Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю.-К. Чан, Д. Альзабут, Р. Понсе, Ограниченные решения функциональных интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при изучении теплопроводности в материалах с памятью, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 178, 41–56

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-178-41-56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:53:46

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 178 (2020). С. 41–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-178-41-56

УДК 517.968.7

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МАТЕРИАЛАХ С ПАМЯТЬЮ

© 2020 г. ЮН-КУЙ ЧАН, ДЖ. АЛЬЗАБУТ, Р. ПОНСЕ

Аннотация. В статье рассмотрено рекуррентное поведение ограниченных решений функционального интегро-дифференциального уравнения, возникающего при теплопроводности в материалах с памятью. Приведена новая версия теоремы о композиции псевдо-почти-автоморфных по мере функций, участвующих в запаздывании. На основе недавно полученных результатов о равномерной экспоненциальной устойчивости и принципа сжимающего отображения доказаны теоремы существования и единственности рекуррентности ограниченных мягких решений уравнений с бесконечным запаздыванием. Приведен пример интегро-дифференциального уравнения в частных производных, возникающего при изучении теплопроводности.

Ключевые слова: почти автоморфность, ограниченное решение, интегро-дифференциальное уравнение, бесконечное запаздывание.

BOUNDED SOLUTIONS TO FUNCTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ARISING FROM HEAT CONDUCTION IN MATERIALS WITH MEMORY

© 2020 Y.-K. CHANG, J. ALZABUT, R. PONCE

ABSTRACT. In this paper, we consider recurrent behavior of bounded solutions of a functional integro-differential equation arising in the theory of heat conduction in materials with memory. We give a new version of the theorem on the composition of measure pseudo-almost-automorphic functions involved in delay. Based on recently obtained results on the uniform exponential stability and the contraction mapping principle, we prove some existence and uniqueness theorems for the recurrence of bounded mild solutions of equations with infinite delay. Also, we present an example of a partial integro-differential equation appearing in the study of heat conduction.

Keywords and phrases: almost automorphy, bounded solution, integro-differential equation, infinite delay.

AMS Subject Classification: 34K14, 43A60, 45N05, 45D05

Работа Ю.-К. Чана выполнена при поддержке грантов NSFC (11361032), FRFCUC (JB160713) и NSFRP провинции Шанхай (2017JM1017).

Работа Дж. Альзабута выполнена при поддержке Университета принца Султана (проект NAMAM № RG-DES-2017-01-17).

Работа Р. Понсе выполнена при поддержке гранта Fondecyt 11130619.

1. Введение. Обозначим через $u = u(x, t)$ температуру в положении $x \in \mathcal{D}$ в момент времени t , (где $\mathcal{D}$ — ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$), через $\mathbf{q} = q(x, t)$ — тепловой поток. Классическое уравнение теплопроводности $u_t = \lambda \Delta u$ описывает эволюцию температуры в различных типах материалов, где $\lambda > 0$ — коэффициент термодиффузии. Однако это описание не столь удовлетворительно для материалов с памятью. Для задачи теплопроводности в материалах с памятью Гуртин и Пипкин (см. [18]) доказали, что после линейаризации плотность $e(x, t)$ внутренней энергии и тепловой поток $\mathbf{q}$ связаны соотношениями

$$e(x, t) = \nu u(x, t) + \int_{-\infty}^t b(t-s)u(x, s)ds, \quad q(x, t) = - \int_{-\infty}^t a(t-s)\nabla u(x, s)ds, \quad (1)$$

где $\nu \neq 0$ называется теплоемкостью, а $a(\cdot), b(\cdot)$ — положительные функции тепловой релаксации. С другой стороны, Коулман и Гуртин (см. [11]) рассматривали тепловой поток как возмущение закона Фурье, т.е.

$$q(x, t) = -\gamma \nabla u(x, t) - \int_{-\infty}^t a(t-s)\nabla u(x, s)ds, \quad (2)$$

где $\gamma > 0$ — постоянная теплопроводности. Предполагается, что функция тепловой релаксации $a(\cdot)$ принадлежит классу $L^1(\mathbb{R}_+)$ — пространству всех интегрируемых функций на $[0, \infty)$.

В силу уравнений (1) и (2) можно сформулировать следующее уравнение теплопроводности в материалах с памятью:

$$\nu \partial_t u(x, t) = \gamma \Delta u(x, t) + \int_{-\infty}^t a(t-s)\Delta u(x, s)ds + f(x, t, u(x, t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f(x, t, u)$ — запас энергии, который может зависеть от температуры. Это уравнение можно записать в абстрактной форме

$$u'(t) = Au(t) + \int_{-\infty}^t a(t-s)Au(s)ds + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $A : D(A) \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ — замкнутый линейный оператор, определенный в банаховом пространстве $\mathbb{X}$, $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и f — любая подходящая функция.

Интересным выбором $a(\cdot)$ в уравнении (3) является

$$a(t) := \alpha \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} e^{-\beta t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \quad \tau \geq 1,$$

где $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию. В случае $\tau = 1$ уравнение (3) сводится к

$$u'(t) = Au(t) + \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} Au(s)ds + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Существование и регулярность ограниченных мягких решений этого уравнения были исследованы, например, в [9, 27]. Заметим, что в предельном случае $\beta = 0$ уравнение (3) преобразуется в следующее дифференциальное уравнение дробного порядка:

$$D^{\tau+1}u(t) = AD^{\tau}u(t) + \alpha Au(t) + F(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где D^{τ} обозначает дробную производную Вейля (см. [36]). Это уравнение изучалось в [3, 24]. В недавней работе [8] исследованы равномерная экспоненциальная устойчивость, существование и единственность ограниченных мягких решений уравнения (3) при общем выборе функции-ядра $a(t)$.

Хорошо известно, что эффект запаздывания неизбежен, особенно для эволюционных систем, реакция которых зависит от прошлого. Следовательно, рассмотрение дифференциальных уравнений или интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием дает лучшее описание для моделирования эволюции физических систем (см. [19, 23, 31]). В последнее время большое внимание уделяется исследованию рекуррентности ограниченных решений для различных типов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений (см., например, [2, 6, 13, 17, 20–22, 32] и ссылки в этих работах).

