Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Карраско-Оливера, Р. Мецгер, С. Моралес, Логарифмическое расширение, энтропия и размерность для многозначных отображений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 178, 31–40

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-178-31-40>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:27:45

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 178 (2020). С. 31–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-178-31-40

УДК 517.938

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ, ЭНТРОПИЯ И РАЗМЕРНОСТЬ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2020 г. Д. КАРРАСКО-ОЛИВЕРА, Р. МЕЦГЕР, С. А. МОРАЛЕС

Аннотация. Получена нижняя грань для энтропии (необязательно инвариантной) вероятностной борелевской меры относительно полунепрерывного сверху многозначного отображения как произведение нижней размерности меры и логарифмической скорости расширения отображения. Данная работа обобщает известный результат в однозначном случае, сохраняющем меру.

Ключевые слова: логарифмическое расширение, метрическая энтропия, размерность.

LOGARITHMIC EXPANSION, ENTROPY, AND DIMENSION FOR SET-VALUED MAPS

© 2020 D. CARRASCO-OLIVERA, R. METZGER, C. A. MORALES

ABSTRACT. We obtain a lower bound for the entropy of a (not necessarily invariant) Borel probability measure with respect to an upper semicontinuous set-valued map as the product of the lower dimension of the measure and the logarithmic expansion rate. This is a generalization of the well-known measure-preserving single-valued case.

Keywords and phrases: logarithm expansion, metric entropy, dimension.

AMS Subject Classification: 37D40, 54C60

1. Введение. Анализ специфических экономических, биологических и химических моделей часто сталкивается с задачей поиска положений равновесия для некоторых динамических систем. Эти положения соответствуют решениям, которые могут вести себя случайно либо не в соответствии с хаотичностью системы, что порождает проблему анализа хаотичности системы. Одной из наиболее популярных величин, характеризующих хаос при условии однозначности, является *энтропия*. Это понятие имеет долгую историю, начиная с его введения в термодинамике Р. Клаузиусом в середине XIX в. (см. [18, 19]). Дальнейшее развитие этого численного инварианта восходит к статистической и квантовой механике (см. [13, 37]) и теории информации (см. [4, 29, 33]). Также известны *метрическая энтропия Колмогорова—Синяя* (см. [2, 3]) и *топологическая энтропия Адлера—Конхейма—МакЭндрю* (см. [5]). Читатель может найти ссылки и исторические заметки в [21, 25, 34]. Совсем недавно авторы рассмотрели топологическую энтропию для многозначных отображений (см. [16]).

Работа Д. Карраско-Оливера выполнена при поддержке проекта FONDECYT 1181061, CONICYT (Чили).

Работа Р. Мецгера выполнена при поддержке проекта Pos-Doutorado Verano 2015, IMPA, Рио-де-Жанейро, Бразилия.

Работа С. А. Моралеса выполнена при поддержке проектов CNPq-Brazil и MATHAMSUB 15 MATH05-ERGOPTIM..

В данной работе продолжается изучение метрической энтропии для многозначных отображений. Проанализирована задача поиска нижних границ метрической энтропии в указанных условиях. Начало этому исследованию положил результат Р. Манэ (см. [28]) о том, что компактные метрические пространства, связанные расширенными гомеоморфизмами, имеют конечную топологическую размерность. Позже А. Фати (см. [22]) обнаружил существование нижней границы для топологической энтропии в виде произведения размерности Хаусдорфа и логарифмического расширения гомеоморфизма. Дай, Жу и Женг (см. [20]) расширили результат Фати до метрической энтропии Колмогорова—Синая. Цель данной работы — расширить полученные границы в контексте многозначных отображений. В работе будет получена нижняя граница для метрической энтропии полунепрерывного сверху многозначного отображения как произведения нижней размерности меры и логарифмической скорости расширения отображения (см. [24, 32]). В частности, скорость расширения и размерность пространственного окружения можно использовать для определения хаотичности данной многозначной модели.

Рассмотрим метрическое пространство X . Обозначим через $B[a, r]$ замкнутый шар с центром a и радиусом r . Для подмножеств $A, B \subset X$, определим *расстояние* между A и B формулой

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Обозначим через 2^X множество всех подмножеств X . Под *многозначным отображением* X понимается отображение $f : X \rightarrow 2^X$. Считается, что многозначное отображение f пространства X является *замкнутозначным*, если $f(x)$ замкнуто при каждом $x \in X$, и *однозначным*, если $\text{card}(f(x)) = 1$ при всех $x \in X$, где card обозначает мощность. Существует очевидное соответствие между однозначными отображениями $f : X \rightarrow 2^X$ и отображениями $f : X \rightarrow X$. Композиция $f \circ g$ многозначных отображений $f, g : X \rightarrow 2^X$ определяется с помощью формулы

$$(f \circ g)(x) = \bigcup_{y \in g(x)} f(y) \quad \forall x \in X.$$

Введем тождественное отображение $f^0 = Id$ и индуктивно определим $f^k = f^{k-1} \circ f$ для каждого $k \in \mathbb{N}^+$. Далее предположим, что каждое многозначное отображение f является *строгим*, т.е. $f(x) \neq \emptyset$ для каждого $x \in X$ (подробнее о многозначном анализе и многозначной динамике см. [6–9, 15, 27, 31, 35, 36]).

