Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Зеррик, А. Эль Кабусс, Р. Лариши, Оптимальное управление для бесконечномерных гиперболических билинейных систем, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 178, 77–90

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-178-77-90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:59:00

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 178 (2020). С. 77–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-178-77-90

УДК 517.977.56

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2020 г. Е. ЗЕРРИК, А. ЭЛЬ КАБУСС, Р. ЛАРИШИ

Аннотация. Целью настоящей работы является изучение задачи регионального оптимального управления для класса бесконечномерных гиперболических билинейных систем, эволюционирующих в пространственной области Ω . В работе предложен метод построения оптимального управления, доставляющего минимум функционала, который задает невязку между желаемым и конечным состоянием. Достоверность метода подтверждается результатами компьютерного моделирования.

Ключевые слова: гиперболическая система, бесконечномерная билинейная система, распределенное оптимальное управление, региональная управляемость.

OUTPUT OPTIMAL CONTROL OF INFINITE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC BILINEAR SYSTEMS

© 2020 E. ZERRIK, A. EL KABOUSS, R. LARHRISSI

ABSTRACT. In this paper, we examine a regional optimal control problem for a class of infinite-dimensional hyperbolic bilinear systems evolving on a spatial domain Ω . We characterize an optimal control that minimizes a cost functional, which is composed of the gap between the desired state and final state using optimality conditions. The approach is successfully illustrated by simulations.

Keywords and phrases: hyperbolic system, infinite-dimensional bilinear system, distributed optimal control, regional controllability.

AMS Subject Classification: 93D15

1. Введение. Многие физические, химические и биологические явления могут быть эффективно смоделированы бесконечномерными билинейными системами, зависящими от произведения управления и переменных состояния. Такие системы возникают, например, при описании ядерной цепной реакции (см. [11]) или роста аваскулярной опухоли (см. [9]).

Управляемость билинейных систем исследовалась во многих работах. В [2] было показано, что множество достижимости из исходного состояния имеет плотное дополнение в пространстве состояний. Это делает сложным нахождение точного решения задачи управления. В [4] доказано, что точная управляемость зависит от выбора функциональных пространств, и с помощью теории моментов и теоремы Нэша—Мозера показал управляемость для билинейного уравнения линии прогиба балки.

В предыдущих работах исследовалась управляемость конкретных гиперболических билинейных систем. В [12] охарактеризовано оптимальное управление для билинейного волнового уравнения, минимизирующее невязку между желаемым и конечным состоянием, в случае, когда желаемое состояние имеет вид $(z_d, 0)$. Однако этот подход не может быть применен в случае желаемого

состояния с ненулевой скоростью. Приближенная управляемость для одномерного билинейного волнового уравнения с условиями Неймана была рассмотрена в [3]. В [11] показано, что приближенная управляемость для одномерного билинейного волнового уравнения может быть получена в классе билинейных управлений, не зависящих от времени. В [13] этот результат был обобщен на многомерный случай.

Концепция региональной управляемости для эволюционирующих в пространственной области Ω бесконечномерных систем, разработанная в [6], относится к изучению классического понятия управляемости только на подобласти $\omega \subset \Omega$. Основные причины для рассмотрения этого понятия заключаются в том, что оно близко к реальным приложениям, например, к моделированию туннельной печи, когда необходимо поддерживать заданную температуру только в ее части. Кроме того, существуют системы, управляемые на некоторой подобласти, но не управляемые во всем пространстве состояний. Региональная управляемость изучалась для параболических линейных систем (см. [7]), затем для гиперболических линейных систем в случае внутренней подобласти (см. [17]) и граничной подобласти (см. [18]). На основе анализа оптимальной системы (см. [19]) и на основе решения уравнения Риккати (см. [20]) эти результаты были расширены до случая параболических билинейных систем с квадратичным функционалом.

Задача регионального оптимального управления для билинейных систем с параболическим оператором четвертого порядка с ограниченным и неограниченным управлением была рассмотрена в [15]. Позднее в [16] исследован класс бесконечномерных билинейных систем в обоих случаях неограниченного и ограниченного управления.

