Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Зеррик, А. Аит Аади, Р. Лариши, Задача регионального оптимального управления вибрирующей пластиной, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 178, 20–30

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-178-20-30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 09:31:23

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 178 (2020). С. 20–30
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-178-20-30

УДК 517.977.56

ЗАДАЧА РЕГИОНАЛЬНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛАСТИНОЙ

© 2020 г. Е. ЗЕРРИК, А. АИТ ААДИ, Р. ЛАРИШИ

Аннотация. Целью работы является изучение задачи регионального оптимального управления вибрирующей пластиной, колеблющейся в пространственной области Ω . Задача состоит в поиске ограниченного управления, под действием которого система, ограниченная на подобласть $\omega \subset \Omega$, переходит за конечное время из заданного начального состояния в желаемое конечное состояние. Доказано существование оптимального управления и установлены его свойства. Приведено условие, обеспечивающее единственность оптимального управления, и предложен численный алгоритм решения.

Ключевые слова: распределенная билинейная система, уравнение колебаний пластины, региональная управляемость, оптимальное управление.

REGIONAL OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A VIBRATING PLATE

© 2020 Е. ZERRIK, A. AIT AADI, R. LARHRISSE

ABSTRACT. In this paper, we examine the problem on the regional optimal control of a vibrating plate in a spatial domain Ω . We obtain a bounded control that drives such a system from an initial state to a desired state in a finite time, only on a subdomain ω of Ω . We prove that a regional optimal control exists characterize this control. Also we propose a condition that ensures the uniqueness of an optimal control and develop an algorithm for numerical simulations.

Keywords and phrases: distributed bilinear system, plate equation, regional controllability, optimal control.

AMS Subject Classification: 93C20, 93D15

1. Введение. Билинейные системы представляют собой специальный класс нелинейных систем, в которых нелинейные члены строятся путем умножения управляющего вектора на вектор состояния. Важность таких систем обусловлена тем, что многие процессы не только в области инженерии, но и в биологии, социэкономике и химии могут быть смоделированы билинейными системами. Основной результат по управляемости билинейных систем, полученный в [2], показывает, что при некоторых условиях существует мягкое решение (mild solution), связанное с управлением, а множество достижимости из исходного состояния имеет плотное дополнение в пространстве состояний. Это делает сложным нахождение точного решения задачи управления. Большинство результатов было получено для конкретных билинейных систем (см. [2, 7, 9]). Точная управляемость вибрирующих пластин, моделируемых линейными системами, была установлена Ж. Л. Лионсом (см. [10]), использовавшим метод единственности Гильберта (HUM method); Э. Зуауза (см. [14]) рассмотрел точную управляемость за сколь угодно малое время.

Работа выполнена при поддержке гранта Академии наук и технологий им. Хасана II..

Оптимальное управление билинейными системами изучалось во многих работах. М. Брэдли и С. Ленхарт (см. [3–5]) установили существование оптимального управления и однозначно его охарактеризовали через решение оптимальной системы, С. Ленхарт (см. [8]) показал существование и дал характеристику оптимального управления в задаче конвективно-диффузионного переноса жидкости, А. Адду и А. Бенбрик (см. [1]) изучили существование и единственность оптимального управления для класса билинейных систем.

Концепция региональной управляемости для распределенных линейных систем, эволюционирующих в пространственной области Ω , была разработана А. Эль Джаем и Э. Зерриком и относится к изучению классического понятия управляемости только на подобласти ω в Ω . Основные причины для рассмотрения этого понятия заключаются в том, что оно близко к реальным приложениям, например, к моделированию туннельной печи, когда необходимо поддерживать заданную температуру только в ее части. Кроме того, возможно регионально управлять системой, действуя управлением только на часть $\Omega \setminus \omega$, и существуют системы, управляемые на некоторой подобласти $\omega \subset \Omega$, но неуправляемые на всей области Ω (см. [6]). Помимо этого, региональное управление системой дешевле глобального управления (см. [6]).