Определим *константу расширения* $EC(f)$ многозначного отображения f пространства X как такое наибольшее значение $\rho \geq 0$, что для каждого $0 < \rho^* < \rho$ существует такое $\delta > 0$, что $\text{dist}(f(x), f(y)) \geq \rho^* d(x, y)$, если $x, y \in X$ удовлетворяют условию $d(x, y) \leq \delta$. Это определение расширяет соответствующее определение для однозначных отображений (см. [24]) до общих многозначных отображений. Каждое многозначное отображение f , удовлетворяющее условию $EC(f) > 1$, является (положительно) расширяющим в смысле Уильямса (см. [39]). Однозначные отображения называют также отображениями, *расширяющими малые расстояния* (см. [30]).

Обобщим определение логарифмической скорости расширения с однозначного (например, [32]) до общего многозначного случая.

Определение 1.1. *Логарифмическая скорость расширения* многозначного отображения f определяется следующим образом:

$$\xi(f) = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{k} \log EC(f^k).$$

Многозначное отображение f пространства X называется *непрерывным сверху*, если для каждого $x \in X$ и каждой окрестности $\mathcal{U}$ множества $f(x)$ существует такое $\eta > 0$, что $f(x') \subset \mathcal{U}$ при каждом $x' \in X$, удовлетворяющем условию $d(x, x') < \eta$. Это определение сводится к обычной классической непрерывности в случае однозначного отображения. Если X является компактом, это определение эквивалентно следующему: для каждого $\epsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что $f(x) \subset B(f(x'), \epsilon)$ при любом $x' \in X$, удовлетворяющем условию $d(x, x') < \eta$ (см. [8]).

Любому $n \in \mathbb{N}^+$ поставим в соответствие отображение $d_n : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, определенное по правилу

$$d_n(x, y) = \inf \left\{ \sup_{0 \leq i \leq n-1} d(x_i, y_i) : (x_i)_{i=0}^n, (y_i)_{i=0}^n \text{ являются последовательностями,} \right. \\ \left. \text{удовлетворяющими условиям } x_0 = x, y_0 = y, x_{i+1} \in f(x_i), y_{i+1} \in f(y_i) \text{ при } 0 \leq i \leq n-1 \right\}. \quad (1)$$

Обозначение d_n^f показывает зависимость от f .

Эти отображения являются метриками в случае однозначности, но лишь полуметриками в общем случае (см. [12, 23] и пример 2.2 ниже).

Определим ϵ -шары, центрированные в $x \in X$ относительно d_n :

$$B_n[x, \epsilon] = \{y \in X : d_n(x, y) \leq \epsilon\};$$

в обозначении $B_n^f[x, \epsilon]$ указана зависимость от f .

Следуя [1, 14], авторы определили в [16] топологическую энтропию многозначного отображения f пространства X с помощью равенства

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon), \quad (2)$$

где $r(n, \epsilon)$ — максимальная мощность (n, ϵ) -порождающего множества, т.е. множества E , удовлетворяющего условию

$$X = \bigcup_{x \in E} B_n[x, \epsilon].$$

Аналогичное понятие может быть введено с помощью замены $r(n, \epsilon)$ в (2) на минимальную мощность (n, ϵ) -разделенного множества F , удовлетворяющего условию $B_n[x, \epsilon] \cap F = \{x\}$ при всех $x \in F$ (см. [16]).

Введем похожий численный инвариант для меры Бореля, мотивированный (2) (см. [26]).

Пусть μ и f обозначают меру Бореля и многозначное отображение пространства X соответственно. Не предполагается, что μ является инвариантом для f в смысле многозначности (см. [8]). Для любого $A \subset X$ и $\delta > 0$ считаем, что $\mu(A) \leq \delta$, если $\mu(B) \leq \delta$ для любого борелевского подмножества $B \subset A$.