В данной работе рассматривается задача регионального оптимального управления для бесконечномерных гиперболических билинейных систем с распределенным неограниченным управлением. Приводится характеристика оптимального управления и исследуется его единственность. Найденное управление позволяет минимизировать невязку между конечным и желаемым состоянием, имеющим вид (z_1^d, z_2^d) . Таким образом, работа является расширением работы [12].

Более точно, пусть Ω — открытая ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с регулярной границей $\partial\Omega$. Для $T > 0$ введем обозначения $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + Az(x, t) = u(x, t)Bz(x, t) & \text{в } Q, \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = z_1(x) & \text{в } \Omega, \\ z(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (1.1)$$

где A — самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка, имеющий вид

$$Az = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} + c(x)z,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $b_i, c \in C^1(\Omega)$, и существует такое $\alpha > 0$, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \geq \alpha |\varepsilon|^2 \quad \forall \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Здесь $B : L^2(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ является линейным ограниченным самосопряженным оператором, и множество управлений есть $U = L^2(Q)$.

Рассмотрим гильбертово пространство $W = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$\langle (f_1, f_2), (g_1, g_2) \rangle_W = \langle A^{1/2} f_1, A^{1/2} g_1 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f_2, g_2 \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Для $(z_0, z_1) \in W$ и $u \in U$ система (1.1) имеет единственное решение, для которого $(z, \partial z / \partial t) \in C([0, T], W)$ (см. [14]).

Пусть ω — открытая подобласть области Ω , $\chi_\omega : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\omega)$ — оператор сужения на ω и $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ — оператор, сопряженный к χ_ω :

$$\chi_\omega^* z(x, \cdot) = \begin{cases} z(x, \cdot), & \text{если } x \in \omega, \\ 0 & \text{если } x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

Пусть $z_d = (z_1^d, z_2^d) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ — желаемое состояние.

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\min_{u \in U} J(u), \quad (1.3)$$

где

$$J(u) = \frac{1}{2} \left\| \chi_\omega z(x, t) - z_1^d(x) \right\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))}^2 + \frac{1}{2} \left\| \chi_\omega \frac{\partial z(x, T)}{\partial t} - z_2^d(x) \right\|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2, \quad (1.4)$$

где β — положительная константа.

Цель данной работы — охарактеризовать оптимальное управление в задаче (1.3). Работа организована следующим образом. В разделе 2 доказано существование оптимального управления для задачи (1.3). В разделе 3 найдено оптимальное управление и исследована его единственность. В разделе 4 предложен численный метод поиска оптимального управления, приводящий к алгоритму, который проиллюстрирован посредством компьютерного моделирования.

2. Существование оптимального управления. Данный раздел посвящен доказательству существования оптимального управления в задаче (1.3).

Лемма 1. *Рассмотрим следующую систему:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + Az(x, t) = u(x, t)Bz(x, t) + f(x, t) & \text{в } Q, \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = z_1(x) & \text{в } \Omega, \\ z(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Решение $(z, \partial z / \partial t)$ системы (2.1) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\|z(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial z(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C \left(\|z_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|z_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \right), \quad (2.2)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 z_\ell(t)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C \left(\|z_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|z_1\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \right). \quad (2.3)$$

Доказательство. Пусть $(w_m)_{m \geq 1}$ задает ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$ и ортогональный базис в $H_0^1(\Omega)$. Для положительной константы ℓ положим

$$z_\ell(x, t) := \sum_{m=1}^{\ell} d_\ell^m(t) w_m(x). \quad (2.4)$$

где $d_\ell^m(t)$ ($0 \leq t \leq T$, $m = 1, 2, \dots, \ell$) удовлетворяют условиям

$$d_\ell^m(0) = \langle z_0, w_m \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \frac{\partial d_\ell^m(0)}{\partial t} = \langle z_1, w_m \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Из системы (2.1) получаем

$$\left\langle \frac{\partial^2 z_\ell}{\partial t^2}, w_m \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle Az_\ell, w_m \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle uBz_\ell, w_m \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f, w_m \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (2.5)$$