Региональное оптимальное управление распределенными билинейными системами с неограниченным и ограниченным управлением, включающее в себя минимизацию нормы управления и ошибки конечного состояния, было рассмотрено в [12]. В [13]) при помощи уравнения Риккати была рассмотрена задача с неограниченным управлением. В данной работе рассматривается задача регионального оптимального управления вибрирующей пластиной с ограниченным управлением.

Более точно, пусть Ω — открытая ограниченная область $\mathbb{R}^2$ с регулярной границей $\partial\Omega$. Пусть $T > 0$; введем обозначение $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \partial\Omega \times [0, T]$ и рассмотрим уравнение колебаний пластины

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + \Delta^2 z(x, t) = u(x, t)z(x, t) & \text{в } Q, \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad \frac{\partial z(x, 0)}{\partial t} = z_1(x) & \text{в } \Omega, \\ z(x, t) = \frac{\partial z(x, t)}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (1)$$

где ν — единичный вектор нормали к границе $\partial\Omega$, $Az = \Delta^2 z$ — неограниченный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ и $U_M = \{u \in L^\infty(Q) \mid -M \leq u(x, t) \leq M\}$ — множество управлений, ограниченное положительной константой M .

Известно, что при $\tilde{z}(0) = (z_0, z_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и $u \in U_M$ система (1) имеет единственное слабое решение $\tilde{z}(u) = (z, z_t)$, где $(z, z_t) \in \mathcal{C}([0, T], H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$ (см. [3]). Рассмотрим непустое подмножество $\omega \subset \Omega$ с положительной мерой Лебега и желаемое конечное состояние z_d в $L^2(\omega)$.

Исследуется следующая задача регионального оптимального управления вибрирующей пластиной:

$$\min_{u \in U_M} J(u), \quad (2)$$

где

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \int_0^T \left(\chi_{\omega} z(x, t) - z_d(x) \right)^2 dt dx + \frac{\beta}{2} \int_Q u^2(x, t) dx dt, \quad (3)$$

где β — положительная константа, $\chi_{\omega} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\omega)$ — оператор сужения на ω , χ_{ω}^* — сопряженный оператор к χ_{ω} , определяемый формулой

$$\chi_{\omega}^* z(x) = \begin{cases} z(x) & \text{при } x \in \omega, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

Цель данной работы — охарактеризовать оптимальное управление $u^* \in U_M$ в задаче (2). Структура работы такова. В разделе 2 установлено существование оптимального управления с помощью минимизирующей последовательности и дана его характеристика, основанная на решении оптимальной системы, состоящей из системы (1) и сопряженной системы. В разделе 3 изучена

единственность оптимального управления. В разделе 4 предложен численный метод и алгоритм, приведены результаты численного моделирования.

2. Существование и характеристика оптимального управления.

Теорема 1. *Существует оптимальное управление $u^* \in U_M$, решающее задачу (2).*

Доказательство. Пусть $(u_n) \in U_M$ — такая минимизирующая последовательность, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{u \in U_M} J(u).$$

Соответствующее решение системы (1) обозначим через $\tilde{z}_n = \tilde{z}(u_n)$. В силу [3, лемма 2.2] имеем

$$\|\tilde{z}_n\|_{C([0,T]; H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega))} \leq C_1 e^{C_2 M T},$$

где $C_1 = \|\tilde{z}_0\|_{H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}$; поскольку U_M — замкнутое выпуклое множество в сильной топологии в $L^2(Q)$, то оно замкнуто и в слабой топологии в $L^2(Q)$. Тогда выполнены следующие свойства сходимости:

$$\begin{aligned} z_n &\rightharpoonup z^* && \text{слабо в } L^2([0, T], H_0^2(\Omega)), \\ z_n &\rightarrow z^* && \text{сильно в } L^2(Q), \\ \dot{z}_n &\rightharpoonup \dot{z}^* && \text{слабо в } L^2(Q), \\ u_n &\rightharpoonup u^* && \text{слабо в } L^2(Q). \end{aligned}$$