При заданном $n \in \mathbb{N}^+$ и $\epsilon, \delta > 0$ подмножество $E \subset X$ называется (n, ϵ, δ) -порождающим для μ относительно f , если

$$\mu \left(X \setminus \bigcup_{x \in E} B_n[x, \epsilon] \right) \leq \delta$$

(см. [17, с. 488]). Введем величину

$$r(n, \epsilon, \delta) = \min \{ \text{card}(E) : E \text{ является } (n, \epsilon, \delta)\text{-порождающим} \}.$$

Будем писать $r(f, \mu, n, \epsilon, \delta)$, чтобы подчеркнуть зависимость от f и μ . Возможно, что $r(n, \epsilon, \delta) = \infty$; ниже в этих случаях полагаем, что $\log \infty = \infty$. Определим

$$h(f, \mu, \epsilon, \delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log r(n, \epsilon, \delta)}{n}.$$

Очевидно, $r(n, \epsilon, \delta) \leq r(n, \epsilon', \delta)$, а потому и $h(f, \mu, \epsilon, \delta) \leq h(f, \mu, \epsilon', \delta)$ при $0 < \epsilon' \leq \epsilon$. Отсюда следует, что существует предел

$$h(f, \mu, \delta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(f, \mu, \epsilon, \delta) = \sup_{\epsilon > 0} h(f, \mu, \epsilon, \delta).$$

Подобным образом $r(n, \epsilon, \delta') \geq r(n, \epsilon, \delta)$, когда $\delta' \leq \delta$, поэтому также существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} h(f, \mu, \delta) = \sup_{\delta > 0} h(f, \mu, \delta).$$

Используя эти замечания, можно сформулировать следующие определения.

Определение 1.2. Метрическая энтропия μ относительно f определяется формулой

$$h(f, \mu) = \lim_{\delta \rightarrow 0} h(f, \mu, \delta).$$

Определение 1.3. Будем говорить, что μ имеет нижнюю размерность $\underline{d}(\mu) \in \mathbb{R}^+$, если

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B[x, r])}{\log r} = \underline{d}(\mu) \quad \text{равномерно по } x \in X. \quad (3)$$

По сравнению с обычной нижней размерностью это определение является более сильным, требующим лишь существования предела величины μ при почти всех x (см. [10, 11]).

Используя эти определения, сформулируем результат данной работы.

Теорема 1.4. Для любого полунепрерывного сверху замкнутозначного отображения $f : X \rightarrow 2^X$ и любой вероятностной борелевской меры μ с нижней размерностью $\underline{d}(\mu)$ компактного метрического пространства X выполнено неравенство

$$h(f, \mu) \geq \underline{d}(\mu) \cdot \xi(f).$$

Повторим, что от меры μ не требуется быть инвариантной. Конечно, интересен случай, когда обе величины $\underline{d}(\mu)$ и $\xi(f)$ положительны. Нетривиальный (т.е. не однозначный) пример, удовлетворяющий этим гипотезам, рассмотрен ниже (см. пример 2.1).

2. Примеры.

Пример 2.1. Равномерно непрерывное замкнутозначное отображение f , не являющееся однозначным, для которого $\xi(f) > 0$, и такая мера Бореля μ компактного интервала $[0, 1]$, что $\underline{d}(\mu) > 0$:

Наделим единичный интервал $[0, 1]$ евклидовой метрикой. Определим многозначное отображение f интервала $[0, 1]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \{2x\}, & \text{если } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \{0, 1\}, & \text{если } x = \frac{1}{2}, \\ \{2x - 1\}, & \text{если } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\xi(f) = \log 2$. Принимая μ в качестве меры Лебега, имеем $\underline{d}(\mu) = 1$.

Пример 2.2. Многозначное отображение, для которого ассоциированные полуметрики d_n в (1) не являются метриками. Этот пример важен, так как он показывает, что энтропия, которая рассматривается в данной работе для многозначных отображений, имеет некоторые отличия от стандартной однозначной энтропии.

Для каждого $k \in \mathbb{N}^+$ существует многозначное отображение f в сферу S^k , для которого d_n не является метрикой при $n \geq 2$.

Доказательство. Выберем три различные точки $a, b, c \in S^k$ и три подмножества $A, B, C \subset S^k$, удовлетворяющие следующим трём гипотезам:

- (i) $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, C) = 0$;
- (ii) $\max(d(a, b), d(b, c)) < \frac{1}{2} \text{dist}(A, C)$;
- (iii) $\{a, b, c\} \cap (A \cup B \cup C) = \emptyset$.

Так как $a \neq b \neq c \neq a$, то корректно определено следующее многозначное отображение f сферы S^k :

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } x = a, \\ B, & \text{если } x = b, \\ C, & \text{если } x = c, \\ \{x\}, & \text{если } x \notin \{a, b, c\}. \end{cases}$$

Из первых двух гипотез следует, что d_2 не является метрикой для этого f . Используя третью гипотезу, получаем $d_n = d_2$ для каждого $n \geq 2$. Тогда d_n не является метрикой при любом $n \geq 2$.

□

Сформулируем некоторые свойства энтропии, которые будут полезны для вычислительных целей. Как обычно, пишем $f \leq g$ для многозначных отображений f и g , если $f(x) \subset g(x)$ при всех $x \in X$. Любая мера Бореля μ обладает следующими свойствами:

- (Н1) если $f \leq g$, то $h(f, \mu) \leq h(g, \mu)$ (сохранение порядка);
- (Н2) $h(f, \mu) \leq h(f^k, \mu) \leq k \cdot h(f, \mu)$ для всех $k \in \mathbb{N}^+$ (энтропия степени);
- (Н3) $h(f, \mu) \leq h(f)$ (полувариационный принцип).