В этой статье мы рассмотрим следующее полулинейное функциональное интегро-дифференциальное уравнение с бесконечным запаздыванием:

$$u'(t) = Au(t) + \int_{-\infty}^t a(t-s)Au(s)ds + f(t, u_t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

где

$$a(t) := \alpha \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} e^{-\beta t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta > 0, \quad \tau \geq 1,$$

оператор A порождает непрерывную по норме C_0 -полугруппу на банаховом пространстве $\mathbb{X}$ и $u(t) \in \mathbb{X}$. Функция $u_t : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{X}$, обозначающая интервал значений $u(\cdot)$ в момент t , определяется как $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, где $\theta \in (-\infty, 0]$, и $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{X}$ — любая подходящая функция. Предполагается, что $u_t, t \geq 0$ принадлежит фазовому пространству $\mathfrak{B}$, определенному аксиоматически. Для того чтобы работать с рекуррентностью ограниченных решений уравнения (4), доказывается новая версия теоремы о композиции измеримых псевдо-почти-автоморфных функций, участвующих в запаздывании. Недавно установленный результат (см. [8]) о равномерной экспоненциальной устойчивости уравнения (3) используется для исследования существования и единственности рекуррентных ограниченных мягких решений уравнения (4). В конце работы приведен пример интегро-дифференциального уравнения в частных производных, демонстрирующий практическую применимость полученных результатов. Насколько известно, существование и единственность измеримых псевдо-почти-автоморфных решений уравнения ранее не исследовались. Основные результаты можно рассматривать как обобщение результатов, полученных в [6, 13, 17, 20–22].

2. Предварительный материал. Этот раздел посвящен некоторым предварительным результатам, необходимым в дальнейшем. На протяжении всей статьи $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ обозначает банахово пространство, $BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ — банахово пространство ограниченных непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{X}$, снабженное нормой $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$. Обозначим также через $\mathfrak{L}(\mathbb{X})$ пространство всех ограниченных линейных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$, снабженное равномерной операторной топологией.

Сначала напомним некоторые основные результаты о почти автоморфных функциях.

Определение 1 (см. [28]). Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ называется *почти автоморфной*, если для каждой последовательности действительных чисел $\{s'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ существует такая подпоследовательность $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что

$$g(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n)$$

корректно определена для каждого $t \in \mathbb{R}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n) = f(t)$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$. Обозначим через $AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ совокупность всех таких функций.

Определение 2 (см. [25, 28]). Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ называется *почти автоморфной*, если $f(t, y)$ является почти автоморфной по $t \in \mathbb{R}$ при всех $y \in \mathbb{B}$, где $\mathbb{B}$ — любое ограниченное подмножество в $\mathbb{Y}$. Обозначим через $AA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X})$ совокупность всех таких функций.

Некоторые фундаментальные свойства и важные обобщения почти автоморфных функций можно найти в [4, 15, 28, 34]. Наиболее мощным обобщением является так называемая псевдо-почти-автоморфность по мере (см. [5]).

Пусть $\mathcal{B}$ — лебегово σ -поле пространства $\mathbb{R}$, а $\mathcal{M}$ — множество всех положительных мер μ на $\mathcal{B}$, удовлетворяющих условиям $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$ и $\mu([a, b]) < +\infty$ для всех $a < b$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Для $\mu \in \mathcal{M}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ обозначим через μ_τ положительную меру на $\mathcal{B}$, определенную формулой

$$\mu_\tau(\mathbb{A}) = \mu(\{a + \tau : a \in \mathbb{A}\}), \quad \mathbb{A} \in \mathcal{B}.$$

На протяжении всей статьи предполагается, что справедлива следующая гипотеза:

(a0) Для всех $\tau \in \mathbb{R}$ существуют такие $\eta > 0$ и ограниченный интервал I , что $\mu_\tau(\mathbb{A}) \leq \eta\mu(\mathbb{A})$, где $\mathbb{A} \in \mathcal{B}$ удовлетворяет условию $\mathbb{A} \cap I = \emptyset$ (см. [5]).

Определение 3 (см. [5]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Ограниченная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ называется μ -эргодической, если

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \|f(t)\| d\mu(t) = 0.$$

Обозначим пространство всех таких функций через $\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu)$.

Определение 4 (см. [5]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ называется μ -псевдо-почти-автоморфной, если f имеет вид $f = g + \phi$, где $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ и $\phi \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu)$. Обозначим пространство всех таких функций через $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu)$.

Определение 5 (см. [5]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ называется μ -псевдо-почти-автоморфной, если f имеет вид $f = g + \phi$, где $g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X})$, $\phi \in \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu)$ и

$$\varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu) := \left\{ \begin{array}{l} \phi \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \|\phi(t, y)\| d\mu(t) = 0 \\ \text{равномерно для } y \text{ в любом ограниченном подмножестве } \mathbb{Y} \end{array} \right\}.$$

Обозначим пространство всех таких функций через $PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu)$.

Заметим, что понятие μ -псевдо-почти-автоморфной функции является обобщением псевдо-почти-автоморфных функций (известных как $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, см. [34]) и взвешенных псевдо-почти-автоморфных функций (известных как $WPAA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, см. [4]). Также известно следующее соотношение:

$$AA(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset WPAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

Чтобы изучить вопросы, связанные с запаздыванием в рамках теории меры, необходимо ввести новые пространства функций, определенные для каждого $h > 0$ следующим образом:

$$\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h) := \left\{ \phi \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|\phi(\theta)\| \right) d\mu(t) = 0 \right\},$$

$$\varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h) := \left\{ \begin{array}{l} \phi \in BC(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}) : \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|\phi(\theta, y)\| \right) d\mu(t) = 0 \\ \text{равномерно по } y \text{ в любом ограниченном подмножестве } \mathbb{Y} \end{array} \right\}.$$

Определение 6 (см. [7]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ называется μ -псевдо-почти-автоморфной класса h , если f имеет вид $f = g + \phi$, где $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ и $\phi \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$. Обозначим пространство всех таких функций через $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$.

Определение 7 (см. [7]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ называется μ -псевдо-почти-автоморфной класса h , если f имеет вид $f = g + \phi$, где $g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X})$ и $\phi \in \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$. Обозначим пространство всех таких функций через $PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$.

Лемма 1 (см. [7]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Тогда $(\varepsilon(\mathbb{X}, \mu, h), \|\cdot\|_\infty)$ — банахово пространство.

Для работы с бесконечным запаздыванием введем следующие новые пространства функций:

$$\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty) := \bigcap_{h \geq 0} \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h), \quad \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, \infty) := \bigcap_{h \geq 0} \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h).$$

Очевидно, что $\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ и $\varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ являются замкнутыми подпространствами в $\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$ и $\varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$ соответственно, и, следовательно, оба являются банаховыми пространствами.

Определение 8 (см. [7]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ называется μ -псевдо-почти-автоморфной класса ∞ , если f имеет вид $f = g + \phi$, где $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ и $\phi \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$. Обозначим пространство всех таких функций через $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$.

Определение 9 (см. [7]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ называется μ -псевдо-почти-автоморфной класса ∞ , если f имеет вид $f = g + \phi$, где $g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X})$ и $\phi \in \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$. Обозначим пространство всех таких функций через $PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$.