Теперь в системе (1) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получить, что $\tilde{z} = \tilde{z}(u) = (z^*, z_t^*)$ решает систему (1) с управлением u^* . Так как функционал J полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости (лемма Фату, см. [11]), получаем

$$J(u^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{u \in U_M} J(u),$$

откуда заключаем, что u^* является решением задачи (2). $\square$

Чтобы получить характеристику оптимального управления, мы должны построить оптимальную систему, дифференцируя функционал стоимости $J(u)$ по управлению u . Исследуем дифференцируемость $u \rightarrow \tilde{z}(u)$ относительно u .

Лемма 1. *Отображение $u \in U_M \rightarrow \tilde{z}(u) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ является дифференцируемым в следующем смысле:*

$$\frac{\tilde{z}(u + \varepsilon h) - \tilde{z}(u)}{\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\psi} \quad \text{слабо в } H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ для любых } u, u + \varepsilon h \in U_M.$$

Кроме того, $\tilde{\psi} = (\psi, \psi_t)$ является слабым решением системы

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} + \Delta^2 \psi(x, t) = u(x, t) \psi(x, t) + h(x, t) z(x, t) & \text{в } Q, \\ \psi(x, 0) = \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} = 0 & \text{в } \Omega, \\ \psi(x, t) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (4)$$

где $\tilde{z} = \tilde{z}(u) = (z, z_t)$.

Доказательство. Введем обозначения $\tilde{z}^\varepsilon = \tilde{z}(u + \varepsilon h) = (z^\varepsilon, z_t^\varepsilon)$ и $\tilde{z} = \tilde{z}(u)$. Тогда $(\tilde{z}^\varepsilon - \tilde{z})/\varepsilon$ является слабым решением системы

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{z^\varepsilon - z}{\varepsilon} \right) + \Delta^2 \left(\frac{z^\varepsilon - z}{\varepsilon} \right) = u \left(\frac{z^\varepsilon - z}{\varepsilon} \right) + h z^\varepsilon & \text{в } Q, \\ \left(\frac{z^\varepsilon - z}{\varepsilon} \right)(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z^\varepsilon - z}{\varepsilon} \right)(x, 0) = 0 & \text{в } \Omega, \\ \left(\frac{z^\varepsilon - z}{\varepsilon} \right) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{z^\varepsilon - z}{\varepsilon} \right) = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Используя [3, лемма 2.2], получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \|\tilde{z}^\varepsilon - \tilde{z}\|_{C([0, T]; H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega))} \leq \|h z^\varepsilon\|_{L^2(Q)} e^{CMT} \leq C_3,$$

где C_3 не зависит от ε , поскольку оценка на $\|\tilde{z}^\varepsilon\|_{L^2(Q)}$ не зависит от ε . Таким образом, имеем

$$\frac{\tilde{z}^\varepsilon - \tilde{z}}{\varepsilon} \rightharpoonup \tilde{\psi} \quad \text{слабо в } H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Закключаем, что $\tilde{\psi}$ является слабым решением системы (4). $\square$

Теперь есть все необходимое, чтобы вывести оптимальную систему (путем дифференцирования $J(u)$ по u) и тем самым охарактеризовать оптимальное управление.

Теорема 2. Для заданного оптимального управления $u^* \in U_M$ и соответствующего ему решения $\tilde{z} = \tilde{z}(u^*) = (z^*, z_t^*)$ системы (1) сопряженная система

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} + \Delta^2 p(x, t) = u^*(x, t)p(x, t) + z^*(x, t) - \chi_\omega^* z_d(x) & \text{в } Q, \\ p(x, T) = \frac{\partial p(x, T)}{\partial t} = 0 & \text{в } \Omega, \\ p(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma \end{cases} \quad (5)$$