Умножая (2.5) на $\partial d_\ell^m(t)/\partial t$, суммируя по $m = 1$ до ℓ и используя (2.4), находим

$$\left\langle \frac{\partial^2 z_\ell}{\partial t^2}, \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle Az_\ell, \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle uBz_\ell, \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle f, \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (2.6)$$

Так как

$$\left\langle Az_\ell, \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle A^{1/2} z_\ell, A^{1/2} z_\ell \right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

имеем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\| \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z_\ell\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \leq \|uBz_\ell\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Поскольку оператор B ограничен, заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left\| \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z_\ell\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \leq C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\|z_\ell\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Введем обозначение

$$\Phi(t) := \left\| \frac{\partial z_\ell}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z_\ell\|_{H_0^1(\Omega)}^2;$$

тогда неравенство (2.7) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \Phi(t) + C \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

В силу неравенства Гронуолла имеем

$$\Phi(t) \leq e^{(C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)})t} \left(\Phi(0) + C_2 \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Тогда

$$\left(\|z_\ell(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial z_\ell(t)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C \left(\|z_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|z_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right). \quad (2.8)$$

Теперь, используя (2.5), для $y \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющего условию $\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$, получаем

$$\left| \left\langle \frac{\partial^2 z_\ell}{\partial t^2}, y \right\rangle \right| \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|z_\ell\|_{H_0^1(\Omega)} \right).$$

Таким образом,

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial^2 z_\ell}{\partial t^2} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|z_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|z_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right). \quad (2.9)$$

При $\ell \rightarrow +\infty$ получаем (2.2) и (2.3). □

Теорема 1. *Существует оптимальное управление $u \in U$, решающее задачу (1.3).*

Доказательство. Выполним те же шаги, что и в [12, теорема 2.1], используя неравенства (2.2) и (2.3) для доказательства слабой сходимости z_{u_m} , $\partial z_{u_m}/\partial t$ и *-слабой сходимости $\partial^2 z_{u_m}/\partial t^2$ для минимизирующей последовательности u_m . Тогда, используя результат о компактности (см. [10]), получаем сильную сходимость $z_{u_m} \rightarrow z_{u^*}$ в $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$. Это дает слабую сходимость последовательности $u_m B z_{u_m}$. При $m \rightarrow \infty$ заключаем, что $(z_{u^*}, \partial z_{u^*}/\partial t)$ является решением системы (1.1) под действием управления u^* . Используя непрерывность оператора и полунепрерывность J снизу относительно слабой сходимости, получаем

$$J(u^*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J(u_m) = I;$$

значит, u^* является оптимальным управлением. □

3. Характеристика и единственность оптимального управления. В этом разделе дана характеристика оптимального управления в задаче (1.3) и обсуждается вопрос единственности. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Отображение $\Theta : u \in U \rightarrow (z_u, \partial z_u / \partial t) \in C(0, T, W)$ дифференцируемо по Фреше, его производная удовлетворяет системе*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ay = u(x, t)By + h(x, t)Bz & \text{в } Q, \\ y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{в } \Omega, \\ y(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases} \quad (3.1)$$

Доказательство. Отображение $L : h \in U \rightarrow (y, \partial y / \partial t) \in C([0, T], W)$ линейно. Используя неравенство (2.2), получаем

$$\left\| \left(y, \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right\|_{C(0, T, W)} \leq C \|h\|_U.$$

Следовательно, L непрерывно. Положим

$$\left(z_{h+u}, \frac{\partial z_{h+u}}{\partial t} \right) = \Theta(u + h), \quad \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \left(z_{h+u} - z, \frac{\partial}{\partial t}(z_{h+u} - z) \right).$$

Тогда $(\psi, \partial \psi / \partial t)$ является слабым решением системы

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + A\psi = u(x, t)B\psi + h(x, t)Bz_{h+u} & \text{в } Q, \\ \psi(x, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{в } \Omega, \\ \psi(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\left\| \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\|_{C(0, T, W)} \leq C \|h\|_U.$$