Отметим следующие существенные результаты работы [5].

Лемма 2. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ и I — ограниченный интервал (в дальнейшем $I = \emptyset$). Предположим, что $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $f \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$;
- (ii) имеет место предельное равенство

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu([-r, r] \setminus I)} \int_{[-r, r] \setminus I} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|f(\theta)\| \right) d\mu(t) = 0;$$

- (iii) для любого $\epsilon > 0$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu \left(\left\{ t \in [-r, r] \setminus I : \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|f(\theta)\| \right) > \epsilon \right\} \right)}{\mu([-r, r] \setminus I)} = 0.$$

Лемма 3. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию (a0). Тогда пространство $\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$ (а следовательно, и $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$) инвариантны относительно сдвигов.

Лемма 4. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Если $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$ инвариантно относительно сдвигов, то $(PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h), \|\cdot\|_\infty)$ — банахово пространство.

Лемма 5. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$. Предположим, что $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$ инвариантно относительно сдвигов. Тогда разложение μ -псевдо-почти-автоморфной функции класса h в виде $f = g + \phi$, где $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ и $\phi \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$ единственно.

В этой работе используется аксиоматическое определение фазового пространства $\mathfrak{B}$, введенное в [23]: $\mathfrak{B}$ — это векторное пространство функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в $\mathbb{X}$, снабженное полунормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$, причем выполняются следующие аксиомы:

- (A) Если $x : (-\infty, \sigma + a) \rightarrow \mathbb{X}$, $a > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, непрерывна на $[\sigma, \sigma + a)$ и $x_\sigma \in \mathfrak{B}$, то при каждом $t \in [\sigma, \sigma + a)$ выполнены следующие требования:
  - (i) x_t находится в $\mathfrak{B}$;
  - (ii) $\|x(t)\| \leq H\|x_t\|_{\mathfrak{B}}$;
  - (iii) $\|x_t\|_{\mathfrak{B}} \leq K(t - \sigma) \sup \{\|x(s)\| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t - \sigma)\|x_\sigma\|_{\mathfrak{B}}$, где $H > 0$ — постоянная; $K, M : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, K непрерывна, M локально ограничена, причем H, K, M не зависят от $x(\cdot)$.
- (B) Для функции $x(\cdot)$, удовлетворяющей (A), функция $t \rightarrow x_t$, отображающая $[\sigma, \sigma + a)$ в $\mathfrak{B}$, непрерывна.
- (C) Пространство $\mathfrak{B}$ является полным.

- (D) Если $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ является ограниченной последовательностью в $BC((-\infty, 0], \mathbb{X})$, заданной функциями с компактным носителем, и $\varphi^n \rightarrow \varphi$ в компактно-открытой топологии, то $\varphi \in \mathfrak{B}$ и $\|\varphi^n - \varphi\|_{\mathfrak{B}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\mathfrak{B}_0 = \{\varphi \in \mathfrak{B} : \varphi(0) = 0\}$ и $T(t) : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ является $\mathcal{C}_0$ -полугруппой, заданной соотношением

$$T(t)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(0) & \text{на } [-t, 0], \\ \varphi(t + \theta) & \text{на } (-\infty, -t]. \end{cases}$$

Тогда фазовое пространство $\mathfrak{B}$ называется *пространством с исчезающей памятью*; для него выполнена аксиома (D) и

$$\|T(t)\varphi\|_{\mathfrak{B}} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \text{ для каждого } \varphi \in \mathfrak{B}_0.$$

Если для пространства $\mathfrak{B}$ выполнена аксиома (D) и

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{B}_0)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

то $\mathfrak{B}$ называется *равномерным пространством с исчезающей памятью*.

Замечание 1. Если аксиома (D) верна, то пространство $BC((-\infty, 0], \mathbb{X})$ непрерывно вкладывается в $\mathfrak{B}$. Таким образом, предполагается, что $\varsigma > 0$ таково, что

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq \varsigma \sup_{\theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\| \quad \text{для каждого } \varphi \in \mathfrak{B} \cap BC((-\infty, 0], \mathbb{X}).$$

Кроме того, если $\mathfrak{B}$ является пространством с исчезающей памятью, то функции $K(\cdot)$ и $M(\cdot)$ в аксиоме (A) ограничены (см. [23]).

Пример 1. Рассмотрим фазовое пространство $C_r \times L^p(\rho, \mathbb{X})$. Предположим, что $r \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ и $\rho : (-\infty, -r] \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая некоторым надлежащим условиям (см. [23]): ρ локально интегрируема, причем существует такая неотрицательная локально ограниченная функция γ на $(-\infty, 0]$, что

$$\rho(\xi + \theta) \leq \gamma(\xi)\rho(\theta) \quad \text{для всех } \xi \leq 0 \text{ и } \theta \in (-\infty, -r]/N_\epsilon,$$

где $N_\epsilon \subset (-\infty, -r]$ — множество, мера Лебега которого равна нулю. Пусть $\mathfrak{B} = C_r \times L^p(\rho, \mathbb{X})$ обозначает множество всех таких функций $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{X}$, что φ непрерывна на $[-r, 0]$, измерима по Лебегу, а $\rho\|\varphi\|^p$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty, -r)$. Полунорма на $C_r \times L^p(\rho, \mathbb{X})$ имеет вид

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\varphi(\theta)\| + \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(\theta) \|\varphi(\theta)\|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Пространство $\mathfrak{B} = C_r \times L^p(\rho, \mathbb{X})$ удовлетворяет аксиомам (A)–(C). Кроме того, для $r = 0$, $p = 2$ можно выбрать

$$H = 1, \quad K(t) = 1 + \left(\int_{-t}^0 \rho(\theta) d\theta \right)^{1/2}, \quad M(t) = \gamma(-t)^{1/2}, \quad t \geq 0$$

(см. [23, Theorem 1.3.8]). Вдобавок $\mathfrak{B}$ может быть равномерным пространством с исчезающей памятью при некоторых дополнительных условиях (см. [23]).

Следующий результат касается μ -псевдо-почти-автоморфных функций в фазовом пространстве.

Лемма 6 (см. [7]). Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию (a0) и $u \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$. Предположим, что $\mathfrak{B}$ является равномерным пространством с исчезающей памятью. Тогда функция $t \mapsto u_t$ принадлежит пространству $PAA(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu, \infty)$.