имеет единственное слабое решение $\tilde{p} = (p, p_t) \in C([0, T], H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$. Кроме того,

$$u^*(x, t) = \max \left(M, \min \left(-\frac{1}{\beta} z^*(x, t) \chi_\omega^* \chi_\omega p(x, t), M \right) \right). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $u^* \in U_M$ — оптимальное управление, а $\tilde{z} = \tilde{z}(u^*)$ — соответствующее оптимальное решение. Пусть $u^* + \varepsilon h \in U_M$ для $\varepsilon > 0$ и $\tilde{z}^\varepsilon = \tilde{z}(u^* + \varepsilon h)$ — соответствующее слабое решение системы (1). Вычислим производную функционала J относительно u^* по направлению h . Так как J должен достичь минимума при u^* , имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u^* + \varepsilon h) - J(u^*)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \frac{(\chi_\omega z^\varepsilon - z_d)^2 - (\chi_\omega z^* - z_d)^2}{\varepsilon} dx dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{2} \int_Q \frac{(u^* + \varepsilon h)^2 - u^{*2}}{\varepsilon} dx dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \chi_\omega \frac{(z^\varepsilon - z^*)}{\varepsilon} (\chi_\omega z^\varepsilon + \chi_\omega z^* - 2z_d) dx dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{2} \int_Q (2hu^* + \varepsilon h^2) dx dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u^* + \varepsilon h) - J(u^*)}{\varepsilon} = \int_Q \chi_\omega^* \chi_\omega \tilde{\psi} (z^* - \chi_\omega^* z_d) dx dt + \beta \int_Q h u^* dx dt,$$

где $\tilde{\psi}$ — решение системы (4).

Используя сопряженную систему (5) и ψ как решение системы (4), получаем

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} \int_0^T \psi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta^2 p - up \right) dt dx + \beta \int_Q hu^* dx dt = \\
&= \int_{\Omega} \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} \int_0^T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta^2 \psi - u\psi \right) p dt dx + \beta \int_Q hu^* dx dt = \\
&= \int_{\Omega} \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} \int_0^T h z^* p dt dx + \beta \int_Q hu^* dt dx = \int_Q h \left(\beta u^* + \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} z^* p \right) dx dt = \\
&= \int_Q h \left(\beta u^* + z^* \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p \right) dx dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, используя произвольную вариацию h и оценки на множество управлений U_M , получаем

$$u^*(x, t) = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} z^*(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t), M \right) \right).$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. В предположении, что $u^*(x, t) = v^*(t) \mathbf{1}_D(x)$, где $D \subset \Omega$ — область приложения управления, оптимальное управление v^* имеет вид

$$v^*(t) = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta \mu(D)} \int_{\Omega} z^*(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t) dx, M \right) \right), \quad (7)$$

где $\mu(D)$ — мера Лебега D , z^* является решением системы

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + \Delta^2 z(x, t) = v^*(t) \mathbf{1}_D(x) z(x, t) & \text{в } Q, \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad \frac{\partial z(x, 0)}{\partial t} = z_1(x) & \text{в } \Omega, \\ z(x, t) = \frac{\partial z(x, t)}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (8)$$

а p является решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} + \Delta^2 p(x, t) = v^*(t) \mathbf{1}_D(x) p(x, t) + z^*(x, t) - \chi_{\omega}^* z_d(x) & \text{в } Q, \\ p(x, T) = \frac{\partial p(x, T)}{\partial t} = 0 & \text{в } \Omega, \\ p(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases} \quad (9)$$

Замечание 1. Ясно, что оптимальное управление (7) зависит от области ω и области приложения управления D .

3. Единственность оптимального управления. В этом разделе приведены достаточные условия единственности оптимального управления в задаче (2).