Теперь, если

$$\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \left(\psi - y, \frac{\partial}{\partial t}(\psi - y) \right),$$

то $(\varphi, \partial \varphi / \partial t)$ является слабым решением следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + A\varphi = u(x, t)B\varphi + h(x, t)B\psi & \text{в } Q, \\ \varphi(x, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{в } \Omega, \\ \varphi(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

Закключаем, что

$$\left\| \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\|_{C(0, T, W)} \leq C \|h\|_U^2,$$

где $(\varphi, \partial \varphi / \partial t) = \Theta(u + h) - \Theta(u) - \Theta'(u) \cdot h$, что завершает доказательство. $\square$

Теорема 2. *Оптимальное управление $u^* \in U$ в задаче (1.3) имеет вид*

$$u^*(x, t) = -\frac{1}{\beta} Bz(x, t)p(x, t), \quad (3.2)$$

где $(z, \partial z / \partial t)$ — решение системы (1.1), а $(p, \partial p / \partial t)$ — решение следующей сопряженной системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} + Ap(x, t) = Bu(x, t)p(x, t) + z(x, t) - \chi_\omega^* z_1^d(x) & \text{в } Q, \\ p(x, T) = \left(\frac{\partial z(x, T)}{\partial t} - \chi_\omega^* z_2^d(x) \right) & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial p(x, T)}{\partial t} = 0 & \text{в } \Omega, \\ p(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases} \quad (3.3)$$

Доказательство. Вычислим производную функционала J относительно u по направлению h . Дифференцируемость отображения Θ и его нормы гарантирует дифференцируемость J . Производная имеет вид

$$\begin{aligned} J'(u) \cdot h = & \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \int_0^T y(x, t) \left(z(x, t) - \chi_\omega^* z_1^d(x) \right) dt dx + \\ & + \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \frac{\partial y(x, T)}{\partial t} \left(\frac{\partial z(x, T)}{\partial t} - \chi_\omega^* z_2^d(x) \right) dx + \beta \int_Q h(x, t) u(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

В силу системы (3.3) имеем

$$\begin{aligned} J'(u) \cdot h = & \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \int_0^T y(x, t) \left(z(x, t) - \chi_\omega^* z_1^d(x) \right) dt dx + \\ & + \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \frac{\partial y(x, T)}{\partial t} p(x, T) dx + \beta \int_Q h(x, t) u(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, в силу системы (3.3) получаем

$$\begin{aligned} J'(u) \cdot h = & \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \int_0^T y(x, t) \left(\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} + Ap(x, t) - Bu(x, t)p(x, t) \right) dt dx + \\ & + \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \int_0^T \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} p(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right) dt dx + \beta \int_Q h(x, t) u(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

Повторное интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} J'(u) \cdot h = & \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \left[y(x, t) \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right]_0^T dx - \\ & - \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \int_0^T \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} dt dx + \int_{\Omega} \chi_\omega^* \chi_\omega \int_0^T y(x, t) \left(Ap(x, t) - Bu(x, t)p(x, t) \right) dt dx + \\ & + \int_0^T \chi_\omega^* \chi_\omega \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} p(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right) dx dt + \beta \int_Q h(x, t) u(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J'(u) \cdot h = & \int_{\Omega} \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} \int_0^T \left(Ay(x, t) - u(x, t) By(x, t) \right) p(x, t) dt dx + \\ & + \int_0^T \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} p(x, t) dx dt + \beta \int_Q h(x, t) u(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

Система (3.1) влечет

$$\begin{aligned} J'(u) \cdot h = & \int_{\Omega} \int_0^T h(x, t) Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t) dt dx + \beta \int_Q hu dt dx = \\ & = \int_Q h \left(\beta u + Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t) \right) dt dx. \end{aligned}$$

Таким образом, условие $J'(u) \cdot h = 0$ дает

$$u^*(x, t) = -\frac{1}{\beta} Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t). \quad \square$$

Следствие 1. При условии, что $u^*(x, t) = v^*(t) \mathbb{1}_D(x)$, где $D \subset \Omega$ — область приложения управления, а $\mathbb{1}_D$ — характеристическая функция с ненулевой мерой $\mu(D)$, оптимальное управление $v^*(t)$ имеет вид

$$v^*(t) = -\frac{1}{\beta \mu(D)} \int_{\Omega} Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t) dx. \quad (3.4)$$

Оптимальное управление v^* зависит от области ω и области приложения управления D .