Второе неравенство в (Н2) будет доказано в лемме 3.2. Оставшиеся неравенства легко следуют из определений.

Известно, что тождество $I(x) = x$ на любом компактном метрическом пространстве имеет нулевую топологическую энтропию. Следующий пример расширяет этот факт до многозначного контекста.

Пример 2.3. Пусть f — многозначное отображение компактного метрического пространства X . Если существует $k \in \mathbb{N}^+$, удовлетворяющее условию $x \in f^k(x)$ для всех $x \in X$, то $h(f, \mu) = 0$ для любой меры Бореля μ .

Доказательство. Согласно (Н2) можно предположить, что $k = 1$. Докажем, что $d_n^f = d$ для любого $n \in \mathbb{N}^+$. Неравенство $d_n^f \geq d$ легко следует из определения. Теперь выберем $x, y \in X$ и $n \in \mathbb{N}^+$ и определим последовательности $(x_i)_{i=0}^n$ и $(y_i)_{i=0}^n$ формулами $x_i = x$ и $y_i = y$ для всех $0 \leq i \leq n$. Очевидно, эти последовательности удовлетворяют условиям $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{i+1} = x \in f(x) = f(x_i)$ и $y_{i+1} = y \in f(y) = f(y_i)$ для всех $0 \leq i \leq n-1$. Следовательно,

$$d_n^f(x, y) \leq \sup_{0 \leq i \leq n-1} d(x_i, y_i) = \sup_{0 \leq i \leq n-1} d(x, y) = d(x, y).$$

Закключаем, что $d_n^f \leq d$ и, таким образом, $d_n^f = d$ для любого $n \in \mathbb{N}^+$. Значит, $r(f, \mu, n, \epsilon, \delta)$ не зависит от n при любой мере Бореля μ , и поэтому $h(f, \mu) = 0$. $\square$

В следующем примере вычислена энтропия субдифференциальной евклидовой нормы $f(x) = |x|$ пространства $\mathbb{R}$ (см. [31, с. 215]).

Пример 2.4. Определим многозначное отображение ∂f интервала $[-1, 1]$ следующим образом:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ [-1, 1], & \text{если } x = 0, \\ \{-1\}, & \text{если } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Оно удовлетворяет условию $h(\partial f, \mu) = 0$ при любой мере Бореля μ интервала $[-1, 1]$.

Доказательство. Сначала докажем, что величина $h(\partial f)$, определенная в (2), удовлетворяет условию $h(\partial f) = 0$. Заметим, что из свойства сохранения порядка (Н1) следует неравенство $h(\partial f) \leq h(s)$, где s — селектор ∂f , определенный следующим образом:

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Пусть E является $(1, \epsilon)$ -порождающим множеством s . Задавая ϵ малым, можно обеспечить, чтобы E имело точки по обе стороны от 0. Следовательно, $E' = \{0\} \cup E$ является (n, ϵ) -порождающим для каждого $n \in \mathbb{N}^+$. Из этого получаем $r(n, \epsilon) \leq r(1, \epsilon) + 1$ для каждого $n \in \mathbb{N}^+$. Очевидно, $r(1, \epsilon) < \infty$, поэтому

$$h(s) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(1, \epsilon) + 1) = 0.$$

Так как $h(\partial f) = 0$, получаем $h(\partial f, \mu) = 0$ с помощью полувариационного принципа (Н3). $\square$

3. Доказательство теоремы 1.4. Начнем с леммы, которая известна в однозначном случае.

Лемма 3.1. *Для любого многозначного отображения f метрического пространства X имеем*

$$B_{kn}^f[x, \epsilon] \subset B_n^{f^k}[x, \epsilon] \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}^+, \epsilon > 0.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$d_n^{f^k} \leq d_{kn}^f \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^+.$$

Можно полагать, что $k \in \mathbb{N}^+$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}^+$ и $x, y \in X$. Пусть дано $\gamma > 0$. Существуют такие последовательности $(x_i)_{i=0}^{kn}$ и $(y_i)_{i=0}^{kn}$, что $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{i+1} \in f(x_i)$, $y_{i+1} \in f(y_i)$ и $d(x_i, y_i) \leq d_{kn}^f(x, y) + \gamma$ при $0 \leq i \leq kn - 1$. Определим $\hat{x}_i = x_{ki}$ и $\hat{y}_i = y_{ki}$ для $0 \leq i \leq n$. Тогда результирующие последовательности $(\hat{x}_i)_{i=0}^n$ и $(\hat{y}_i)_{i=0}^n$ удовлетворяют соотношениям $\hat{x}_0 = x$, $\hat{y}_0 = y$, $\hat{x}_{i+1} \in f^k(\hat{x}_i)$, $\hat{y}_{i+1} \in f^k(\hat{y}_i)$ и $d(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \leq d_{kn}^f(x, y) + \gamma$ при $0 \leq i \leq n - 1$. Тогда $d_n^{f^k}(x, y) \leq d_n^f(x, y) + \gamma$. Так как значение γ произвольно, получаем требуемый результат. $\square$

Далее сформулируем многозначную версию известного свойства метрической энтропии однозначного отображения.