Теорема 3. При достаточно малом T оптимальное управление (6) в задаче (2) единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют два слабых решения, соответствующих оптимальным управлениям u и $\bar{u}$:

$$\tilde{z} = (z, z_t), \quad \tilde{p} = (p, p_t), \quad \hat{z} = (\bar{z}, \bar{z}_t), \quad \hat{p} = (\bar{p}, \bar{p}_t),$$

причем $z, p, \bar{z}$ и $\bar{p}$ ограничены в Q . Обозначим через λ положительную постоянную, которая будет выбрана позже, и выполним замену переменных

$$z = e^{\lambda t} w, \quad p = e^{-\lambda t} q, \quad \bar{z} = e^{\lambda t} \bar{w}, \quad \bar{p} = e^{-\lambda t} \bar{q}.$$

Тогда w и q удовлетворяют в слабом смысле следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} w_{tt} + 2\lambda w_t + \lambda^2 w + \Delta^2 w = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} w \chi_\omega^* \chi_\omega q, M \right) \right) w & \text{в } Q, \\ q_{tt} - 2\lambda q_t + \lambda^2 q + \Delta^2 q = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} w \chi_\omega^* \chi_\omega q, M \right) \right) q + e^{2\lambda t} w - e^{\lambda t} \chi_\omega^* z_d & \text{в } Q, \\ w = q = \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial q}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma, \\ w(x, 0) = z_0(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = z_1(x) & \text{в } \Omega, \\ q(x, T) = \frac{\partial q(x, T)}{\partial t} = 0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Аналогично, $\bar{w}$ и $\bar{q}$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \bar{w}_{tt} + 2\lambda \bar{w}_t + \lambda^2 \bar{w} + \Delta^2 \bar{w} = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} \bar{w} \chi_\omega^* \chi_\omega \bar{q}, M \right) \right) \bar{w} & \text{в } Q, \\ \bar{q}_{tt} - 2\lambda \bar{q}_t + \lambda^2 \bar{q} + \Delta^2 \bar{q} = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} \bar{w} \chi_\omega^* \chi_\omega \bar{q}, M \right) \right) \bar{q} + e^{2\lambda t} \bar{w} - e^{\lambda t} \chi_\omega^* z_d & \text{в } Q, \\ \bar{w} = \bar{q} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma, \\ \bar{w}(x, 0) = z_0(x), \quad \frac{\partial \bar{w}(x, 0)}{\partial t} = z_1(x) & \text{в } \Omega, \\ \bar{q}(x, T) = \frac{\partial \bar{q}(x, T)}{\partial t} = 0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (11)$$

Воспользовавшись (10) и (11), получаем

$$0 = (w - \bar{w})_{tt} + 2\lambda(w - \bar{w})_t + \lambda^2(w - \bar{w}) + \Delta^2(w - \bar{w}) - uw + \bar{u}\bar{w}, \quad (12)$$

$$0 = -(q - \bar{q})_{tt} + 2\lambda(q - \bar{q})_t - \lambda^2(q - \bar{q}) - \Delta^2(q - \bar{q}) + uq - \bar{u}\bar{q} + e^{2\lambda t}(w - \bar{w}). \quad (13)$$

Умножая уравнение (12) на $(w - \bar{w})_t$, уравнение (13) на $(q - \bar{q})_t$, а затем интегрируя по Q , получаем

$$\begin{aligned} 0 = \int_Q & \left[(w - \bar{w})_{tt}(w - \bar{w})_t + 2\lambda(w - \bar{w})_t^2 + \lambda^2(w - \bar{w})(w - \bar{w})_t + \right. \\ & \left. + \Delta(w - \bar{w})\Delta(w - \bar{w})_t - (uw - \bar{u}\bar{w})(w - \bar{w})_t \right] dx dt, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 0 = \int_Q & \left[-(q - \bar{q})_{tt}(q - \bar{q})_t + 2\lambda(q - \bar{q})_t^2 - \lambda^2(q - \bar{q})(q - \bar{q})_t - \right. \\ & \left. - \Delta(q - \bar{q})\Delta(q - \bar{q})_t + (uq - \bar{u}\bar{q})(q - \bar{q})_t + e^{2\lambda t}(w - \bar{w})(q - \bar{q})_t \right] dx dt, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$u = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} w \chi_\omega^* \chi_\omega q, M \right) \right), \quad \bar{u} = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} \bar{w} \chi_\omega^* \chi_\omega \bar{q}, M \right) \right).$$

