [X, A_j], Z \rangle = 0,$$

так как $[X, A_j]$ ортогонален к $A_j \in \mathfrak{a}_j$. Поэтому $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$ ортогонален к $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$. В этом случае $\mathfrak{z}$ не содержится в $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$. Наоборот, если $\mathfrak{z}$ не содержится в $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$, то существует вектор $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$, ортогональный к $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$. В этом случае вектор $A_j + Z$, $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $0 \neq Z \in \mathfrak{z}$, удовлетворяет условию

$$\langle [X, A_j], Z \rangle = \langle [X, A_j + Z], A_j + Z \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{n}.$$

Следовательно, вектор $A_j + Z$ геодезический. Отсюда следует утверждение (b).

Если $Y = A_j + A_{j+1}$ — геодезический вектор с ненулевыми компонентами $A_j \in \mathfrak{a}_j$, $A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$, $j = 1, \dots, k-2$, то для всех $X \in \mathfrak{n}$ имеем

$$\langle [X, A_j + A_{j+1}], A_j + A_{j+1} \rangle = \langle [X, A_j + A_{j+1}]|_{\mathfrak{a}_{j+1}}, A_{j+1} \rangle = \langle [X, A_j]|_{\mathfrak{a}_{j+1}}, A_{j+1} \rangle = 0,$$

так как $[X, A_{j+1}] \in \mathcal{C}^{j+1}\mathfrak{n}$ и

$$[X, A_j] = [X, A_j]|_{\mathfrak{a}_{j+1}} + [X, A_j]|_{\mathcal{C}^{j+1}\mathfrak{n}} \in \mathfrak{a}_{j+1} \oplus \mathcal{C}^{j+1}\mathfrak{n}.$$

Поэтому $0 \neq A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$ ортогонален к проекции $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})|_{\mathfrak{a}_{j+1}}$ из $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})$ на подпространство $\mathfrak{a}_{j+1}$. В этом случае имеем $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})|_{\mathfrak{a}_{j+1}} \neq \mathfrak{a}_{j+1}$. Наоборот, если

$$\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})|_{\mathfrak{a}_{j+1}} \neq \mathfrak{a}_{j+1}, \quad 0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j,$$

то существует вектор $0 \neq A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$, ортогональный к $\text{ad}_{A_j}(\mathfrak{n})|_{\mathfrak{a}_{j+1}}$. В этом случае вектор $A_j + A_{j+1}$, $0 \neq A_j \in \mathfrak{a}_j$, $0 \neq A_{j+1} \in \mathfrak{a}_{j+1}$, удовлетворяет условию

$$\langle [X, A_j]|_{\mathfrak{a}_{j+1}}, A_{j+1} \rangle = \langle [X, A_j + A_{j+1}], A_j + A_{j+1} \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{n}.$$

Поэтому $A_j + A_{j+1}$ является геодезическим, и утверждение (с) доказано.

Вектор $Y = A_1 + A_2 + Z$ является геодезическим вектором с ненулевыми компонентами $A_1 \in \mathfrak{a}_1$, $A_2 \in \mathfrak{a}_2$, $Z \in \mathfrak{z}$ тогда и только тогда, когда для всех $X \in \mathfrak{n}$ имеем

$$\begin{aligned} \langle [X, A_1 + A_2], A_2 + Z \rangle &= \langle [X, A_1 + A_2]|_{\mathfrak{a}_2} + [X, A_1 + A_2]|_{\mathfrak{z}}, A_2 + Z \rangle = \\ &= \langle [X, A_1]|_{\mathfrak{a}_2}, A_2 \rangle + \langle [X, A_1 + A_2]|_{\mathfrak{z}}, Z \rangle = 0. \end{aligned}$$

Это доказывает утверждение (d). $\square$

3. Геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в трехступенно нильпотентных нефилиформных метрических алгебрах Ли. Если метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ имеет ортонормированный базис $\{E_1, \dots, E_n\}$, то критерий того, чтобы вектор $Y = \sum_{i=1}^n a_i E_i$ является геодезическим, квадратичен по коэффициентам a_i . Следовательно, множество геодезических является вещественным полуалгебраическим многообразием. Сначала рассмотрим трехступенно нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{l}_{5,5}$, имеющую одномерный центр. Эта алгебра Ли не является $\mathbb{N}$ -градуированной. Докажем, что геодезические векторы и вполне геодезические подалгебры имеют один и тот же вид в метрических алгебрах Ли $(\mathfrak{l}_{5,5}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ для произвольного скалярного произведения.

Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{5,5}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ изометрически изоморфна единственной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{5,5}(a, b, c, d, f)$, где $a, d, f > 0$, $b, c \geq 0$, определенной на пятимерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5$ с помощью неисчезающих коммутаторов

$$[E_1, E_2] = aE_4 + bE_5, \quad [E_1, E_3] = cE_5, \quad [E_1, E_4] = dE_5, \quad [E_2, E_3] = fE_5 \quad (3.1)$$

(см. [4, теорема 11(1)]).

Теорема 3.1.

- (1) Геодезические векторы из $\mathfrak{n}_{5,5}(a, b, c, d, f)$, не принадлежащие $\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 \cup \mathfrak{z}$, являются векторами из множества $S = \{\gamma E_3 + \varepsilon E_4; \gamma \neq 0\}$.
- (2) Двумерная подалгебра $\text{Span}(E_3, E_4)$ является плоской вполне геодезической подалгеброй размерности > 1 в $\mathfrak{n}_{5,5}(a, b, c, d, f)$.

Геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в метрических алгебрах Ли $(\mathfrak{l}_{5,5}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ не зависят от выбора скалярного произведения на $\mathfrak{l}_{5,5}$.