Замечание 1. Заметим, что для задачи (1.3) со множеством управлений $U_M = \{u \in L^{\infty}(Q) \mid -M \leq u \leq M\}$, где M — заданная константа, то $J'(u) \cdot h \geq 0$, что означает

$$\int_Q h \left(\beta u + Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t) \right) dt dx \geq 0.$$

Используя границы множества управлений, получаем

$$u^*(x, t) = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t), M \right) \right). \quad (3.5)$$

В предположении, что $u^*(x, t) = v^*(t) \mathbb{1}_D(x)$, получаем, что оптимальное управление $v^*(t)$ выражается следующим образом:

$$v^*(t) = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta \mu(D)} \int_{\Omega} Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t) dx, M \right) \right). \quad (3.6)$$

Замечание 2. В случае $A = -\Delta$, $B = I$ и $\omega = \Omega$ управление (3.5) минимизирует невязку между желаемым состоянием (z_1^d, z_2^d) и конечным состоянием $(z_u, \partial z_u / \partial t)$ — решением билинейного волнового уравнения. Заметим, что управление, найденное в [12], неприменимо в этом случае.

Приведем далее достаточные условия единственности оптимального управления.

Теорема 3. Предположим, что решения систем (1.1) и (3.3) ограничены на Q . При достаточно малом T задача (1.3) имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения u_1, u_2 задачи (1.3). Пусть $(\bar{z}_1, \partial\bar{z}_1/\partial t), (\bar{z}_2, \partial\bar{z}_2/\partial t)$ — соответствующие состояния и $(\bar{p}_1, \partial\bar{p}_1/\partial t), (\bar{p}_2, \partial\bar{p}_2/\partial t)$ — соответствующие решения сопряженной системы под действием управлений u_1 и u_2 .

Пусть $\lambda > 0$, $\bar{z}_1 = e^{-\lambda t}\tilde{z}_1$, $\bar{z}_2 = e^{-\lambda t}\tilde{z}_2$, $\bar{p}_1 = e^{\lambda t}\tilde{p}_1$ и $\bar{p}_2 = e^{\lambda t}\tilde{p}_2$; $(\bar{z}_j, \frac{\partial\bar{z}_j}{\partial t})$ для $j = 1, 2$ удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{z}_j(x, t)}{\partial t^2} + A\bar{z}_j(x, t) + 2\lambda \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial t}(x, t) + \lambda^2 \bar{z}_j(x, t) = u_j B \bar{z}_j(x, t) & \text{в } Q, \\ \bar{z}_j(x, 0) = z_0(x) & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial t}(x, 0) = z_1(x) & \text{в } \Omega, \\ \bar{z}_j(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases}$$

С другой стороны, $(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t^2}(x, t) + A(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, t) + 2\lambda \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t}(x, t) + \lambda^2 (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, t) + \\ \quad = u_1 B(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, t) + (u_1 - u_2) B \bar{z}_2(x, t) & \text{в } Q, \\ (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, 0) = \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{в } \Omega, \\ (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases} \quad (3.7)$$

Умножая уравнение в (3.7) на $\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)/\partial t$ и интегрируя по области Q , получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\left\langle \frac{\partial^2 (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t^2}, \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle A(\bar{z}_1 - \bar{z}_2), \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \right. \\ & \quad \left. + 2\lambda \left\langle \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t}, \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda^2 \left\langle (\bar{z}_1 - \bar{z}_2), \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \right) dt = \\ & \quad = \int_0^T \left(\left\langle u_1 B(\bar{z}_1 - \bar{z}_2), \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle (u_1 - u_2) B \bar{z}_2, \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \right) dt. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2} \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t}(x, T) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| A^{1/2}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, T) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & \quad + \frac{\lambda^2}{2} \left\| (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, T) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\lambda \int_0^T \left\| \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \\ & \quad = \int_0^T \left(\left\langle u_1 B(\bar{z}_1 - \bar{z}_2), \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle (u_1 - u_2) B \bar{z}_2, \frac{\partial (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Используя неравенство