Комбинируя уравнения (14), (15) и используя начальные и граничные условия, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[((w - \bar{w})_t)^2(x, T) + ((q - \bar{q})_t)^2(x, 0) \right] dx + \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Omega} \left[(w - \bar{w})^2(x, T) + (q - \bar{q})^2(x, 0) \right] dx + \\ & + \int_{\Omega} \left[|\Delta(w - \bar{w})|^2(x, T) + |\Delta(q - \bar{q})|^2(x, 0) \right] dx + 2\lambda \int_Q \left[((q - \bar{q})_t)^2 + ((w - \bar{w})_t)^2 \right] dx dt = \\ & = \int_Q \left[(uw - \bar{u}\bar{w})(w - \bar{w})_t - (uq - \bar{u}\bar{q})(q - \bar{q})_t - e^{2\lambda t}(w - \bar{w})(q - \bar{q})_t \right] dx dt. \end{aligned} \quad (16)$$

В силу соотношений

$$uw - \bar{u}\bar{w} = u(w - \bar{w}) + \bar{w}(u - \bar{u}), \quad uq - \bar{u}\bar{q} = u(q - \bar{q}) + \bar{q}(u - \bar{u})$$

и неравенства

$$|u - \bar{u}| \leq \frac{1}{\beta} |\bar{w}\chi_{\omega}^*\chi_{\omega}\bar{q} - w\chi_{\omega}^*\chi_{\omega}q| \quad (17)$$

из (16) следует

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_Q \left[((q - \bar{q})_t)^2 + ((w - \bar{w})_t)^2 \right] dx dt & \leq \int_Q \left[((q - \bar{q})_t)^2 + ((w - \bar{w})_t)^2 \right] dx dt + \\ & + Ce^{C(M+\lambda)T} \int_Q \left[(w - \bar{w})^2 + (q - \bar{q})^2 \right] dx dt, \end{aligned} \quad (18)$$

где C не зависит от λ и T , но зависит от L^{∞} ограничений на z , $\bar{p}$. Поскольку

$$\begin{aligned} \int_Q (w - \bar{w})^2 dx dt & = \int_{\Omega} \int_0^T \left(\int_0^t (w - \bar{w})_t(x, s) ds \right)^2 dx dt \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \int_0^T t \left(\int_0^t ((w - \bar{w})_t)^2(x, s) ds \right) dx dt \leq \frac{T^2}{2} \int_Q ((w - \bar{w})_t)^2 dx dt, \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\int_Q (q - \bar{q})^2 dx dt \leq \frac{T^2}{2} \int_Q ((q - \bar{q})_t)^2 dx dt,$$

оценка второго слагаемого в (18) влечет

$$(2\lambda - 1) \int_Q \left[((q - \bar{q})_t)^2 + ((w - \bar{w})_t)^2 \right] dx dt \leq T^2 Ce^{C(M+\lambda)T} \int_Q \left[((q - \bar{q})_t)^2 + ((w - \bar{w})_t)^2 \right] dx dt.$$

Теперь выберем такое λ , что $2\lambda - 1 > 0$, и достаточно малое T , удовлетворяющее условию

$$2\lambda - 1 > T^2 Ce^{C(M+\lambda)T},$$

так что

$$(q - \bar{q})_t = (w - \bar{w})_t = 0 \quad \text{в } Q.$$

В силу согласования q , $\bar{q}$ и w , $\bar{w}$ на верхней и нижней границах цилиндра Q соответственно, т.е. соотношений $q = \bar{q}$, $w = \bar{w}$, заключаем, что $u = \bar{u}$. $\square$

4. Алгоритм и численное моделирование.