Наконец, напомним некоторые основные результаты, связанные с интегро-дифференциальным уравнением (3) (подробные доказательства этих результатов можно найти в [8]). Рассмотрим следующее однородное абстрактное уравнение Вольтерра:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)ds, & t \geq 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (5)$$

и линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$u'(t) = Au(t) + \int_{-\infty}^t a(t-s)Au(s)ds + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где

$$a(t) := \alpha \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} e^{-\beta t}, \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \tau \geq 1,$$

A образует $\mathcal{C}_0$ -полугруппу на банаховом пространстве $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$, $x \in \mathbb{X}$ и $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Решение уравнения (5) называется *равномерно экспоненциально устойчивым*, если существуют такие $\omega > 0$ и $C > 0$, что для каждого $x \in D(A)$ соответствующее решение $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\| \leq Ce^{-\omega t} \|x\|, \quad t \geq 0.$$

Сильно непрерывная функция $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{X})$ называется *непосредственно непрерывной по норме*, если $T : (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{X})$ непрерывна.

Лемма 7 (см. [8]). Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$, $\tau \geq 1$ таковы, что $\operatorname{Re}((- \alpha)^{1/\tau} - \beta) < 0$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (a) A порождает непосредственно непрерывную по норме $\mathcal{C}_0$ -полугруппу в банаховом пространстве $\mathbb{X}$;
- (b) $\sup \left\{ \operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \mathbb{C} : \lambda(\lambda + \beta)^\tau ((\lambda + \beta)^\tau + \alpha)^{-1} \in \sigma(A) \right\} < 0$.

Тогда решения задачи (5) являются равномерно экспоненциально устойчивыми.

Лемма 8 (см. [8]). Пусть

$$a(t) := \alpha \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} e^{-\beta t}, \quad \alpha \neq 0, \beta > 0, \tau \geq 1, \quad \operatorname{Re}((- \alpha)^{1/\tau} - \beta) < 0.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

- (a) A порождает непосредственно непрерывную по норме $\mathcal{C}_0$ -полугруппу в банаховом пространстве $\mathbb{X}$;
- (b) $\sup \left\{ \operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \mathbb{C} : \lambda(\lambda + \beta)^\tau ((\lambda + \beta)^\tau + \alpha)^{-1} \in \sigma(A) \right\} < 0$.

Тогда существует сильно непрерывное семейство операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathfrak{L}(\mathbb{X})$, которое является равномерно экспоненциально устойчивым, т.е. существуют такие $C, \omega > 0$, что $\|S(t)\| \leq Ce^{-\omega t}$ при всех $t \geq 0$, и $S(t)$ коммутирует с A , т.е. $S(t)D(A) \subset D(A)$, $AS(t)x = S(t)Ax$ для всех $x \in D(A)$, $t \geq 0$ и

$$S(t)x = x + \int_0^t b(t-s)AS(s)x ds \text{ для всех } x \in \mathbb{X}, t \geq 0,$$

где

$$b(t) := 1 + \int_0^t a(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Лемма 9 (см. [8]). *Предположим, что выполнены все условия леммы 8. Тогда мягкое решение уравнения (6) можно записать в следующем виде:*

$$u(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ задается в лемме 8.

Дополнительную информацию об интегро-дифференциальных уравнениях см. в [1, 10, 14, 16, 26, 29, 30, 33].

3. Основные результаты. В этом разделе исследуется рекуррентность ограниченных решений уравнения (4). Для этого будет доказана новая версия теоремы о композиции μ -псевдо-почти-автоморфных функций, участвующих в запаздывании, т.е. теоремы о композиции μ -псевдо-почти-автоморфных функций класса h . Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ и множество $\mathcal{B}(r, \mu, h)$ имеет вид

$$\mathcal{B}(r, \mu, h) := \left\{ l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} l(\theta) \right) d\mu(t) < \infty \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ и $f = g + m \in PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$, где $g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X})$, $m \in \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(a1) *Существует такая функция $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{B}(r, \mu, h)$, что*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \mathcal{L}(t)\|x - y\|$$

для всех $x, y \in \mathbb{Y}$ и $t \in \mathbb{R}$.

(a2) *функция $g(t, x)$ равномерно непрерывна в любом ограниченном подмножестве $K' \subset \mathbb{Y}$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$.*

Если $u = u_1 + u_2 \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{Y}, \mu, h)$, где $u_1 \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{Y})$, $u_2 \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{Y}, \mu, h)$, то функция $f(\cdot, u(\cdot))$ принадлежит классу $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$.

Доказательство. Поскольку $f \in PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$ и $u \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{Y}, \mu, h)$, то по определению имеем $f = g + m$ и $u = u_1 + u_2$, где $g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X})$, $m \in \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$, $u_1 \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{Y})$ и $u_2 \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{Y}, \mu, h)$. Функция f может быть разложена следующим образом:

$$f(t, u(t)) = g(t, u_1(t)) + f(t, u(t)) - g(t, u_1(t)) = g(t, u_1(t)) + f(t, u(t)) - f(t, u_1(t)) + m(t, u_1(t)).$$

Определим

$$G(t) = g(t, u_1(t)), \quad F(t) = f(t, u(t)) - f(t, u_1(t)), \quad M(t) = m(t, u_1(t)).$$

Тогда $f(t, u(t)) = G(t) + F(t) + M(t)$. Поскольку функция g удовлетворяет условию **(a2)**, то из [25, Lemma 2.2] следует, что $g(\cdot, u_1(\cdot)) \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Для того, чтобы показать, что $f(\cdot, u(\cdot)) \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$, достаточно показать, что $F + M \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$.

Сначала докажем, что $F \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$. Ясно, что $f(t, u(t)) - f(t, u_1(t)) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Без ограничения общности будем полагать, что $\|f(t, u(t)) - f(t, u_1(t))\| \leq \mathcal{C}$. Вследствие леммы 2(iii) и того факта, что $u_2 \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{Y}, \mu, h)$, получаем, что для любого $\epsilon > 0$ выполнено равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu \left(\left\{ t \in [-r, r] : \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|u_2(\theta)\| \right) > \epsilon \right\} \right)}{\mu([-r, r])} = 0.$$

Введем множество

$$A_{r, \epsilon}(v) := \left\{ t \in [-r, r] : \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|v(\theta)\| \right) > \epsilon \right\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|F(\theta)\| \right) d\mu(t) = \\
& = \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|f(\theta, u(\theta)) - f(\theta, u_1(\theta))\| \right) d\mu(t) = \\
& = \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{A_{r, \epsilon}(u_2)} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|f(\theta, u(\theta)) - f(\theta, u_1(\theta))\| \right) d\mu(t) + \\
& \quad + \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r] \setminus A_{r, \epsilon}(u_2)} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|f(\theta, u(\theta)) - f(\theta, u_1(\theta))\| \right) d\mu(t) \leq \\
& \leq C \frac{\mu \left(\left\{ t \in [-r, r] : \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|u_2(\theta)\| \right) > \epsilon \right\} \right)}{\mu([-r, r])} + \\
& \quad + \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r] \setminus A_{r, \epsilon}(u_2)} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \mathcal{L}(\theta) \|u_2(\theta)\| \right) d\mu(t) \leq \\
& \leq C \frac{\mu \left(\left\{ t \in [-r, r] : \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|u_2(\theta)\| \right) > \epsilon \right\} \right)}{\mu([-r, r])} + \epsilon \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \mathcal{L}(\theta) \right) d\mu(t).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание тот факт, что $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{B}(r, \mu, h)$, получаем соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|F(t)\| \right) d\mu(t) = 0,$$

показывающее, что $F(\cdot) \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$.