Доказательство. Вектор

$$Y = A + B + Z \in \mathfrak{n}_{5,5}(a, b, c, d, f), \quad A = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 \in \mathfrak{a}_1, \quad B = \varepsilon E_4 \in \mathfrak{a}_2, \quad Z = \delta E_5 \in \mathfrak{z},$$

является геодезическим тогда и только тогда, когда для всех

$$X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i \in \mathfrak{n}_{5,5}(a, b, c, d, f), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

имеем

$$\langle [X, A + B], B + Z \rangle = 0$$

(см. предложение 2.3). Это происходит в точности тогда, когда для всех $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \left\langle [x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4, \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 + \varepsilon E_4], \varepsilon E_4 + \delta E_5 \right\rangle = \\ & = \left\langle (x_1 \beta - x_2 \alpha)(a E_4 + b E_5), \varepsilon E_4 + \delta E_5 \right\rangle + \\ & \quad + \left\langle ((x_1 \gamma - x_3 \alpha)c + (x_1 \varepsilon - x_4 \alpha)d + (x_2 \gamma - x_3 \beta)f)E_5, \varepsilon E_4 + \delta E_5 \right\rangle = \\ & = (x_1 \beta - x_2 \alpha)(a \varepsilon + b \delta) + (x_1 \gamma - x_3 \alpha)c \delta + (x_1 \varepsilon - x_4 \alpha)d \delta + (x_2 \gamma - x_3 \beta)f \delta = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как $a, d, f > 0$, уравнение (3.2) сводится к следующей системе уравнений:

$$\alpha \delta = 0 = \beta \delta, \quad \delta(\gamma f - \alpha b) - \alpha a \varepsilon = 0, \quad \delta(\gamma c + \varepsilon d) + \beta a \varepsilon = 0. \quad (3.3)$$

Из первого уравнения в (3.3) следует, что либо $\delta = 0$, либо $\alpha = 0 = \beta$. Если $\delta = 0$, то из второго и третьего уравнений в (3.3) следует, что $\alpha a \varepsilon = 0 = a \beta \varepsilon$. Поскольку $a > 0$, имеем $\varepsilon = 0$ или $\alpha = 0 = \beta$. Если $\delta = 0 = \varepsilon$, то любой геодезический вектор принадлежит $\mathfrak{a}_1$. Если $\delta = 0 = \alpha = \beta$, то вектор $Y = A + B \in \mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2$ является геодезическим тогда и только тогда, когда $A + B = \gamma E_3 + \varepsilon E_4$, $\gamma \neq 0$.

Пусть $\alpha = 0 = \beta$. Так как $d > 0$, $f > 0$, из второго и третьего уравнений в (3.3) следует, что $\delta \gamma = 0 = \delta \varepsilon$. Следовательно, либо $\delta = 0$, либо $\gamma = 0 = \varepsilon$. Случай $\delta = 0$ обсуждался выше. Если $\gamma = 0 = \varepsilon = \alpha = \beta$, то любой геодезический вектор лежит в $\mathfrak{z}$. Это доказывает первое утверждение.

Подпространство $\mathfrak{a}_1 = \langle E_1, E_2, E_3 \rangle$ не имеет двумерной абелевой подалгебры. Любая абелева подалгебра нильпотентной метрической алгебры Ли $\mathfrak{n}_{5,5}(a, b, c, d, f)$ такова, что ее ненулевые элементы являются элементами множества S из предложения 3.1(1), является двумерной подалгеброй $\text{Span}(E_3, E_4)$. $\square$

Теперь рассмотрим трехступенно нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{l}_{5,9}$, имеющую двумерный центр. Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{5,9}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ изометрически изоморфна единственной $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q)$, где $l > 0$, $q > p > 0$ и $m, n \geq 0$, или единственной $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, m, p) = \mathfrak{n}_{5,9}(l, m, 0, p, p)$, где $l, p > 0$, $m \geq 0$, определяется с помощью

$$[E_1, E_2] = l E_3 + m E_4 + n E_5, \quad [E_1, E_3] = p E_4, \quad [E_2, E_3] = q E_5, \quad (3.4)$$

где $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ — ортонормированный базис в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{E}^5$ (см. [4, теорема 14(1)]). Метрические алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, m, p)$ играют особую роль. Среди флиформных нильмногообразий и пятимерных недвуступенных нильмногообразий только нильмногообразия, соответствующие метрическим алгебрам Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, 0, p)$, $l, p > 0$, имеют группы изометрии большей размерности как нильмногообразие (см. [4, теорема 14(2)]). Теперь покажем,

что плоские вполне геодезические подалгебры метрических алгебр Ли $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, p)$ не зависят от выбора скалярного произведения.

Теорема 3.2.

- (1) Геодезические векторы в нильпотентной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q)$, не принадлежащие $\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 \cup \mathfrak{z}$, являются ненулевыми векторами из следующих множеств:

$$C_1 = \{bE_2 + cE_3 + dE_4 : lbc + mbd + pcd = 0\}, \quad (3.5)$$

$$C_2 = \{aE_1 + cE_3 + eE_5 : -lac - nae + qce = 0\}, \quad (3.6)$$

$$C_3 = \{aE_1 + bE_2 + dE_4 + eE_5 : adp = -beq\}; \quad (3.7)$$

в случаях $m = n = 0$ или $mn \neq 0$,

$$C_4 = \left\{ \frac{c}{cl + en + dm} (eqE_1 - dpE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0 \right\}. \quad (3.8)$$

Геодезические векторы в нильпотентной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, p)$, не принадлежащие $\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 \cup \mathfrak{z}$, составляют те же самые множества C_1, C_2, C_3, C_4 , где $p = q, n = 0$.