Лемма 3.2. *Если f — многозначное отображение метрического пространства, то*

$$h(f^k, \mu) \leq k \cdot h(f, \mu) \quad \forall K \in \mathbb{N}^+$$

для любой меры Бореля μ .

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}^+$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ и E — (kn, ϵ, δ) -порождающее множество для μ относительно f . С помощью леммы 3.1 получаем

$$\left(X \setminus \bigcup_{x \in E} B_n^{f^k}[x, \epsilon] \right) \subset \left(X \setminus \bigcup_{x \in E} B_{kn}^f[x, \epsilon] \right);$$

следовательно, E является (n, ϵ, δ) -порождающим для μ относительно f^k . Значит, $r(f^k, \mu, n, \epsilon, \delta) \leq r(f, \mu, kn, \epsilon, \delta)$, и поэтому $h(f^k, \mu) \leq k \cdot h(f, \mu)$. $\square$

Замечание 3.3. В однозначном случае имеем тождество $h(f^k, \mu) = k \cdot h(f, \mu)$. Но это тождество отсутствует в настоящем многозначном случае, потому что отображения d_n в (1) являются лишь полуметриками, как показано в примере 2.2.

Нам понадобится следующая лемма. Для любого подмножества $A \subset X$ используем обозначение $B_\epsilon[A, \epsilon] = \bigcup_{x \in A} B[x, \epsilon]$.

Лемма 3.4. *Пусть f — полунепрерывное сверху замкнутозначное отображение компактного метрического пространства X . Если (a^n) и (b^n) — последовательности, для которых $a^n \rightarrow a$, $b^n \rightarrow b$ и $a^n \in f(b^n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $a \in f(b)$.*

Доказательство. Зафиксируем $\epsilon > 0$. Из полунепрерывности сверху следует существование такого $N > 0$, что $f(b^n) \subset B[f(b), \epsilon]$ при всех $n \geq N$. Из $a^n \in f(b^n)$ следует, что $a^n \in B[f(b), \epsilon]$ для всех $n \geq N$. Из этого получаем такую последовательность $x_n \in f(b)$, что $d(a^n, x_n) \leq \epsilon$ при всех $n \geq N$. При необходимости переходя к подпоследовательности, можно предположить, что $x^n \rightarrow x$ для некоторого $x \in X$. Имеем $x \in f(b)$ (так как $f(b)$ замкнуто) и $d(a, x) \leq \epsilon$. Это означает $a \in B[f(b), \epsilon]$. Так как ϵ произвольно и $f(b)$ замкнуто, получаем $a \in f(b)$. $\square$

Лемма 3.5. *Если f — полунепрерывное сверху замкнутозначное отображение компактного метрического пространства X , то $B_k[x, \epsilon]$ замкнуто при любых $k \in \mathbb{N}^+$, $\epsilon > 0$ и $x \in X$.*

Доказательство. Зафиксируем такую последовательность $y^n \in B_k[x, \delta]$, что $y^n \rightarrow y$ при некотором $y \in X$. Необходимо доказать $y \in B_k[x, \epsilon]$.

По определению при всех n существуют такие последовательности $(y_i^n)_{i=0}^k$ и $(x_i^n)_{i=0}^k$, что $y_0^n = y^n$, $x_0^n = x$,

$$y_{i+1}^n \in f(y_i^n), \quad x_{i+1}^n \in f(x_i^n), \quad d(y_i^n, x_i^n) \leq \epsilon \quad \forall 0 \leq i \leq k-1.$$

Очевидно, последовательности (y_1^n) и (x_1^n) при $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям

$$y_1^n \in f(y^n), \quad x_1^n \in f(x), \quad d(y_1^n, x_1^n) \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что $y_1^n \rightarrow y_1$, $x_1^n \rightarrow x_1$ при $n \rightarrow \infty$. Применяя лемму 3.4, получим

$$y_1 \in f(y), \quad x_1 \in f(x), \quad d(y_1, x_1) \leq \epsilon.$$

Далее рассмотрим последовательности (y_2^n) и (x_2^n) при $n \in \mathbb{N}$. Они удовлетворяют условиям

$$y_2^n \in f(y_1^n), \quad x_2^n \in f(x_1^n), \quad d(y_2^n, x_2^n) \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что $y_2^n \rightarrow y_2$ и $x_2^n \rightarrow x_2$. Тогда из леммы 3.4 следует, что

$$y_2 \in f(y_1), \quad x_2 \in f(x_1), \quad d(y_2, x_2) \leq \epsilon.$$

Повторяя процесс, получаем последовательности $(y_i)_{i=0}^k$ и $(x_i)_{i=0}^k$, удовлетворяющие условиям $y_0 = y$, $x_0 = x$,

$$y_{i+1} \in f(y_i), \quad x_{i+1} \in f(x_i), \quad d(y_i, x_i) \leq \epsilon \quad \forall 0 \leq i \leq k-1.$$