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| B \bar{z}_1 \chi_\omega^* \chi_\omega \bar{p}_1 - B \bar{z}_2 \chi_\omega^* \chi_\omega \bar{p}_2 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \left\| B(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \chi_\omega^* \chi_\omega \bar{p}_2 - B \bar{z}_1 \chi_\omega^* \chi_\omega (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

получаем

$$2\lambda \int_0^T \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C_1 \int_0^T \left(\|(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt, \quad (3.10)$$

где C_1 зависит от B , $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$.

С другой стороны, $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ является решением следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t^2}(x, t) + A(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(x, t) - 2\lambda(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = \\ \quad = Bu_1(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(x, t) + B(u_1 - u_2)\bar{p}_2(x, t) + e^{\lambda t}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, t) & \text{в } Q, \\ (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(x, T) = \lambda e^{2\lambda T}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, T) + e^{2\lambda T} \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t}(x, T) & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial \bar{p}(x, T)}{\partial t} = 0 & \text{в } \Omega, \\ (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma. \end{cases} \quad (3.11)$$

Умножая уравнение в (3.11) на $\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)/\partial t$, интегрируя по области Q и используя (3.9), получаем

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_0^T \left\| \frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &\leq \\ &\leq C_2 \int_0^T \left(\|(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt + \\ &\quad + \frac{\lambda^2 e^{4\lambda T}}{2} \|(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(x, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{e^{4\lambda T}}{2} \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t}(x, T) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Используя (3.8), получаем

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_0^T \left\| \frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &\leq C_3 e^{4\lambda T} \int_0^T \left(\|(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Складывая неравенства (3.10) и (3.12), приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_0^T \left(\left\| \frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt &\leq (C_1 + C_3 e^{4\lambda T}) \int_0^T \left(\|(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^T \|(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &= \int_0^T \int_{\Omega} \left(\int_0^t \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial s} ds \right)^2 dx dt \leq \\ &\leq \int_0^T \int_{\Omega} t \left(\int_0^t \left(\frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial s} \right)^2 ds \right) dx dt \leq \frac{T^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq \\ &\leq \frac{T^2}{2} \int_0^T \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \end{aligned}$$

и

$$\int_0^T \|(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \frac{T^2}{2} \int_0^T \left\| \frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Для фиксированного $\lambda > 0$ и достаточно малого T , для которых

$$2\lambda > (C_1 + C_3 e^{4\lambda T}) \left(\frac{T^2}{2} + 1 \right),$$

получаем

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \left\| \frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = 0,$$

а значит,

$$\frac{\partial(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\partial t} = \frac{\partial(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\partial t} = 0,$$

что дает $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$, $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$. □

4. Алгоритм и компьютерное моделирование. В этом разделе предлагается алгоритм для вычисления оптимального управления в задаче (1.3).

В случае неограниченных управлений оптимальное управление может быть рассчитано по формуле

$$\begin{cases} u_{m+1} = -\frac{1}{\beta} B z_{u_m}(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p_{u_m}(x, t) \\ u_1 = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

а в случае ограниченных управлений — по формуле

$$\begin{cases} u_{m+1} = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta} B z_{u_m}(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p_{u_m}(x, t), M \right) \right), \\ u_1 = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где z_{u_m} — решение системы (1.1), а p_{u_m} — решение сопряженной системы (3.3), соответствующие управлению u_m .

Алгоритм 1.

Шаг 1: Исходные данные.

- (i) Исходное состояние (z_0, z_1) , подобласть ω и желаемое состояние (z_1^d, z_2^d) .
- (ii) Положительная константа β , момент времени T , пороговая точность ε и $u_1 = 0$.