- (2) Плоские вполне геодезические подалгебры размерности >1 в метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q)$ имеют размерность 2. Это следующие подалгебры: $\text{Span}(E_1, E_5)$ в случае $n = 0$; $\text{Span}(E_2, E_4)$ в случае $m = 0$; $\text{Span}\left(E_2 + \frac{qs}{p}E_1, E_5 - \frac{1}{s}E_4\right)$, где $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ в случае $m = n = 0$ и $s = m/n$ в случае $mn \neq 0$, и центр $\mathfrak{z} = \text{Span}(E_4, E_5)$.
- (3) Плоские вполне геодезические подалгебры размерности >1 в метрических алгебрах Ли $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, p)$ не зависят от параметров l, m, p классов эквивалентности с точностью до изоморфизмов. Эти подалгебры следующие: $\text{Span}(E_2, E_4)$ и $\text{Span}\left(E_2 + sE_1, E_5 - \frac{1}{s}E_4\right)$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, в случае $m = 0$, $\text{Span}(E_1, E_5)$ и центр $\mathfrak{z} = \text{Span}(E_4, E_5)$.

Доказательство. Вектор $Y = A + B + Z$, где $A = aE_1 + bE_2 \in \mathfrak{a}_1$, $B = cE_3 \in \mathfrak{a}_2$, $Z = dE_4 + eE_5 \in \mathfrak{z}$, является геодезическим в метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q)$ тогда и только тогда, когда для всех

$$X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i \in \mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

имеем

$$\langle [X, A + B], B + Z \rangle = 0$$

(см. предложение 2.3) или, эквивалентно, для всех $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ выполняется уравнение

$$\begin{aligned} & \left\langle [x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3, aE_1 + bE_2 + cE_3], cE_3 + dE_4 + eE_5 \right\rangle = \\ & = \left\langle (x_1 b - x_2 a)(lE_3 + mE_4 + nE_5), cE_3 + dE_4 + eE_5 \right\rangle + \\ & \quad + \left\langle (x_1 c - x_3 a)pE_4 + (x_2 c - x_3 b)qE_5, cE_3 + dE_4 + eE_5 \right\rangle = \\ & = (x_1 b - x_2 a)(lc + md + ne) + (x_2 c - x_3 b)qe + (x_1 c - x_3 a)pd = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.9) вытекает система уравнений

$$cdp + b(lc + dm + en) = 0, \quad (3.10)$$

$$ceq - a(lc + dm + en) = 0, \quad (3.11)$$

$$adp + beq = 0. \quad (3.12)$$

Так как $q > p > 0$, из (3.12) получим $be = -adp/q$ и поэтому из $ad = 0$ следует, что $be = 0$. Подставляя выражение be в (3.10) и принимая во внимание (3.11), получим следующую систему уравнений:

$$bcl + bdm + cdp - \frac{adpn}{q} = 0, \quad -acl - adm - aen + ceq = 0. \quad (3.13)$$

Если $a = b = 0$, то из (3.13) следует $cd = ce = 0$, и геодезический вектор Y принадлежит $\mathfrak{a}_2$ или $\mathfrak{z}$. Если $d = e = 0$, то получим $ac = bc = 0$, так как $l > 0$ и геодезический вектор Y принадлежит $\mathfrak{a}_1$ или $\mathfrak{a}_2$. Предположим, что $a = e = 0$. В этом случае геодезические векторы в $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q)$ и в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, m, p)$ — это ненулевые векторы конуса $C_1 = \{bE_2 + cE_3 + dE_4 : lbc + mbd + pcd = 0\}$. Кроме того, в $\mathfrak{n}_{5,9}(l, 0, n, p, q)$ и в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, 0, p)$ имеется двумерная плоская вполне геодезическая подалгебра $\mathfrak{h} = \text{Span}(E_2, E_4)$. Аналогично, если $b = d = 0$, то геодезические векторы в $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q)$ — это ненулевые векторы конуса $C_2 = \{aE_1 + cE_3 + eE_5 : -lac - nae + qce = 0\}$. При $b = d = 0$ геодезические векторы в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, m, p)$ — это такие ненулевые векторы из C_2 , что $n = 0, q = p$. Более того, в $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, 0, p, q)$ и в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, m, p)$ имеется двумерная плоская вполне геодезическая подалгебра $\mathfrak{h} = \text{Span}(E_1, E_5)$.

Если $ad \neq 0$, то имеем $be \neq 0$. Сначала предположим, что $m = n = 0$. В этом случае уравнения (3.13) сводятся к уравнениям

$$c(lb + dp) = 0, \quad c(eq - la) = 0. \quad (3.14)$$

Если $c = 0$, то геодезические векторы в $\mathfrak{n}_{5,9}(l, 0, 0, p, q)$ — это ненулевые элементы множества

$$C_3 = \{aE_1 + bE_2 + dE_4 + eE_5 : adp = -beq\} \subseteq \text{Span}(E_1, E_2, E_4, E_5). \quad (3.15)$$

Тогда не существует никакой трехмерной плоской вполне геодезической подалгебры $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{n}_{5,9}(l, 0, 0, p, q)$, однако существуют две двумерные плоские вполне геодезические подалгебры: $\mathfrak{h} = \text{Span}\left(E_2 + \frac{qs}{p}E_1, E_5 - \frac{1}{s}E_4\right)$ и $\mathfrak{z}$. Если $c \neq 0$, то из (3.14) получаем $a = eq/l, b = -dp/l$, и геодезические векторы из $\mathfrak{n}_{5,9}(l, 0, 0, p, q)$ — это векторы множества

$$\left\{ \frac{eq}{l}E_1 - \frac{dp}{l}E_2 + cE_3 + dE_4 + eE_5 : c \neq 0, d, e \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.16)$$

Тогда не существует плоских вполне геодезических подалгебр $\mathfrak{h}$ размерности ≥ 2 в $\mathfrak{n}_{5,9}(l, 0, 0, p, q)$. Для алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, 0, p)$ геодезические векторы — это ненулевые элементы множества, заданного с помощью (3.15) и (3.16) с $p = q$, а плоские вполне геодезические подалгебры — это $\mathfrak{h} = \text{Span}\left(E_2 + sE_1, E_5 - \frac{1}{s}E_4\right)$ и $\mathfrak{z}$.