Из этого следует, что $y \in B_k[x, \epsilon]$. $\square$

Лемма 3.6. Если f — полунепрерывное сверху замкнутозначное отображение компактного метрического пространства X , то

$$h(f, \mu) \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \sup_{x \in X} \mu(B_n[x, \epsilon]), \quad (4)$$

для любой вероятностной борелевской меры μ пространства X .

Доказательство. Заметим, что по лемме 3.5 все шары $B_n[x, \epsilon]$ замкнуты (следовательно, измеримы). Докажем неравенство

$$r(n, \epsilon, \delta) \geq \frac{1 - \delta}{\sup_{x \in X} \mu(B_n[x, \epsilon])} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall 0 < \delta < 1. \quad (5)$$

Если $r(n, \epsilon, \delta) = \infty$, то доказывать нечего. В противном случае выбираем такое конечное (n, ϵ, δ) -порождающее множество E для μ , что $\text{card}(E) = r(n, \epsilon, \delta)$. Так как $B_n[x, \epsilon]$ измеримо и E конечно, заключаем, что $\bigcup_{x \in E} B_n[x, \epsilon]$ также измеримо. Так как E является (n, ϵ, δ) -порождающим для μ , имеем

$$\mu \left(\bigcup_{x \in E} B_n[x, \epsilon] \right) = 1 - \mu \left(X \setminus \bigcup_{x \in E} B_n[x, \epsilon] \right) \geq 1 - \delta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r(n, \epsilon, \delta) \cdot \sup_{x \in X} \mu(B_n[x, \epsilon]) &= \text{card}(E) \cdot \sup_{x \in X} \mu(B_n[x, \epsilon]) \geq \\ &\geq \sum_{x \in E} \mu(B_n[x, \epsilon]) \geq \mu \left(\bigcup_{x \in E} B_n[x, \epsilon] \right) \geq 1 - \delta, \end{aligned} \quad (6)$$

что доказывает (5). Переходя к верхнему пределу в (5), получаем

$$h(f, \mu, \epsilon, \delta) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \sup_{x \in X} \mu(B_n[x, \epsilon]) \quad \forall 0 < \delta < 1, \quad \epsilon > 0,$$

что доказывает (4). $\square$

Лемма 3.7. Пусть f — многозначное отображение метрического пространства X . Если $\epsilon_0 > 0$ и $\lambda > 0$ таковы, что $\text{dist}(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y)$ при всех $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $d(x, y) \leq \epsilon_0$, то

$$B_n[x, \epsilon] \subset B[x, \lambda^{1-n}\epsilon] \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0, \quad \forall x \in X.$$

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}^+$, $0 < \epsilon < \epsilon_0$ и $x \in X$. Возьмем $y \in B_n[x, \epsilon]$. Тогда существуют такие последовательности $(x_i)_{i=0}^n$ и $(y_i)_{i=0}^n$, что $x_0 = x$, $y_0 = y$, $x_{i+1} \in f(x_i)$, $y_{i+1} \in f(y_i)$ и $d(x_i, y_i) \leq \epsilon$ при $0 \leq i \leq n-1$.

Так как $\epsilon < \epsilon_0$, имеем $d(x, y) \leq \epsilon_0$ и также $\text{dist}(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y)$. Тогда $d(x_1, y_1) \geq \lambda d(x, y)$. Так как $\epsilon < \epsilon_0$, имеем $d(x_1, y_1) \leq \epsilon_0$ и также $\text{dist}(f(x_1), f(y_1)) \geq \lambda d(x_1, y_1)$. Тогда

$$d(x_2, y_2) \geq \lambda d(x_1, y_1) \geq \lambda^2 d(x, y).$$

Так как $\epsilon < \epsilon_0$, имеем $d(x_2, y_2) \leq \epsilon_0$ и также $\text{dist}(f(x_2), f(y_2)) \geq \lambda d(x_2, y_2)$. Тогда

$$d(x_3, y_3) \geq \lambda d(x_2, y_2) \geq \lambda^3 d(x, y).$$

Повторяя процесс, приходим к неравенству $d(x_{n-1}, y_{n-1}) \geq \lambda^{n-1} d(x, y)$. Тогда