Шаг 2: Повторять, пока выполняется неравенство $\|u_{m+1} - u_m\|_U \leq \varepsilon$.

- (i) Найти z_{u_m} , решая систему (1.1) методом конечных разностей.
- (ii) Найти p_{u_m} , решая систему (3.3) методом конечных разностей.
- (iii) Вычислить u_{m+1} по формуле (4.1) в случае неограниченных управлений или по формуле (4.2) в случае ограниченных управлений.

Шаг 3: Найденное управление u_m — решение задачи (1.3).

Компьютерное моделирование. Положим $\Omega =]0, 1[$. Рассмотрим билинейную систему с волновым уравнением

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = \Delta z(x, t) + u(x, t)Bz(x, t) & \text{в } Q, \\ z(x, 0) = \frac{1}{10} \sin(2x\pi), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = \frac{1}{10} \sin(x\pi) & \text{в } \Omega, \\ z(x, t) = 0 & \text{на } \Sigma, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $T = 2$,

$$Bz(x, t) = \int_{\Omega} z(x, t) dx, \quad u(x, t) = v(t)\mathbb{1}_D$$

и $D =]0, 32; 0, 8[$ — область приложения управления.

Пример 1. Пусть $\omega \subset \Omega$, рассмотрим систему (4.3) и задачу (1.3) при $z_1^d = 0, z_2^d = 0$ и $\beta = 0,45$.

Случай ограниченных управлений: $U = \{u \in L^\infty(Q) \mid -0,015 \leq u \leq 0,015\}$. Применяя предложенный алгоритм с

$$v^*(t) = \max \left(-M, \min \left(-\frac{1}{\beta\mu(D)} \int_{\Omega} Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t) dx, M \right) \right), \quad (4.4)$$

получаем следующие результаты для различных подобластей.

1. Для $\omega =]0; 0,3[$, график v^* представлен на рис. 1(а), а достигнутое состояние и скорость — на рис. 1(б) и 1(с) соответственно. Желаемое состояние на ω достигнуто с точностью $\rho = 1,42 \times 10^{-5}$ и значением функционала $J(v^*) = 5,47 \times 10^{-1}$.
2. Для $\omega =]0,6; 0,9[$, график v^* представлен на рис. 2(а), а достигнутое состояние и скорость — на рис. 2(б) и 2(с) соответственно. Желаемое состояние на ω достигнуто с точностью $\rho = 7,29 \times 10^{-5}$ и значением функционала $J(v^*) = 6,73 \times 10^{-1}$.

Пример 2. Пусть $\omega \subset \Omega$, рассмотрим систему (4.3) и задачу (1.3) при

$$z_1^d = -\frac{1}{10} \sin(x\pi) \sin(x\pi), \quad z_2^d = -\frac{1}{10} \sin(x\pi) \cos(2x\pi), \quad \beta = 0,45.$$

Случай неограниченных управлений: $U = L^2(Q)$. Применяя предложенный алгоритм с

$$\varepsilon = 10^{-4}, \quad v(t) = -\frac{1}{\beta\mu(D)} \int_{\Omega} Bz(x, t) \chi_{\omega}^* \chi_{\omega} p(x, t) dx,$$

получаем следующие результаты для различных подобластей.

1. Для $\omega =]0; 0,3[$ график v^* представлен на рис. 3(а), а достигнутое состояние и скорость — на рис. 3(б) и 3(с) соответственно. Желаемое состояние на ω достигнуто с точностью

$$\rho = \|z(x, T) - z_1^d(x)\|_{L^2(\omega)}^2 + \left\| \frac{\partial z}{\partial t}(x, T) - z_2^d(x) \right\|_{L^2(\omega)}^2 = 2,46 \times 10^{-4}$$

и значением функционала $J(v^*) = 0,0891$.

2. Для $\omega =]0,6; 0,9[$, график v^* представлен на рис. 4(а), а достигнутое состояние и скорость — на рис. 4(б) и 4(с) соответственно. Желаемое состояние на ω достигнуто с точностью $\rho = 8,71 \times 10^{-4}$ и значением функционала $J(v^*) = 0,3591$.