Пусть $m = 0, n > 0$. В этом случае уравнения (3.13) принимают вид

$$c(lb + dp) - \frac{adpn}{q} = 0, \quad ceq = a(cl + en). \quad (3.17)$$

Так как $ad \neq 0$, имеем $c \neq 0$. Поскольку $be \neq 0$, имеем $ceq \neq 0$ и поэтому $cl + en \neq 0$. Из (3.17) получаем

$$a = \frac{ceq}{cl + en}, \quad b = -\frac{cdp}{cl + en}.$$

Тогда геодезические векторы из $\mathfrak{n}_{5,9}(l, 0, n, p, q)$ имеют вид

$$Y = \frac{c}{cl + en}(eqE_1 - dpE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0. \quad (3.18)$$

При $n = 0$ уравнение (3.18) дает (3.16). Если $p = q$, получим, что векторы

$$Y = \frac{cp}{cl + en}(eE_1 - dE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0,$$

являются геодезическими в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, 0, p)$.

Случай $n = 0, m > 0$ рассматривается аналогично. Получаем, что геодезические векторы в $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, 0, p, q)$ имеют вид

$$Y = \frac{c}{cl + dm}(eqE_1 - dpE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0. \quad (3.19)$$

При $m = 0$ из уравнения (3.19) следует (3.16). При $p = q$ получим, что векторы

$$Y = \frac{cp}{cl + dm}(eE_1 - dE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0,$$

являются геодезическими в $\tilde{\mathfrak{n}}_{5,9}(l, m, p)$.

Наконец, можем предположить, что $m, n > 0$. Тогда из первого уравнения в (3.13) имеем

$$a = \frac{(bcl + cdp + bdm)q}{dpn}.$$

Так как $be = -adp/q \neq 0$, получим

$$eb = -\frac{bcl + cdp + bdm}{n}. \quad (3.20)$$

Из (3.20) имеем $b(en + dm + cl) = -cdp$. Если $en + dm + cl = 0$, то получим $c = 0$. Отсюда следует, что $en + dm = 0$, или, эквивалентно, $e/d = -m/n$. В этом случае из (3.20) следует, что b — произвольное вещественное число и

$$a = -\frac{bqe}{pd} = \frac{bqm}{pn}.$$

Следовательно, геодезические векторы

$$Y = \frac{bqm}{np}E_1 + bE_2 - \frac{en}{m}E_4 + eE_5, \quad b, e \in \mathbb{R},$$

из $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q)$ принадлежат множеству C_3 из (3.15). Эти геодезические векторы образуют двумерную плоскую вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h} = \text{Span}\left(E_2 + \frac{qm}{np}E_1, E_5 - \frac{n}{m}E_4\right)$. Предположим, что $en + dm + cl \neq 0$. В этом случае имеем

$$b = -\frac{cdp}{en + dm + cl}, \quad a = \frac{ceq}{en + dm + cl},$$

и геодезические векторы из $\mathfrak{n}_{5,9}(l, m, n, p, q)$ имеют вид

$$Y = \frac{c}{cl + en + dm}(eqE_1 - dpE_2) + cE_3 + dE_4 + eE_5, \quad cde \neq 0. \quad (3.21)$$

Если $n = 0$, то получим (3.19); если $m = 0$, то получим (3.18); если $m = n = 0$, то получим (3.16). Это доказывает утверждение теоремы. $\square$

4. Геодезические векторы и плоские вполне геодезические подалгебры в филиформных нильпотентных метрических алгебрах Ли. В списке (2.1) алгебры Ли $\mathfrak{l}_{4,3}$ и $\mathfrak{l}_{5,7}$ — стандартные филиформные, в то время как $\mathfrak{l}_{5,6}$ — наименьшая нестандартная филиформная алгебра Ли.

Ж. Лоре в [7] определил с точностью до изометрии четырехмерные однородные многообразия, принадлежащие алгебре Ли $\mathfrak{l}_{4,3}$. Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{4,3}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ изометрически изоморфна единственной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(\kappa, \lambda, \mu)}$ с $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\kappa, \mu > 0$, $\lambda \geq 0$, определенной с помощью нетривиальных коммутаторов $[E_1, E_2] = \kappa E_3 + \lambda E_4$, $[E_1, E_3] = \mu E_4$, где $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ — выделенный ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ (см. [4, замечание 2]). Дж. Кейрнс, А. Хинич Галич и Ю. Николаевский доказали, что множество геодезических векторов в $\mathfrak{n}_{(\kappa, \lambda, \mu)}$ — это множество ненулевых векторов в объединении подпространства $\mathfrak{a}_1$ и конуса $\{xE_2 + yE_3 + zE_4; \kappa xy + \lambda xz + \mu yz = 0\} \subseteq \text{Span}(E_2, E_3, E_4)$. Более того, если $\mathfrak{n}_{(\kappa, \lambda, \mu)}$ имеет двумерную вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}$, то $\lambda = 0$, и в этом случае либо $\mathfrak{h} = \text{Span}(E_2, E_4)$, либо $\mathfrak{h} = \text{Span}(\kappa E_4 - \mu E_2, E_3)$ (см. [1, предложение 1.12]).

Метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{5,7}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, соответственно, $(\mathfrak{l}_{5,6}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, изометрически изоморфна единственной метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}(a, b, c, d, f, g, h)$, определенной с помощью

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= aE_3 + bE_4 + cE_5, & [E_1, E_3] &= dE_4 + fE_5, \\ [E_1, E_4] &= gE_5, & [E_2, E_3] &= hE_5, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ — выделенный ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5$, и для вещественных параметров a, b, c, d, f, g, h имеем $a, d, g > 0$ и либо $b > 0$, либо $b = 0, f \geq 0$. Кроме того, имеем $h = 0$ в случае $\mathfrak{l}_{5,7}$, в то время как $h > 0$ в случае $\mathfrak{l}_{5,6}$ (см. [4, замечание 3, теорема 9]). Мы утверждаем, что на самом деле метрические алгебры Ли $(\mathfrak{l}_{5,7}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ и $(\mathfrak{l}_{5,6}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

имеют одну и ту же структуру геодезических векторов и вполне геодезических подалгебр, что и метрическая алгебра Ли $(\mathfrak{l}_{4,3}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Предложение 4.1.

- (1) Множество геодезических векторов в метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}(a, b, c, d, f, g, h)$ — это множество ненулевых векторов из объединения подпространства $\mathfrak{a}_1 = \text{Span}(E_1, E_2)$, конуса

$$C = B \left\{ \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4; \alpha_2 \alpha_3 a + \alpha_2 \alpha_4 b + \alpha_3 \alpha_4 d = 0 \right\} \subseteq \text{Span}(E_2, E_3, E_4)$$

и центра $\mathfrak{z} = \text{Span}(E_5)$. Если $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ имеет двумерную вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}$, то имеем $b = 0$, и в этом случае либо $\mathfrak{h} = \text{Span}(E_2, E_4)$, либо $\mathfrak{h} = \text{Span}(E_3, dE_2 - aE_4)$.

- (2) Множество геодезических векторов в метрической алгебре Ли $\mathfrak{n}(a, b, c, d, f, g)$ — это множество ненулевых векторов из объединения подпространства $\mathfrak{a}_1 = \text{Span}(E_1, E_2)$ и конуса

$$S = \left\{ \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5; \alpha_2 \alpha_3 a + \alpha_2 \alpha_4 b + \alpha_3 \alpha_4 d + \right. \\ \left. + \alpha_2 \alpha_5 c + \alpha_3 \alpha_5 f + \alpha_4 \alpha_5 g = 0 \right\} \subseteq \text{Span}(E_2, E_3, E_4, E_5).$$

Если $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ имеет трехмерную вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}$, то имеем $b = 0 = f$, $c = ag/d$, и в этом случае либо $\mathfrak{h} = \text{Span}(E_2, cE_3 - aE_5, E_4)$, либо $\mathfrak{h} = \text{Span}(gE_2 - cE_4, E_3, E_5)$. Перечислим двумерные плоские вполне геодезические алгебры для $\mathfrak{n}(a, b, c, d, f, g)$.

$B \mathfrak{n}_{(a,b,c,d,0,g)}$:

$$\mathfrak{h}_1 = \text{Span}(E_3, E_5), \quad \mathfrak{h}_2 = \text{Span}(gE_3 - dE_5, E_4), \quad (4.2)$$

$$\mathfrak{h}_3 = \text{Span} \left(E_2 - \frac{cl_1}{b + gl_1} E_4 + l_1 E_5, E_3 + \frac{cd - ag}{g(b + gl_1)} E_4 - \frac{d}{g} E_5 \right), \quad l_1 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{g} \right\}. \quad (4.3)$$

$B \mathfrak{n}_{(a,0,c,d,f,g)}$:

$$\mathfrak{h}_4 = \text{Span} \left(E_2 - \frac{a + cl_2}{d + l_2 g} E_4, E_3 - \frac{fl_2}{d + l_2 g} E_4 + l_2 E_5 \right), \quad l_2 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{g} \right\}, \quad (4.4)$$

$B \mathfrak{n}_{(a,0,ag/d,d,0,g)}$:

$$\mathfrak{h}_5 = \text{Span}(E_2 + k_1 E_4, gE_3 + gk_2 E_4 - dE_5), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

$B \mathfrak{n}_{(a,b,0,d,f,g)}$:

$$\mathfrak{h}_6 = \text{Span} \left(E_2 + \frac{fb - ag}{g(d + l_2 g)} E_4 - \frac{b}{g} E_5, E_3 - \frac{fl_2}{d + l_2 g} E_4 + l_2 E_5 \right), \quad l_2 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{g} \right\}, \quad (4.6)$$

$B \mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$:

$$\mathfrak{h}_7 = \text{Span}(gE_2 + gk_1 E_3 - (c + k_1 f) E_4, E_5), \quad (4.7)$$

где k_1 — решение уравнения $k_1^2 fd - k_1(ag - bf - cd) + bc = 0$,

$$\mathfrak{h}_8 = \text{Span}(dE_2 - (gm_1 + b) E_3 + dm_1 E_5, E_4), \quad (4.8)$$

где m_1 — решение уравнения $m_1^2 gf + m_1(ag + bf - cd) + ab = 0$,

$$\mathfrak{h}_9 = \text{Span} \left(E_2 - \frac{cl_1}{b + gl_1} E_4 + l_1 E_5, E_3 - \frac{fl_2}{d + gl_2} E_4 + l_2 E_5 \right), \quad (4.9)$$

где l_2 — решение уравнения

$$0 = b c g l_2^2 + l_2 (b c d + a b g - b^2 f + l_1 (a g^2 - c d g - b f g)) + a b d + \\ + l_1 (b d f + a d g - c d^2) + d g f l_1^2 \quad (4.10)$$

для данного l_1 .

