Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Попеску, Симметрии гамильтоновых систем на алгеброидах Ли, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 178, 112–134

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-178-112-134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:45:45

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 178 (2020). С. 112–134
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-178-112-134

УДК 512.81

СИММЕТРИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ НА АЛГЕБРОИДАХ ЛИ

© 2020 г. Л. ПОПЕСКУ

Аннотация. В данной работе изучаются инфинитезимальные симметрии, естественные инфинитезимальные симметрии, ньютоновы сечения, инфинитезимальные симметрии Нетер и законы сохранения для гамильтоновых систем в рамках общей концепции алгеброидов Ли. При помощи динамических ковариантных производных и эндоморфизмов Якоби найдены инвариантные уравнения некоторых типов симметрий и доказано, что каноническая нелинейная связность, индуцированная регулярным гамильтонианом, может быть определена этими симметриями. Приведены примеры из теории оптимального управления, которые доказывают, что для изучения симметрий динамики, индуцированной гамильтоновой функцией, структура алгеброидов Ли более полезна, чем кокасательное расслоение.

Ключевые слова: инфинитезимальная симметрия, алгеброид Ли, гамильтонова система, закон сохранения, динамическая ковариантная производная, эндоморфизм Якоби.

SYMMETRIES OF HAMILTONIAN SYSTEMS ON LIE ALGEBROIDS

© 2020 L. POPESCU

ABSTRACT. In the present paper, we study infinitesimal symmetries, natural infinitesimal symmetries, Newtonoid sections, infinitesimal Noether symmetries, and conservation laws for Hamiltonian systems within the general framework of Lie algebroids. Using dynamical covariant derivatives and Jacobi endomorphisms, we find invariant equations of some type of symmetries and prove that the canonical nonlinear connection induced by a regular Hamiltonian can be determined by these symmetries. Finally, we present examples from the optimal control theory that prove that the framework of Lie algebroids is more useful than the cotangent bundle in order to study the symmetries for the dynamics induced by a Hamiltonian function.

Keywords and phrases: infinitesimal symmetry, Lie algebroid, Hamiltonian system, conservation law, dynamical covariant derivative, Jacobi endomorphism.

AMS Subject Classification: 17B66, 37J15, 53C05, 70H33, 70H05

1. Введение. Хорошо известно, что симметрии играют важную роль во всех полевых теориях и могут быть использованы для уменьшения числа степеней свободы динамической системы. В лагранжевом и гамильтоновом формализмах симметрии обычно упрощают анализ эволюционных уравнений, связанных с законами сохранения через теоремы типа Нетер. Особую роль играют симметрии Нетер в касательных расслоениях, которые сохраняют инвариант функционала действия и имеют прямое отношение к законам сохранения уравнений Эйлера—Лагранжа. Это соответствие можно расширить до гамильтоновых систем на касательных расслоениях, что кажется более естественным, чем в случае лагранжиана, потому что оно имеет каноническую симплектическую структуру, независимую от гамильтоновой функции.

Касательное расслоение имеет каноническую касательную структуру J , которая вместе с понятием полуструи S (система дифференциальных уравнений второго порядка) приводит к нелинейной связности $N = -\mathcal{L}_S J$, описывающей геометрию системы (см. [15, 23]). Эти структуры приводят к понятиям эндоморфизма Якоби и динамической ковариантной производной (см. [10, 27, 39, 63]), которые используются в изучении симметрий систем дифференциальных уравнений второго порядка в [9]. Однако существование симплектической структуры на касательном расслоении зависит от функции Лагранжа на TM . Обратно, кокасательное расслоение имеет каноническую симплектическую структуру и не наделено канонической касательной структурой или чем-либо похожим на полуструи. Существование псевдометрической структуры или регулярного гамильтониана на T^*M позволяет определить адаптированную касательную структуру $\mathcal{J}$ и регулярное векторное поле ρ , которые индуцируют нелинейную связность $\mathcal{N} = -\mathcal{L}_\rho \mathcal{J}$ [45]. Эти геометрические структуры приводят к понятиям эндоморфизма Якоби и динамической ковариантной производной на T^*M (см. [54, 57]), которые можно использовать для поиска инвариантных уравнений инфинитезимальных симметрий для гамильтоновых систем (см. [56]). Использование симметрий системы в описании ее динамической эволюции имеет длинную историю и восходит к классической механике (см., например, [1, 2, 17, 28, 38]). Некоторые типы симметрий на касательном расслоении, как например, динамические симметрии, симметрии Ли, симметрии Картана (Нетер) (см., например, [17, 21, 28, 30, 58, 59, 62]) и векторное поле Нетер (см. [9, 37]) были изучены в работах многих авторов. Также различные типы симметрий для гамильтоновых систем можно найти в [14, 36, 44, 60].