$$d(x, y) \leq \lambda^{1-n} d(x_{n-1}, y_{n-1}) \leq \lambda^{1-n} \epsilon;$$

таким образом, $y \in B[x, \lambda^{1-n}\epsilon]$. □

Доказательство теоремы 1.4. Пусть f — полунепрерывное сверху замкнутозначное отображение компактного метрического пространства X . Пусть μ — вероятностная борелевская мера пространства X с нижней размерностью $\underline{d}(\mu)$. Сначала докажем неравенство

$$h(f, \mu) \geq \underline{d}(\mu) \cdot \log EC(f). \quad (7)$$

Если $\underline{d}(\mu) = 0$ либо $EC(f) \leq 1$, то доказывать нечего. Тогда считаем, что $\underline{d}(\mu) > 0$ и $EC(f) > 1$.

Зафиксируем $0 < \alpha < \underline{d}(\mu)$. Очевидно, $\underline{d}(\mu) - \alpha < \underline{d}(\mu)$. Тогда из определения $\underline{d}(\mu)$ следует (см., например, (3)), что существует такое $0 < \beta < 1$, что

$$\frac{\log \mu(B[x, r])}{\log r} > \underline{d}(\mu) - \alpha \quad \forall 0 < r < \beta, \quad \forall x \in X.$$

Возьмем $0 < r < \beta$ и $x \in X$. Так как $\beta < 1$, $r < 1$, то $\log r < 0$. Таким образом,

$$\log \mu(B[x, r]) < (\underline{d}(\mu) - \alpha) \log r \quad \text{либо} \quad \mu(B[x, r]) < r^{\underline{d}(\mu) - \alpha}$$

при всех $x \in X$. Отсюда получаем

$$\sup_{x \in X} \mu(B[x, r]) \leq r^{\underline{d}(\mu) - \alpha} \quad \forall 0 < r < \beta. \quad (8)$$

Зафиксируем также $1 < \rho^* < EC(f)$. Из определений следует, что существует такое $\epsilon_0 > 0$, что $\text{dist}(f(x), f(y)) \geq \rho^* d(x, y)$, когда $x, y \in X$ удовлетворяют $d(x, y) \geq \epsilon_0$. Так как $\rho^* > 1$, то можно выбрать такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$(\rho^*)^{1-n} \epsilon < \beta \quad \forall n \geq N, \quad \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Заменяя $r = (\rho^*)^{1-n} \epsilon$ в (8), получим

$$\sup_{x \in X} \mu(B[x, (\rho^*)^{1-n} \epsilon]) \leq ((\rho^*)^{1-n} \epsilon)^{\underline{d}(\mu) - \alpha} \quad \forall n \geq N, \quad \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

С другой стороны, комбинируя леммы 3.6 и 3.7, получаем нижнюю оценку

$$h(f, \mu) \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \sup_{x \in X} \mu(B[x, (\rho^*)^{1-n} \epsilon]).$$

Тогда

$$\begin{aligned} h(f, \mu) &\geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log((\rho^*)^{1-n} \epsilon)^{\underline{d}(\mu) - \alpha} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} (\underline{d}(\mu) - \alpha) \log \rho^* - \frac{1}{n} (\underline{d}(\mu) - \alpha) \cdot \log \epsilon \right) \\ &= (\underline{d}(\mu) - \alpha) \log \rho^*. \end{aligned}$$

Полагая $\rho^* \rightarrow EC(f)$ и $\alpha \rightarrow 0^+$, получаем (7).

В заключение заметим, что f^k полунепрерывно сверху при всех $k \in \mathbb{N}^+$, так как f полунепрерывно сверху. Более того, так как f замкнутозначно, можно доказать, как в лемме 3.5, что f^k также замкнутозначно. Следовательно, в (7) можно заменить f на f^k , в результате чего получим

$$h(f^k, \mu) \geq \underline{d}(\mu) \cdot EC(f^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Тогда из леммы 3.2 следует $h(f, \mu) \geq \underline{d}(\mu) \cdot \frac{1}{k} \log EC(f^k)$ для всех $k \in \mathbb{N}^+$, а также

$$h(f, \mu) \geq \underline{d}(\mu) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log EC(f^k) = \underline{d}(\mu) \cdot \xi(f),$$