Доказательство. Вектор

$$Y = A + B + C + Z, \quad A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 \in \mathfrak{a}_1, \quad B = \alpha_3 E_3 \in \mathfrak{a}_2, \quad C = \alpha_4 E_4 \in \mathfrak{a}_3, \quad Z = \alpha_5 E_5 \in \mathfrak{z}$$

является геодезическим в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ тогда и только тогда, когда

$$\langle [X, A + B + C], B + C + Z \rangle = 0 \quad \forall X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i \in \mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 5$$

(см. предложение 2.3). Поэтому уравнение

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\sum_{i=1}^4 x_i E_i, \sum_{j=1}^4 \alpha_j E_j \right], \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5 \right\rangle = \\ & = \left\langle (x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1)(a E_3 + b E_4 + c E_5), \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5 \right\rangle + \\ & \quad + \left\langle (x_1 \alpha_3 - x_3 \alpha_1)(d E_4 + f E_5), \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5 \right\rangle + \\ & \quad + \left\langle [(x_1 \alpha_4 - x_4 \alpha_1)g + (x_2 \alpha_3 - x_3 \alpha_2)h] E_5, \alpha_5 E_5 \right\rangle = \\ & = (x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1) \alpha_3 a + [(x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1)b + (x_1 \alpha_3 - x_3 \alpha_1)d] \alpha_4 + \\ & \quad + [(x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1)c + (x_1 \alpha_3 - x_3 \alpha_1)f + (x_1 \alpha_4 - x_4 \alpha_1)g + (x_2 \alpha_3 - x_3 \alpha_2)h] \alpha_5 = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

выполняется для всех $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Так как $g > 0$, уравнение (4.11) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\alpha_1 \alpha_5 = 0, \quad \alpha_1 \alpha_4 d + \alpha_2 \alpha_5 h = 0, \quad \alpha_1 \alpha_3 a + \alpha_1 \alpha_4 b - \alpha_3 \alpha_5 h = 0, \quad (4.12)$$

$$\alpha_2 \alpha_3 a + \alpha_2 \alpha_4 b + \alpha_3 \alpha_4 d + \alpha_2 \alpha_5 c + \alpha_3 \alpha_5 f + \alpha_4 \alpha_5 g = 0. \quad (4.13)$$

Пусть $h > 0$. При $a > 0, d > 0$ из (4.12), (4.13) получим следующее.

Случай 1: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \alpha_5 = 0 = \alpha_3 \alpha_5$ и выполняется тождество (4.13).

Случай 2: $\alpha_5 = 0, \alpha_1 \alpha_4 = 0 = \alpha_1 \alpha_3, \alpha_3(\alpha_2 a + \alpha_4 d) + \alpha_2 \alpha_4 b = 0$.

Если $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$, то в обоих случаях выполняется уравнение $\alpha_3(\alpha_2 a + \alpha_4 d) + \alpha_2 \alpha_4 b = 0$. В этом случае вектор является геодезическим в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ тогда и только тогда, когда он лежит в конусе

$$C = \left\{ \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4; \alpha_2 \alpha_3 a + \alpha_2 \alpha_4 b + \alpha_3 \alpha_4 d = 0 \right\}$$

в утверждении (1).

Если $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_5 \neq 0$, то из случая 1 получаем $\alpha_2 = \alpha_3 = 0 = \alpha_4$ и, следовательно, любой геодезический вектор Y принадлежит $\mathfrak{z}$.

Если $\alpha_5 = 0$ и $\alpha_1 \neq 0$, то из случая 2 получаем $\alpha_4 = 0 = \alpha_3$. Поэтому любой геодезический вектор Y лежит в $\mathfrak{a}_1$.

Филиформная нильпотентная метрическая алгебра Ли $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ не имеет вполне геодезической подалгебры коразмерности 1 (см. [1, предложение 1.13]). Так как $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g,h)}$ не изоморфна стандартной филиформной алгебре Ли $\mathfrak{l}_{5,7}$, она не имеет вполне геодезической подалгебры коразмерности 2 (см. [1, теорема 1.18]). Конус C имеет двумерную подалгебру $\mathfrak{h}$, если $b = 0$, и в этом случае либо $\mathfrak{h} = \text{Span}(E_2, E_4)$, либо $\mathfrak{h} = \text{Span}(E_3, dE_2 - aE_4)$. Двумерное подпространство $\mathfrak{a}_1$ не является подалгеброй. Это доказывает утверждение (1).

Пусть $h = 0$. Так как $a > 0, d > 0$, получаем из (4.12), (4.13) следующее.

Случай 1: $\alpha_1 = 0$ и выполняется тождество (4.13). В этом случае любой геодезический вектор в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ лежит в множестве

$$S = \left\{ \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5; \alpha_2 \alpha_3 a + \alpha_2 \alpha_4 b + \alpha_3 \alpha_4 d + \alpha_2 \alpha_5 c + \alpha_3 \alpha_5 f + \alpha_4 \alpha_5 g = 0 \right\}$$

в утверждении (2).

Случай 2: $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$. В этом случае любой геодезический вектор Y находится в $\mathfrak{a}_1$.