Далее покажем, что $M \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$. Поскольку $u(t)$, $u_1(t)$ ограничены, то можно выбрать такое ограниченное подмножество $\mathbb{B} \subset \mathbb{Y}$, что $u(\mathbb{R}), u_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{B}$. Так как g удовлетворяет условию **(a2)**, то для любого $\epsilon > 0$ существует такая постоянная $\delta > 0$, что $x, y \in \mathbb{B}$ и $\|x - y\| \leq \delta$ влечет $\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq \epsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Положим $\delta_0 = \min\{\epsilon, \delta\}$; тогда

$$\|m(t, x) - m(t, y)\| \leq \|f(t, x) - f(t, y)\| + \|g(t, x) - g(t, y)\| \leq (\mathcal{L}(t) + 1)\epsilon$$

для всех $x, y \in \mathbb{B}$, удовлетворяющих условию $\|x - y\| \leq \delta_0$.

Зададим $\mathbb{I} = u_1([-r, r])$. Поскольку образ компакта при непрерывном отображении компактен, то $\mathbb{I}$ компактно в $\mathbb{R}$. Таким образом, можем найти конечные открытые шары O_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с центром $x_k \in \mathbb{I}$ и радиусом δ , достаточно малым для того, чтобы выполнялось $\mathbb{I} \subset \bigcup_{k=1}^m O_k$ и

$$\|m(t, u_1(t)) - m(t, x_k)\| \leq (\mathcal{L}(t) + 1)\epsilon, \quad u_1(t) \in O_k, \quad t \in [-r, r].$$

Пусть $\|m(t, x_q)\| = \max_{1 \leq k \leq m} \|m(t, x_k)\|$, где q — это индекс, выбираемый из $\{1, 2, \dots, m\}$. Множество

$B_k = \{t \in [-r, r] : u_1(t) \in O_k\}$ открыто в $[-r, r]$ и $[-r, r] = \bigcup_{k=1}^m B_k$. Пусть

$$E_1 = B_1, \quad E_k = B_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j, \quad 2 \leq k \leq m.$$

Тогда $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|m(\theta, u_1(\theta))\| \right) d\mu(t) = \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{\bigcup_{k=1}^m E_k} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|m(\theta, u_1(\theta))\| \right) d\mu(t) \leq \\
& \leq \frac{1}{\mu([-r, r])} \sum_{k=1}^m \int_{E_k} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} (\|m(\theta, u_1(\theta)) - m(\theta, x_k)\| + \|m(\theta, x_k)\|) \right) d\mu(t) \leq \\
& \leq \frac{1}{\mu([-r, r])} \sum_{k=1}^m \int_{E_k} \sup_{\theta \in [t-h, t]} (\mathcal{L}(\theta) + 1) \epsilon d\mu(t) + \frac{1}{\mu([-r, r])} \sum_{k=1}^m \int_{E_k} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|m(\theta, x_k)\| \right) d\mu(t) \leq \\
& \leq \epsilon \left[1 + \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \sup_{\theta \in [t-h, t]} \mathcal{L}(\theta) d\mu(t) \right] + \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|m(\theta, x_q)\| \right) d\mu(t).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание включения $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{B}(r, \mu, h)$ и $m \in \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$, получаем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \left(\sup_{\theta \in [t-h, t]} \|m(\theta, u_1(\theta))\| \right) d\mu(t) = 0,$$

т.е. $m(\cdot, u_1(\cdot)) \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$. Таким образом, $f(\cdot, u(\cdot)) \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$, что завершает доказательство. $\square$

Замечание 2. Пусть $\mathcal{L}(t) \equiv L > 0$. Условие **(a1)** превращается в условие Липшица, а теорема 1 сводится к [7, Theorem 3.1]. Теорема 1 также обобщает [7, Theorem 3.2].

Из доказательства теоремы 1 можно вывести следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ и $m \in \varepsilon(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, h)$. Предположим, что выполнено следующее условие:

(H) существует такая функция $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{B}(r, \mu, h)$, что для любого ограниченного подмножества $Q \subset \mathbb{Y}$ и для каждого $\epsilon > 0$ существует постоянная $\delta > 0$, для которой

$$\|m(t, x) - m(t, y)\| \leq \mathcal{L}(t)\epsilon$$

при всех $x, y \in Q$, $\|x - y\| \leq \delta$ и $t \in \mathbb{R}$.

Тогда $m(\cdot, u_1(\cdot)) \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, h)$ для любых $u_1 \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{Y})$.

Одним из следствий леммы 6 является следующий измененный вариант теоремы 1.

Следствие 2. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$, $f \in PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{Y}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ и $u \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{Y}, \mu, \infty)$. Предположим, что условия теоремы 1 выполнены для каждого $h > 0$. Тогда функция $t \mapsto f(t, u(t))$ принадлежит пространству $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$.

Лемма 10. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$, $f \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ и предположим, что выполнены все условия леммы 8. Тогда функция

$$u(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

принадлежит пространству $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$.

Доказательство. В силу леммы 8 резольвента семейства $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ является равномерно экспоненциально устойчивой, т.е. существуют такие $\omega > 0$ и $C > 0$, что $\|S(t)\| \leq Ce^{-\omega t}$ для всех $t \geq 0$. Таким образом, функция u корректно определена. Поскольку $f \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$, то $f = g + m$, где $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $m \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ таковы, что

$$u(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)g(s)ds + \int_{-\infty}^t S(t-s)m(s)ds.$$

Введем обозначения

$$G(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)g(s) ds, \quad M(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)m(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из доказательства [12, Lemma 3.1] следует, что функция $t \rightarrow G(t)$ почти автоморфна. Для завершения доказательства покажем, что $M(t) \in \varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu)$. Для $r > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \sup_{\theta \in [t-h, t]} \|M(\theta)\| d\mu(t) &\leq \\ &\leq \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \sup_{\theta \in [t-h, t]} \int_{-\infty}^{\theta} \|S(\theta-s)\| \cdot \|m(s)\| ds d\mu(t) \leq \\ &\leq \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \sup_{\theta \in [t-h, t]} \int_0^{\infty} \|S(s)\| \cdot \|m(\theta-s)\| ds d\mu(t) \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} C e^{-\omega s} \left(\frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \sup_{\theta \in [t-h, t]} \|m(\theta-s)\| d\mu(t) \right) ds. \end{aligned}$$