4.1. *Алгоритм.* Мы показали, что решение задачи (2) дается формулой

$$u^*(x, t) = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} z^*(x, t) \chi_\omega^* \chi_\omega p(x, t), M \right) \right),$$

где z^* — решение системы (1), соответствующее управлению u^* , а p — решение системы (5). Оптимальное управление в задаче (2) может быть вычислено по следующей формуле:

$$u_{n+1}^*(x, t) = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} z_n^*(x, t) \chi_\omega^* \chi_\omega p_n(x, t), M \right) \right) u_0^* = 0, \quad (19)$$

где z_n^* — решение системы (1), соответствующее управлению u_n^* , а p_n — решение сопряженной системы (5). Это позволяет сформулировать следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

Шаг 1: Исходные данные.

- (i) Исходное состояние z_0 , z_1 и u_0 .
- (ii) Желаемое состояние z_d .
- (iii) Пороговая точность ϵ , подобласть ω и время T .

Шаг 2: Повторять, пока выполняется неравенство $\|u_{n+1} - u_n\| \leq \epsilon$.

- (i) Найти z_n^* , решая систему (1) методом конечных разностей.
- (ii) Найти p_n , решая систему (5) методом конечных разностей.
- (iii) Вычислить u_{n+1} по формуле (19).

Шаг 3: Найденное управление u_n^* оптимально.

4.2. *Численное моделирование.* Положим $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Рассмотрим уравнение колебаний пластины

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + \Delta^2 z(x_1, x_2, t) = v(t) \mathbf{1}_D(x_1, x_2) z(x_1, x_2, t) & \text{в } \Omega \times]0, T[, \\ z(x_1, x_2, 0) = z_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial z(x_1, x_2, 0)}{\partial t} = z_1(x_1, x_2) & \text{в } \Omega, \\ z(x_1, x_2, t) = \frac{\partial z(x_1, x_2, t)}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (20)$$

и задачу (2) с множеством управлений $U_M = \{v \in L^2([0, T]); -M \leq v(t) \leq M\}$. Оптимальное управление в задаче (2) задается следующей формулой:

$$\begin{cases} v_{n+1}^*(t) = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta \mu(D)} \int_{\Omega} z_n^*(x_1, x_2, t) \chi_\omega^* \chi_\omega p_n(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2, M \right) \right), \\ v_0^* = 0, \end{cases}$$

где z_n^* — решение системы (20), соответствующее управлению v_n^* , и p_n — решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p_n(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + \Delta^2 p_n(x_1, x_2, t) = \\ \quad = v^*(t) \mathbf{1}_D(x_1, x_2) p_n(x_1, x_2, t) + z_n^*(x_1, x_2, t) - \chi_\omega^* z_d(x_1, x_2) & \text{в } Q, \\ p_n(x_1, x_2, T) = \frac{\partial p_n(x_1, x_2, T)}{\partial t} = 0 & \text{в } \Omega, \\ p_n(x_1, x_2, t) = \frac{\partial p_n(x_1, x_2, t)}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Положим $T = 1$, $M = 1$, $\beta = 0.1$, $z_0(x_1, x_2) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)$, $z_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)$, желаемое конечное состояние $z_d(x_1, x_2) = 0$ на подобласти $\omega \subset \Omega$ и $D =]0, 3; 0, 6[\times]0, 3; 0, 6[$. Начальное состояние показано на рис. 1. Применяя предложенный выше алгоритм с $\epsilon = 10^{-4}$, получаем следующий результат.

Рис. 1. Начальное состояние на Ω . Рис. 2. Конечное состояние на Ω .

Рис. 3. Оптимальное управление.