Так как $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ изоморфна стандартной филиформной алгебре Ли $\mathfrak{l}_{5,7}$ (см. [4, лемма 6, замечание 3]), любая вполне геодезическая подалгебра $\mathfrak{h}$ имеет коразмерность как минимум 2 (см. [1, теоремы 1.17, 1.18, предложение 1.13]). Если S имеет трехмерную вполне геодезическую подалгебру $\mathfrak{h}$, то получим $b = 0 = f$ и $c = ag/d$. В этом случае имеем либо $\mathfrak{h} = \text{Span}\left(E_2, E_3 - \frac{a}{c}E_5, E_4\right)$, либо $\mathfrak{h} = \text{Span}\left(E_2 - \frac{c}{g}E_4, E_3, E_5\right)$. Так как обе подалгебры абелевы, они являются плоскими вполне геодезическими подалгебрами.

Алгебра Ли $\mathfrak{l}_{5,7}$ является $\mathbb{N}$ -градуированной с адаптированным базисом $\mathcal{B} = \{F_i, i = 1, \dots, 5\}$. Можно ввести идеалы $\mathfrak{n}_i := \bigoplus_{j \geq i} E_j$, $i = 1, \dots, 5$, для $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$. При $Y \in \mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ степень $\deg(Y)$ вектора Y — это наибольшее натуральное число k , для которого $Y \in \mathfrak{n}_k$. Для любого $i \in \{1, \dots, 5\}$ имеем $\deg(E_i) = i$, $\text{Span}(E_k, \dots, E_5) = \mathfrak{n}_k$ и $[E_i, E_j] \in \mathfrak{n}_{i+j}$ для всех i, j . Теперь будем искать двумерные вполне геодезические подалгебры $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$. Поскольку каждый геодезический вектор удовлетворяет условию $\alpha_1 = 0$, имеем $E_1 \in \mathfrak{h}^\perp$ и $\mathfrak{h} \subset \text{Span}(E_2, \dots, E_5)$ (см. [2, лемма 3.2]). Поскольку $\text{Span}(E_2, \dots, E_5)$ абелева, любая вполне геодезическая подалгебра $\mathfrak{h}$ является плоской (см. лемму 2.2).

Невозможно, чтобы $\mathfrak{h}$ порождалась $Y_1 = E_4$ степени 4 и $Y_2 = E_5$ степени 5, потому что

$$0 = \langle [E_1, E_4], E_5 \rangle + \langle [E_1, E_5], E_4 \rangle = g > 0$$

(см. [2, лемма 3.2]).

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается векторами $Y_1 = E_3 + k_1 E_4$ степени 3 и $Y_2 = E_5$ степени 5 с некоторым $k_1 \in \mathbb{R}$. Так как

$$0 = 2\langle [E_1, E_3 + k_1 E_4], E_3 + k_1 E_4 \rangle = 2k_1 \langle [E_1, E_3], E_4 \rangle = 2k_1 d$$

и $d > 0$, получаем $k_1 = 0$. Так как $0 = \langle [E_1, E_3], E_5 \rangle + \langle [E_1, E_5], E_3 \rangle = f$, имеем $f = 0$.

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается векторами $Y_1 = E_3 + m_1 E_5$ степени 3 и $Y_2 = E_4 + m_2 E_5$ степени 4 с некоторыми $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Так как

$$0 = 2\langle [E_1, E_4 + m_2 E_5], E_4 + m_2 E_5 \rangle = 2m_2 \langle [E_1, E_4], E_5 \rangle = 2m_2 g$$

и $g > 0$, получаем $m_2 = 0$. Так как

$$0 = \langle [E_1, E_3 + m_1 E_5], E_4 \rangle + \langle [E_1, E_4], E_3 + m_1 E_5 \rangle = d + gm_1$$

и $d > 0$, имеем $m_1 = -d/g$. Более того, из соотношения

$$0 = 2\left\langle \left[E_1, E_3 - \frac{d}{g}E_5\right], E_3 - \frac{d}{g}E_5 \right\rangle = -2f \frac{d}{g}$$

следует, что $f = 0$. Поэтому в алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,0,g)}$ имеются вполне геодезические подалгебры, задаваемые (4.2).

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается $Y_1 = E_2 + k_1 E_3 + l_1 E_4$ степени 2 и $Y_2 = E_5$ степени 5 с $k_1, l_1 \in \mathbb{R}$. Так как

$$0 = \langle [E_1, E_2 + k_1 E_3 + l_1 E_4], E_5 \rangle + \langle [E_1, E_5], E_2 + k_1 E_3 + l_1 E_4 \rangle = c + k_1 f + l_1 g$$

и $g > 0$, получим $l_1 = -(c + k_1 f)/g$. Более того, имеем

$$0 = 2\langle [E_1, E_2 + k_1 E_3 + l_1 E_4], E_2 + k_1 E_3 + l_1 E_4 \rangle = 2(k_1 a + l_1 b + k_1 l_1 d). \quad (4.14)$$

Подставляя этот вид l_1 в (4.14), получим

$$-bc + k_1(ag - bf - cd) - k_1^2 fd = 0. \quad (4.15)$$

Тогда в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ имеется вполне геодезическая подалгебра, задаваемая (4.7), где k_1 — решение уравнения (4.15).

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается векторами $Y_1 = E_2 + k_1 E_3 + m_1 E_5$ степени 2 и $Y_2 = E_4 + m_2 E_5$ степени 4, где $k_1, m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Так как

$$0 = 2\langle [E_1, E_4 + m_2 E_5], E_4 + m_2 E_5 \rangle = 2gm_2$$

и $g > 0$, получим $m_2 = 0$. Так как

$$0 = \langle [E_1, E_4], E_2 + k_1 E_3 + m_1 E_5 \rangle + \langle [E_1, E_2 + k_1 E_3 + m_1 E_5], E_4 \rangle = gm_1 + b + k_1 d$$

и $d > 0$, имеем $k_1 = -(gm_1 + b)/d$. Так как

$$0 = 2\langle [E_1, E_2 + k_1 E_3 + m_1 E_5], E_2 + k_1 E_3 + m_1 E_5 \rangle = 2(ak_1 + cm_1 + k_1 fm_1),$$

получим, что m_1 является решением уравнения

$$0 = gfm_1^2 + m_1(ag + bf - cd) + ab. \quad (4.16)$$

Поэтому в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ имеется вполне геодезическая подалгебра, задаваемая (4.8), где m_1 — решение уравнения (4.16).