Теперь, используя инвариантность относительно сдвигов пространства $\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$, получаем, что $t \rightarrow m(t-s)$ принадлежит $\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ при каждом $s \in \mathbb{R}$. Более того, поскольку $e^{-\omega s}$ интегрируема на $[0, \infty)$, то из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu([-r, r])} \int_{[-r, r]} \sup_{\theta \in [t-h, t]} \|M(\theta)\| d\mu(t) = 0. \quad \square$$

Введем следующие условия:

(a3) Пусть

$$a(t) := \alpha \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} e^{-\beta t}, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta > 0, \quad \tau \geq 1, \quad \operatorname{Re}((- \alpha)^{1/\tau} - \beta) < 0.$$

Предположим, что

(a) A порождает непосредственно непрерывную по норме $\mathcal{C}_0$ -полугруппу в банаховом пространстве $\mathbb{X}$;

(b) $\sup \{ \operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \mathbb{C} : \lambda(\lambda + \beta)^\tau ((\lambda + \beta)^\tau + \alpha)^{-1} \in \sigma(A) \} < 0$.

(a4) Пусть $\mathfrak{B}$ является равномерным пространством с исчезающей памятью и $f = g + m \in PAA(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$, где g удовлетворяет условию **(a2)** теоремы 1. Предположим, что существует такая постоянная $L > 0$, что

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq L \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathfrak{B}}$$

для всех $(t, \psi_i) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{B}, i = 1, 2$.

(a5) Пусть $\mathfrak{B}$ является равномерным пространством с исчезающей памятью и $f = g + m \in PAA(\mathbb{R} \times \mathfrak{B}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$, где g удовлетворяет условию **(a2)** теоремы 1. Предположим, что для каждого $h > 0$ существует такая функция $l_f(\cdot) \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \cap \mathcal{B}(r, \mu, h)(1 \leq p < +\infty)$, что

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq l_f(t) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathfrak{B}}$$

для всех $(t, \psi_i) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{B}, i = 1, 2$.

Определение 10. Пусть выполнено условие **(a3)**. Непрерывная функция $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ называется *мягким решением* (mild solution) уравнения (4), если $u_s \in \mathfrak{B}$ для $s \in (-\infty, t]$ и выполнено следующее интегральное уравнение

$$u(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)f(s, u_s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ определено в лемме 8.

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия **(a3)**–**(a4)**. Тогда уравнение (4) имеет единственное μ -псевдо-почти-автоморфное мягкое решение, если $\varsigma L < \omega/C$, где ς введено в замечании 1 и C, ω — постоянные из леммы 8.

Доказательство. Пусть $\Upsilon : PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty) \rightarrow BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ обозначает нелинейный оператор

$$\Upsilon u(t) := \int_{-\infty}^t S(t-s)f(s, u_s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из условия **(a3)** следует, что лемма 8 выполнена. Более того, легко показать, что Υu корректно определена и непрерывна. Из леммы 6, замечания 2, следствия 2 и леммы 10 вытекает, что для каждой функции $u \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ имеем $\Upsilon u \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$. Таким образом, Υ отображает $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ в $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$. При этом для $u, v \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \|(\Upsilon u)(t) - (\Upsilon v)(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|S(t-s)[f(s, u_s) - f(s, v_s)]\|ds \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^t L\|S(t-s)\|\|u_s - v_s\|_{\mathfrak{B}}ds \leq \varsigma L\|u - v\|_{\infty} \int_0^{\infty} \|S(r)\|dr \leq \frac{\varsigma LC}{\omega}\|u - v\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Это показывает, что Υ является сжимающим отображением, поэтому по теореме Банаха о неподвижной точке существует единственная функция $u \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$, для которой $\Upsilon u = u$. $\square$

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия **(a3)** и **(a5)**. Тогда уравнение (4) имеет единственное μ -псевдо-почти-автоморфное мягкое решение.

Доказательство. Пусть $\Upsilon : PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty) \rightarrow BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ определяется как в теореме 2. В силу леммы 6, замечания 2, следствия 2 и леммы 10 заключаем, что Υ отображает $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ в $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$.

Далее покажем, что Υ — сжимающее отображение. Поскольку $l_f(\cdot) \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, можно рассмотреть функцию

$$F(t) = \int_{-\infty}^t l_f^p(s) ds.$$

Теперь определим эквивалентную норму над $BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$:

$$\|f\|_F = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ e^{-\theta F(t)} \|f\| \right\}, \quad f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}),$$

где $\theta > 0$ — достаточно большая постоянная. Тогда для всех $u, v \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mu, \infty)$ имеем

$$\|(\Upsilon u)(t) - (\Upsilon v)(t)\| \leq \int_{-\infty}^t \|S(t-s)[f(s, u_s) - f(s, v_s)]\|ds \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{-\infty}^t e^{-\omega(t-s)} l_f(s) \|u_s - v_s\|_{\mathfrak{B}} ds \leq C_{\zeta} \int_{-\infty}^t e^{-\omega(t-s)} l_f(s) e^{\theta F(s)} \|u - v\|_F ds \leq \\
&\leq C_{\zeta} \left[\int_{-\infty}^t e^{\theta p F(s)} l_f^p(s) ds \right]^{1/p} \left[\int_{-\infty}^t e^{-\omega q(t-s)} ds \right]^{1/q} \|u - v\|_F \leq \\
&\leq C_{\zeta} (\omega q)^{-1/q} \left[\int_{-\infty}^t e^{\theta p F(s)} dF(s) \right]^{1/p} \|u - v\|_F \leq \\
&\leq C_{\zeta} (\omega q)^{-1/q} (p\theta)^{-1/p} e^{\theta F(t)} \|u - v\|_F.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Upsilon u - \Upsilon v\|_F \leq C_{\zeta} (\omega q)^{-1/q} (p\theta)^{-1/p} \|u - v\|_F,$$

т.е. Υ является сжимающим отображением для достаточно большого значения постоянной θ .