5. Заключение. Рассмотрена задача регионального оптимального управления для бесконечномерных гиперболических билинейных систем. Предложен метод построения оптимального управления, доставляющего минимум функционала, который задает невязку между желаемым и конечным состоянием на заданной подобласти пространства состояний. Полученные результаты успешно протестированы с помощью численных экспериментов. Случай граничной подобласти остается открытым.

(a)

(a)

(b)

(b)

(c)

Рис. 1

(c)

Рис. 2

(a)

(a)

(b)

(b)

(c)

Рис. 3

(c)

Рис. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adams R. A.* Sobolev Spaces. — New York–San Francisco–London: Academic Press, 1975.
2. *Ball J. M., Marsden J. E., Slemrod M.* Controllability for distributed bilinear systems// *SIAM J. Control Optim.* — 1982. — 20, № 4. — P. 575–597.
3. *Beauchard K.* Local controllability and noncontrollability for a 1d wave equation with bilinear control// *J. Differ. Equations.* — 2011. — 250, № 4. — P. 2064–2098.
4. *Beauchard K.* Local controllability of a one-dimensional beam equation// *SIAM J. Control Optim.* — 2008. — 47, № 3. — P. 1219–1273.
5. *Brezis H.* Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications. — Paris: Masson, 1983.
6. *El Jai A., Zerrik E., Afri L.* Systems Theory : Modeling, Analysis and Control. — Presse Univ. Perpignan, 2009.
7. *El Jai A., Zerrik E., Pritchard A.* Regional controllability of distributed parameter systems// *Int. J. Control.* — 1995. — 62, № 6. — P. 1351–1365.
8. *Evans L. C.* Partial Differential Equations. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1998.
9. *Ferreira S. C. Jr., Martins M. L., Vilela M. J.* A reaction-diffusion model for the growth of avascular tumor// *Phys. Rev.* — 2002. — 65, № 2. — 021907.
10. *Jacques S.* Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // *Ann. Mat. Pura Appl.* — 1987. — 146, № 6. — P. 65–96.
11. *Khapalov A. Y.* Controllability of Partial Differential Equations Governed by Multiplicative Controls. — Springer-Verlag, 2010.
12. *Liang M.* Bilinear optimal control for a wave equation// *Math. Models Meth. Appl. Sci.* — 1999. — 9, № 1. — P. 45–68.
13. *Ouzahra M.* Controllability of the wave equation with bilinear controls// *Eur. J. Control.* — 2014. — 20, № 2. — P. 57–63.
14. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer-Verlag, 1983.
15. *Zerrik E., El Kabouss A.* Regional optimal control of a class of bilinear systems// *IMA J. Math. Control Inform.* — 2017. — 34, № 4. — P. 1157–1175.
16. *Zerrik E., El Kabouss A.* Regional optimal control of a class of infinite-dimensional bilinear systems// *Int. J. Control.* — 2017. — 90, № 7. — P. 1495–1504.
17. *Zerrik E., Larhrissi R.* Regional target control of the wave equation// *Int. J. Syst. Sci.* — 2001. — 32, № 10. — P. 1233–1242.
18. *Zerrik E., Larhrissi R.* Regional boundary controllability of hyperbolic systems. Numerical approach// *J. Dynam. Control syst.* — 2002. — 8, № 3. — P. 293–311.
19. *Zerrik E., Ould sidi M.* “Regional controllability for infinite-dimensional bilinear systems: Approach and simulations// *Int. J. Control.* — 2011. — 84, № 12. — P. 2108–2116.
20. *Ztot K., Zerrik E., Bourray H.* Regional control problem for distributed bilinear systems: Approach and simulations// *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* — 2011. — 21, № 3. — P. 499–580.

Zerrik E.

Университет Мулая Исмаила, Мекнесс, Марокко

E-mail: zerrik3@yahoo.fr

El Kabouss A.

Университет Мулая Исмаила, Мекнесс, Марокко

Larhrissi R.

Университет Мулая Исмаила, Мекнесс, Марокко

E-mail: r.larhrissi@gmail.com