Предположим, что $\mathfrak{h}$ порождается векторами $Y_1 = E_2 + k_1 E_4 + l_1 E_5$ степени 2 и $Y_2 = E_3 + k_2 E_4 + l_2 E_5$ степени 3, где $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Так как

$$\langle [E_1, Y_i], Y_j \rangle + \langle [E_1, Y_j], Y_i \rangle = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2\},$$

имеем следующую систему уравнений:

$$dk_2 + (f + k_2g)l_2 = 0, dk_1 + (f + k_2g)l_1 + a + bk_2 + (c + k_1g)l_2 = 0, \quad bk_1 + (c + gk_1)l_1 = 0. \quad (4.17)$$

Пусть $l_2 = -d/g$. Тогда первое уравнение в (4.17) выполняется в точности тогда, когда $f = 0$. Таким образом, второе уравнение в (4.17) принимает вид

$$a - \frac{cd}{g} + k_2(gl_1 + b) = 0. \quad (4.18)$$

Если $l_1 = -b/g$, то из третьего уравнения в (4.17) следует или $c = 0$, или $l_1 = b = 0$. Равенство $c = 0$ невозможно, так как в этом случае из (4.18) следует $a = 0$. Если $l_1 = b = 0$, то из (4.18) получим $c = ag/d$. Следовательно, в алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(a,0,\frac{ag}{d},d,0,g)}$ имеется вполне геодезическая подалгебра, заданная (4.5).

Если $l_1 \neq -b/g$, то из третьего уравнения в (4.17) получим $k_1 = -(cl_1)/(b + gl_1)$, а из второго уравнения в (4.17) получим $k_2 = (cd - ag)/(g(b + gl_1))$. Поэтому подалгебра, заданная (4.3) является вполне геодезической в алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,0,g)}$.

Если $l_2 \neq -d/g$, то из первого уравнения в (4.17) получаем $k_2 = -fl_2/(d + gl_2)$. Если $l_1 = -b/g$, то из третьего уравнения в (4.17) имеем либо $c = 0$, либо $l_1 = b = 0$. Если $c = 0$, то из второго уравнения в (4.17) получим $k_1 = (fb - ag)/(g(d + gl_2))$. Следовательно, в алгебре Ли $\mathfrak{n}_{(a,b,0,d,f,g)}$, имеется вполне геодезическая подалгебра, заданная (4.6).

Если $l_1 = b = 0$, то из второго уравнения в (4.17) получаем $k_1 = -(a + cl_2)/(d + gl_2)$. Следовательно, подалгебра, заданная (4.4) является вполне геодезической в $\mathfrak{n}_{(a,0,c,d,f,g)}$.

Пусть $l_2 \neq -d/g$, $l_1 \neq -b/g$. Тогда из первого уравнения в (4.17) имеем $k_2 = -fl_2/(d + l_2g)$, из третьего уравнения в (4.17) получаем $k_1 = -l_1c/(b + l_1g)$. Из второго уравнения в (4.17) следует, что

$$a = [c(d + gl_2) - f(b + gl_1)] \left(\frac{l_1}{b + gl_1} - \frac{l_2}{d + gl_2} \right).$$

Поэтому имеем

$$0 = bcgl_2^2 + l_2(bcd + abg - b^2f + l_1(ag^2 - cdg - bfg)) + abd + l_1(bdf + adg - cd^2) + dgfl_1^2. \quad (4.19)$$

Следовательно, в $\mathfrak{n}_{(a,b,c,d,f,g)}$ имеется вполне геодезическая подалгебра, заданная с помощью (4.9), где l_2 — решение (4.19) для данного l_1 . $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cairns G., Hinić Galić A., Nikolayevsky Yu. Totally geodesic subalgebras of nilpotent Lie algebras// J. Lie Theory. — 2013. — 23. — P. 1023–1049.
2. Cairns G., Hinić Galić A., Nikolayevsky Yu. Totally geodesic subalgebras of filiform nilpotent Lie algebras// J. Lie Theory. — 2013. — 23. — P. 1051–1074.
3. Eberlein P. Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric, II// Trans. Am. Math. Soc. — 1994. — 343. — P. 805–828.

4. *Figula Á., Nagy P. T.* Isometry classes of simply connected nilmanifolds// J. Geom. Phys.. — 132. — P. 370–381.
5. *de Graaf W. A.* Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2// J. Algebra. — 2007. — 309. — P. 640–653.
6. *Kerr M. M., Payne T. L.* The geometry of filiform nilpotent Lie groups// Rocky Mountain J. Math. — 2010. — 40. — P. 1587–1610.
7. *Lauret J.* Homogeneous nilmanifolds of dimension 3 and 4// Geom. Dedicata. — 1997. — 68. — P. 145–155.
8. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups// Adv. Math. — 1976. — 21. — P. 293–329.
9. *Nagy P. T., Homolya Sz.* Geodesic vectors and subalgebras in two-step nilpotent metric Lie algebras// Adv. Geom. — 2015. — 15. — P. 121–126.

Al-Abayechi A.

Дебреценский университет, Дебрецен, Венгрия

E-mail: ameer@science.unideb.hu

Figula Á.

Дебреценский университет, Дебрецен, Венгрия

E-mail: figula@science.unideb.hu