- А.** Результат вычислений для $\omega =]0; 0,2[\times]0; 1[$ изображен на рис. 2, 3. Желаемое состояние достигнуто с точностью $\|\chi_{\omega} z(T)\|_{L^2(\omega)}^2 = 6,2 \times 10^{-4}$, а значение функционала равно $J(v^*) = 2,8 \times 10^{-3}$.
- В.** Результат вычислений для $\omega =]0; 0,5[\times]0; 1[$ изображен на рис. 4, 5. Желаемое состояние достигнуто с точностью $\|\chi_{\omega} z(T)\|_{L^2(\omega)}^2 = 8,5 \times 10^{-4}$, а значение функционала равно $J(v^*) = 5,4 \times 10^{-3}$.
- С.** Результат вычислений для $\omega = \Omega =]0; 1[\times]0; 1[$ изображен на рис. 6, 7. Желаемое состояние достигнуто с точностью $\|\chi_{\omega} z(T)\|_{L^2(\omega)}^2 = 9,2 \times 10^{-3}$, а значение функционала равно $J(v^*) = 3,2 \times 10^{-2}$.

5. Заключение. Рассмотрена задача регионального оптимального управления вибрирующей пластиной при ограниченном множестве управлений. Доказано существование и единственность оптимального управления и дана его характеристика. Предложенный подход позволяет оценить соответствие конечного состояния заданной цели, ограниченной на подмножество в области определения. Полученные результаты успешно протестированы с помощью численных экспериментов. Случай граничной подобласти остается открытым.

Рис. 4. Конечное состояние на Ω .

Рис. 5. Оптимальное управление.

Рис. 6. Конечное состояние на Ω .

Рис. 7. Оптимальное управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Addou A., Benbrik A. Existence and uniqueness of optimal control for a distributed parameter bilinear systems// J. Dynam. Control Syst. — 2002. — 8. — С. 141–152.
2. Ball J. M., Marsden J. E., and Slemrod M. Controllability for distributed bilinear systems// SIAM J. Control Optim. — 1982. — 20. — С. 575–597.
3. Bradley M. E., Lenhart S. Bilinear optimal control of a Kirchhoff plate// Syst. Control Lett. — 1994. — 22. — С. 27–38.
4. Bradley M. E., Lenhart S., Yong J. Bilinear optimal control of the velocity term in a Kirchhoff plate equation// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — 238. — С. 451–467.
5. Bradley M. E., Lenhart S. Bilinear spatial control of the velocity term in a Kirchhoff plate// Electron. J. Differ. Equations. — 2001. — 2001. — 27.
6. El Jai A., Simon M. C., Zerrik E., Prirchard A. J. Regional controllability of distributed parameter systems// Int. J. Control. — 1995. — 62. — С. 1351–1365.
7. Joshi H. R. Optimal control of the convective velocity coefficient in a parabolic problem// Nonlin. Anal. Theory Methods Appl. — 2005. — 63. — С. 1383–1390.
8. Lenhart S. Optimal control of a convective-diffusive fluid problem// J. Math. Models Meth. Appl. Sci. — 1995. — 5. — С. 225–237.
9. Liang M. Bilinear optimal control for a wave equation// J. Math. Models Meth. Appl. Sci. — 1999. — 9. — С. 45–68.
10. Lions J. L. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. — Paris: Masson, 1988.

11. *Rudin W.* Real and Complex analysis. — McGraw-Hill, 1987.
12. *Zerrik E., Ould Sidi M.* Regional controllability for infinite dimensional distributed bilinear systems// Int. J. Control. — 2011. — 84. — С. 2108–2116.
13. *Ztot K., Zerrik E., Bourray H.*, Regional control problem for distributed bilinear systems// Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. — 2011. — 2. — С. 499–508.
14. *Zuazua E.* Contrôlabilité exacte d'une modèles de plaques en un temps arbitrairement petit// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. — 1987. — 304, № 7. — С. 173–176.

Zerrik E.

Университет Мулая Исмаила, Мекнесс, Марокко

E-mail: zerrik3@yahoo.fr

Ait Aadi A.

Университет Мулая Исмаила, Мекнесс, Марокко

E-mail: abderrahman.aitaadi@gmail.com

Larhrissi R.

Университет Мулая Исмаила, Мекнесс, Марокко

E-mail: r.larhrissi@gmail.com