С другой стороны, при $p = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\|(\Upsilon u)(t) - (\Upsilon v)(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|S(t-s)[f(s, u_s) - f(s, v_s)]\| ds \leq \\
&\leq C \int_{-\infty}^t l_f(s) \|u_s - v_s\|_{\mathfrak{B}} ds \leq C_{\zeta} \|u - v\|_{\infty} \int_{-\infty}^t l_f(s) ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(\Upsilon^2 u)(t) - (\Upsilon^2 v)(t)\| &\leq C \int_{-\infty}^t l_f(s) \|(\Upsilon u)_s - (\Upsilon v)_s\|_{\mathfrak{B}} ds \leq \\
&\leq (C_{\zeta})^2 \|u - v\|_{\infty} \int_{-\infty}^t l_f(s) \int_{-\infty}^s l_f(\sigma) d\sigma ds \leq \frac{(C_{\zeta})^2}{2} \|u - v\|_{\infty} \left(\int_{-\infty}^t l_f(s) ds \right)^2.
\end{aligned}$$

Используя индукцию по n , получаем

$$\begin{aligned}
\|(\Upsilon^n u)(t) - (\Upsilon^n v)(t)\| &\leq \frac{(C_{\zeta})^n}{(n-1)!} \|u - v\|_{\infty} \left[\int_{-\infty}^t l_f(s) \left(\int_{-\infty}^s l_f(\sigma) d\sigma \right)^{n-1} ds \right] \leq \\
&\leq \frac{(C_{\zeta})^n}{n!} \|u - v\|_{\infty} \left(\int_{-\infty}^t l_f(s) ds \right)^n.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\Upsilon^n u - \Upsilon^n v\|_{\infty} \leq \frac{(C_{\zeta} \|l\|_{L^1(\mathbb{R})})^n}{n!} \|u - v\|_{\infty}.$$

Так как $(C_{\zeta} \|l\|_{L^1(\mathbb{R})})^n < n!$ для достаточно большого n , то Υ остается сжимающим отображением. Поэтому можно заключить, что Υ является сжимающим отображением при $p \geq 1$. Использование принципа сжимающих отображений Банаха завершает доказательство. $\square$

В случае гильбертовых пространств можно сослаться на результат [35], который характеризует непрерывность по норме $\mathcal{C}_0$ -полугрупп для представления лемм 8–9 (см. [8]). Для этого нужно заменить условие **(a3)** на следующее:

(a3) Пусть A порождает непосредственно непрерывную по норме $\mathcal{C}_0$ -полугруппу в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, а $s(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ является границей спектра A . Будем полагать, что $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$ и $\tau \geq 1$ таковы, что $\operatorname{Re}((-\alpha)^{1/\tau} - \beta) < 0$. Предположим, что

- (с) $\lim_{\tau \in \mathbb{R}, |\tau| \rightarrow \infty} \|(\tau_0 + i\tau - A)^{-1}\| = 0$ для некоторого $\tau_0 > s(A)$;
 (d) $\sup \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda(\lambda + \beta)^\tau ((\lambda + \beta)^\tau + \alpha)^{-1} \in \sigma(A) \} < 0$.

Выведем следующие версии теорем 2–3 в гильбертовом пространстве.

Следствие 3. *Предположим, что выполнены условия (а3) и (а4). Уравнение (4) имеет единственное мягкое решение в $РАА(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu, \infty)$, если $\varsigma L < \omega/C$.*

Следствие 4. *Предположим, что выполнены условия (а3) и (а5). Тогда уравнение (4) имеет единственное мягкое решение в $РАА(\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mu, \infty)$.*

Пример 2. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)}{2\Gamma(2)} e^{-(t-s)/3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, x) ds + \\ \quad + \int_{-\infty}^t \varrho(t-s)u(s, x)ds + \varphi(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $x \in [0, \pi]$. Для простоты предположим, что мера μ является мерой Лебега. Пусть $\mathbb{X} = L^2[0, \pi]$ и $\mathfrak{B} = C_0 \times L^2(\rho, \mathbb{X})$ — пространство, введенное в примере 1. Рассмотрим оператор $A := d^2/dx^2$ с областью определения $D(A) = \{g \in H^2[0, \pi] : g(0) = g(\pi) = 0\}$. Хорошо известно, что A порождает аналитическую (и, следовательно, непосредственно непрерывную по норме) $\mathcal{C}_0$ -полугруппу $T(t)$ в $\mathbb{X}$. Кроме того, $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{-n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.

Положим $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/3$ и $\tau = 2$ в уравнении (4). Решения уравнения

$$\frac{\lambda \left(\lambda + \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\lambda + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}} = -n^2$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1} &= \frac{-(2+3n^2)}{9} - \frac{2^{2/3}a_n}{c_n} + \frac{1}{9\sqrt[3]{4}}c_n, \\ \lambda_{n,2} &= \frac{-(2+3n^2)}{9} + \frac{(1+\sqrt{3}i)a_n}{2^{1/3}c_n} - \frac{1}{18\sqrt[3]{4}}(1-\sqrt{3}i)c_n, \\ \lambda_{n,3} &= \frac{-(2+3n^2)}{9} + \frac{(1-\sqrt{3}i)a_n}{2^{1/3}c_n} - \frac{1}{18\sqrt[3]{4}}(1+\sqrt{3}i)c_n \end{aligned}$$

для всех $n \geq 1$, где

$$\begin{aligned} a_n &:= -\frac{1}{9} + \frac{2}{3}n^2 - n^4, \\ c_n &:= \left(4 - 765n^2 + 108n^4 - 108n^6 + 27n\sqrt{-8 + 801n^2 - 216n^4 + 216n^6}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Простое вычисление показывает, что

$$\sup \left\{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \left(\lambda + \frac{1}{3}\right)^2 \left(\left(\lambda + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} \in \sigma(A) \right\} < 0.$$

Таким образом, в силу леммы 8 заключаем, что существует такое сильно непрерывное семейство операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathfrak{L}(\mathbb{X})$, что $\|S(t)\| \leq Ce^{-\omega t}$ для некоторых $C, \omega > 0$.

Далее будем полагать, что ϱ непрерывна, φ псевдо-почти-автоморфна и

$$L_f = \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\varrho^2(-\theta)}{\rho(\theta)} d\theta \right)^{1/2} < \infty.$$

Зададим функцию $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{X}$ следующим образом:

$$f(t, \varphi)(\xi) := \int_{-\infty}^0 \varrho(-s)u(s, \xi)ds + \varphi(t, \xi).$$

Таким образом, можно переписать (7) в абстрактной форме (4), где $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/3$ и $\tau = 2$. При этом легко проверить, что определенная выше функция f удовлетворяет условию Липшица по второй переменной с константой Липшица L_f . Следующий результат является прямым следствием теоремы 2.