что завершает доказательство. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динабург Е. И. Соотношение между топологической энтропией и метрической энтропией // Докл. АН СССР. — 1970. — 190, № 1. — С. 19–22.
2. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1985. — 169. — С. 94–98.
3. Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // Докл. АН СССР. — 1959. — 124. — С. 768–771.
4. Хинчин А. Я. Об основных теоремах теории информации // Усп. мат. наук. — 1956. — 11, № 1 (67). — С. 17–75.
5. Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H. Topological entropy // Trans. Am. Math. Soc. — 1965. — 114. — С. 309–319.
6. Akin E. The General Topology of Dynamical Systems. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1993.
7. Aubin J.-P., Cellina A. Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
8. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. — Boston, Massachusetts: Birkhäuser, 2009.
9. Aubin J.-P., Frankowska H., Lasota A. Poincaré's recurrence theorem for set-valued dynamical systems // Ann. Polon. Math. — 1991. — 54, № 1. — С. 85–91.
10. Barreira L. Dimension and Recurrence in Hyperbolic Dynamics. — Basel: Birkhäuser, 2008.
11. Barreira L., Pesin Y., Schmeling J. Dimension and product structure of hyperbolic measures // Ann. Math. (2) — 1999. — 149, № 3. — С. 755–783.
12. Blumenthal L. M. A new concept in distance geometry with applications to spherical subsets // Bull. Am. Math. Soc. — 1941. — 47. — С. 435–443.
13. Boltzmann L. Über die beziehung dem zweiten Haubtsatz der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht // Wiener Berichte. — 1877. — 76. — С. 373–435.
14. Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces // Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — 153. — С. 401–414.
15. Burachik R. S., Iusem A. N. Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators. — New York: Springer-Verlag, 2008.
16. Carrasco-Olivera D., Metzger R., Morales C. A. Topological entropy for set-valued maps // Discr. Contin. Dyn. Syst. Ser. B — 2015. — 20, № 10. — С. 3461–3474.
17. Cheng W.-C., Zhao Y., Cao Y. Pressures for asymptotically sub-additive potentials under a mistake function // Discr. Contin. Dyn. Syst. — 2012. — 32, № 2. — С. 487–497.
18. Clausius R. Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie // Ann. Phys.. — 125. — С. 353–400.

19. *Clausius R.* The Mechanical Theory of Heat with Its Applications to the Steam Engine and to Physical Properties of Bodies. — London: John van Voorst, 1867.
20. *Dai X., Zhou Z., Geng X.* Some relations between Hausdorff dimensions and entropies// *Sci. China Ser. A.* — 1998. — 41, № 10. — С. 1068–1075.
21. *Downarowicz T.* Entropy in Dynamical Systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011.
22. *Fathi A.* Expansiveness, hyperbolicity and Hausdorff dimension// *Commun. Math. Phys.* — 1989. — 126, № 2. — С. 249–262.
23. *Gillam B. E.* A new set of postulates for Euclidean geometry// 42 — 1940. — С. 869–899.
24. *Hirsch M.* Asymptotic phase, shadowing and reaction-diffusion systems// *Lect. Notes Pure Appl. Math.* — 1994. — 152. — С. 87–99.
25. *Katok A.* Fifty years of entropy in dynamics: 1958–2007// *J. Mod. Dyn.* — 2007. — 1, № 4. — С. 545–596.
26. *Katok A.* Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms// *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1980. — 51. — С. 137–173.
27. *Maschler M., Peleg B.* Stable sets and stable points of set-valued dynamic systems with applications to game theory// *SIAM J. Control Optim.* — 1976. — 14, № 6. — С. 985–995.
28. *Mañé R.* Expansive homeomorphisms and topological dimension// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1979. — 252. — С. 313–319.
29. *McMillan B.* The basic theorems of information theory// *Ann. Math. Stat.* — 1953. — 24. — С. 196–219.
30. *Reddy W. L.* Expanding maps on compact metric spaces// *Topol. Appl.* — 1982. — 13, № 3. — С. 327–334.
31. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1997.
32. *Schreiber S.* Expansion rates and Lyapunov exponents// *Discr. Contin. Dynam. Syst.* — 1997. — 3, № 3. — С. 433–438.
33. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communication// *Bell System Tech. J.* — 1948. — 27. — С. 379–423, 623–656.
34. *Sinai Y.* Kolmogorov–Sinai entropy// *Scholarpedia.* — 2009. — 4, № 3. — С. 2034.
35. *Tarafdar E., Watson P., Yuan X.-Z.* Poincaré’s recurrence theorems for set-valued dynamical systems// *Appl. Math. Lett.* — 1997. — 10, № 6. — С. 37–44.
36. *Tarafdar E., Yuan X.-Z.* The set-valued dynamic system and its applications to Pareto optima// *Acta Appl. Math.* — 1997. — 46, № 1. — С. 93–106.
37. *von Neumann J.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1968 (in German).
38. *Walters P.* An Introduction to Ergodic Theory. — New York–Berlin: Springer-Verlag, 1982.
39. *Williams R. K.* A note on expansive mappings// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1969. — 22. — С. 145–147.

Carrasco-Olivera D.

Университет Био-Био, Консепсьон, Чили

E-mail: dcarrasc@ubiobio.cl

Metzger R.

Национальный инженерный университет, Лима, Перу

E-mail: metzger@imca.edu.pe

Morales C. A.

Федеральный университет Рио-де-Жанейро, Рио-де-Жанейро, Бразилия

E-mail: morales@impa.br