Следствие 5. *Если $\varsigma L_f < \omega/C$, то уравнение (7) имеет единственное псевдо-почти-автоморфное мягкое решение.*

4. Заключение. В работе исследована рекуррентность ограниченных решений для интегро-дифференциального уравнения, возникающего при теплопроводности в материалах с памятью. Перед выводом основных результатов приводится новая версия композиции для μ -псевдо-почти-автоморфных функций, участвующих в запаздывании. При помощи недавно установленных результатов о равномерной экспоненциальной устойчивости и принципа сжимающего отображения доказаны теоремы существования и единственности μ -псевдо-почти-автоморфного мягкого решений интегро-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием. Рассмотрено конкретное интегро-дифференциальное уравнение, возникающее при изучении теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abbas S. Pseudo almost automorphic solutions of some nonlinear integro-differential equations// Comput. Math. Appl. — 2011. — 62, № 5. — P. 2259–2272.
2. Abbas S., Xia Y., Existence and attractivity of k -almost automorphic solutions of a model of cellular neural network with delay// Acta Math. Sci. — 2013. — 1. — P. 290–302.
3. Álvarez E., Lizama C. Weighted pseudo almost automorphic mild solutions for two-term fractional-order differential equations// Appl. Math. Comput. — 2015. — 271. — P. 154–167.
4. Blot J., Mophou G. M., N'Guérékata G. M., Pennequin D. Weighted pseudo almost automorphic functions and applications to abstract differential equations// Nonlin. Anal. — 2009. — 71. — P. 903–909.
5. Blot J., Cieutat P., Ezzinbi K. Measure theory and pseudo almost automorphic functions: New developments and applications// Nonlin. Anal. — 2012. — 75. — P. 2426–2447.
6. Caicedo A., Cuevas C., Mophou G. M., N'Guérékata G. M. Asymptotic behavior of solutions of some semilinear functional differential and integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces// J. Franklin Inst. — 2012. — 349. — P. 1–24.
7. Chang Y. K., Luo X. X. Asymptotic behavior of solutions to neutral functional differential equations with infinite delay// Publ. Math. Deb. — 2015. — 86. — P. 1–17.
8. Chang Y. K., Ponce R. Uniform exponential stability and applications to bounded solutions of integro-differential equations in Banach spaces// J. Integral Equations Appl. — 2018. — 30, № 3. — P. 347–369.
9. Chen J., Xiao T., Liang J. Uniform exponential stability of solutions to abstract Volterra equations// J. Evol. Equations. — 2009. — 4. — P. 661–674.
10. Chen J., Liang J., Xiao T. Stability of solutions to integro-differential equations in Hilbert spaces// Bull. Belg. Math. Soc. — 2011. — 18. — P. 781–792.
11. Coleman B. D., Gurtin M. E. Equipresence and constitutive equation for rigid heat conductors// Z. Angew. Math. Phys. — 1967. — 18. — P. 199–208.
12. Cuevas C., Lizama C. Almost automorphic solutions to integral equations on the line// Semigroup Forum. — 2009. — 79. — P. 461–472.
13. Cuevas C., Souza J. Existence of S -asymptotically ω -periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay// Nonlin. Anal. — 2010. — 72. — P. 1683–1689.
14. de Andrade B., Cuevas C., Henríquez E. Asymptotic periodicity and almost automorphy for a class of Volterra integro-differential equations// Math. Methods Appl. Sci. — 2012. — 35. — P. 795–811.
15. Diagana T. Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces. — New York: Springer-Verlag, 2013.

16. *Ding H. S., Liang J., Xiao T. J.* Pseudo almost periodic solutions to integro-differential equations of heat conduction in materials with memory// *Nonlin. Anal. RWA.* — 2012. — 13. — P. 2659–2670.
17. *Ding H. S., Liang J., Nieto J.* Weighted pseudo almost periodic functions and applications to evolution equations with delay// *Appl. Math. Comput.* — 2013. — 219. — P. 8949–8958.
18. *Gurtin M., Pipkin A.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds// *Arch. Rat. Mech. Anal.* — 1968. — 31. — P. 113–126.
19. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to Functional-Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1993.
20. *Hernández E., Henríquez H.* Pseudo-almost periodic solutions for non-autonomous neutral differential equations with unbounded delay// *Nonlin. Anal. RWA.* — 2008. — 9. — P. 430–437.
21. *Henríquez H. R., Cuevas C., Caicedo A.* Asymptotically periodic solutions of neutral partial differential equations with infinite delay// *Commun. Pure Appl. Anal.* — 2013. — 12. — P. 2031–2068.
22. *Henríquez H. R., Cuevas C.* Almost automorphy for abstract neutral differential equations via control theory// *Ann. Mat.* — 2013. — 192. — P. 393–405.
23. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional-Differential Equations with Infinite Delay. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.
24. *Keyantuo V., Lizama C., Warma M.* Asymptotic behavior of fractional-order semilinear evolution equations// *Differ. Integral Equations.* — 2013. — 26. — P. 757–780.
25. *Liang J., Zhang J., Xiao T. J.* Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions// *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — 340. — P. 1493–1499.
26. *Lizama C., N'Guérékata G. M.* Bounded mild solutions for semilinear integro-differential equations in Banach spaces// *Integral Equ. Operator Theory.* — 2010. — 68. — P. 207–227.
27. *Lizama C., Ponce R.* Bounded solutions to a class of semilinear integro-differential equations in Banach spaces// *Nonlin. Anal.* — 2011. — 74. — P. 3397–3406.
28. *N'Guérékata G. M.* Topics in Almost Automorphy. — New York: Springer-Verlag, 2005.
29. *Ponce R.* Bounded mild solutions to fractional integro-differential equations in Banach spaces// *Semigroup Forum.* — 2013. — 87. — P. 377–392.
30. *Santos J., Cuevas C.* Asymptotically almost automorphic solutions of abstract fractional integro-differential neutral equations// *Appl. Math. Lett.* — 2010. — 23. — P. 960–965.
31. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional-Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1996.
32. *Shu X. B., Xu F., Shi Y.* S -asymptotically ω -positive periodic solutions for a class of neutral fractional differential equations// *Appl. Math. Comput.* — 2015. — P. 768–776.
33. *Xia Z.* Pseudo asymptotically periodic solutions for Volterra integro-differential equations// *Math. Methods Appl. Sci.* — 2015. — 38. — P. 799–810.
34. *Xiao T. J., Liang J., Zhang J.* Pseudo almost automorphic solutions to semilinear differential equations in Banach spaces// *Semigroup Forum.* — 2008. — 76. — P. 518–524.
35. *You P.* Characteristic conditions for a C_0 -semigroup with continuity in the uniform operator topology for $t > 0$ in Hilbert space// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1992. — 116. — P. 991–997.
36. *Zhou Y.* Basic Theory of Fractional Differential Equations. — World Scientific, 2014.

Chang Yong-Kui

Университет Сидянь, Шэньси, Китай

E-mail: lzchangyk@163.com

Alzabut Jehad

Университет принца Султана, Эр-Рияд, Саудовская Аравия

E-mail: jalzabut@psu.edu.sa

Ponce Rodrigo

Университет Тальки, Талька, Чили

E-mail: rponce@inst-mat.utalca.cl