В данной работе изучение симметрий и законов сохранения для гамильтоновых систем расширено до более общей концепции алгеброидов Ли. Это не просто элементарное обобщение, так как иногда в теории оптимального управления для изучения оптимального решения (см. [26, 47, 49, 50]) или симметрий динамики, индуцированными функцией Гамильтона, концепция алгеброидов Ли является более подходящей, чем концепция кокасательного расслоения. Пример можно найти в [55], где этот факт убедительно проиллюстрирован. Также при помощи динамической ковариантной производной и эндоморфизма Якоби (см. [51]) заданы инвариантные уравнения для некоторых типов симметрий. Алгеброид Ли является естественным обобщением касательного расслоения и алгебры Ли (см. [34, 35]) со множеством приложений к механическим системам или оптимальному управлению (см. [3, 4, 11–13, 18, 19, 31, 33, 40–42, 46–53]). Данная работа имеет дело с изучением симметрий гамильтоновой системы на алгеброидах Ли и демонстрирует, как симметрии лагранжевых систем появляются в описании гамильтониана.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 представлены предварительные геометрические структуры на алгеброиде Ли E и их продолжения над проекцией векторного расслоения двойственного расслоения $\mathcal{T}E^*$ (см., например, [24, 31, 34, 35, 40] и приведенную в этих работах библиографию). Далее мы напоминаем понятия нелинейной связности Эресманна $\mathcal{N}$, адаптированной касательной структуры $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}$ -регулярного сечения ρ (см. [25]), которые позволяют ввести эндоморфизм Якоби Φ и динамическую ковариантную производную ∇ (см. [52, 53]), нужные для поиска инвариантных уравнений некоторых типов симметрий для гамильтоновых систем. В разделе 3 исследуются свойства динамической ковариантной производной. Доказано, что условие совместности динамической ковариантной производной с адаптированной касательной структурой, т.е. $\nabla \mathcal{J} = 0$, фиксирует нелинейную связность $\mathcal{N} = -\mathcal{L}_\rho \mathcal{J}$. В разделе 4 введена линейная связность Бервальда на алгеброидах Ли $\mathcal{T}E^*$ и изучены ее свойства. Доказано, что в случае горизонтальных $\mathcal{J}$ -регулярных сечений связность Бервальда совпадает с динамической ковариантной производной. Как следствие, доказано, что интегральные кривые горизонтальных гамильтоновых сечений являются геодезическими линейной связности Бервальда. Более того, если геодезические расположены на многообразии с положительной постоянной кривизной, то геодезические сфокусированы в определенных точках, а отрицательная кривизна рассеивает геодезические, которые никогда не пересекаются. В последнем разделе 5 изучаются симметрии и законы сохранения для гамильтоновых систем на алгеброидах Ли. Для регулярной гамильтоновой функции $\mathcal{H}$ на E^* введены адаптированная касательная структура $\mathcal{J}_\mathcal{H}$ и регулярные сечения $\rho_\mathcal{H}$, которые составляют гамильтоново сечение. Эти геометрические структуры позволяют изучить

инфинитезимальные симметрии, естественные инфинитезимальные симметрии, ньютоновы сечения, инфинитезимальные симметрии Нетер и законы сохранения на алгеброидах Ли. Более того, при помощи динамической ковариантной производной и эндоморфизма Якоби на $\mathcal{T}E^*$ найдены инвариантные уравнения инфинитезимальных симметрий и ньютоновых сечений и доказано, что эти симметрии определяют каноническую нелинейную связность $\mathcal{N} = -\mathcal{L}_{\rho\mathcal{H}}\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$. Также установлено, когда одна из этих симметрий включает в себя остальные, и показано, что существует взаимно однозначное соответствие между точными инфинитезимальными симметриями Нетер и законами сохранения. Наконец, в разделе 6 приведен пример из теории оптимального управления (аффинные системы управления без дрейфа с голономным распределением) и еще раз показано, что формализм алгеброидов Ли более полезен чем кокасательное расслоение для изучения симметрий гамильтоновых систем. Для дальнейшего развития изучения симметрий в k -симплектическом формализме используются динамическая ковариантная производная и эндоморфизм Якоби (см. [6, 8, 32, 61]).

2. Алгеброиды Ли. Пусть M — действительное C^∞ -дифференцируемое n -мерное многообразие и (TM, π_M, M) — его касательное расслоение. Алгеброид Ли над многообразием M есть тройка $(E, [\cdot, \cdot]_E, \sigma)$, где (E, π, M) — векторное расслоение ранга m над M , удовлетворяющее следующим условиям (см. [34]):

- (а) $C^\infty(M)$ -модуль сечений $\Gamma(E)$ снабжен структурой алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_E$;
- (б) $\sigma : E \rightarrow TM$ есть отображение расслоений (называемое якорем), которое индуцирует гомоморфизм алгебры Ли (также обозначенный через σ) из сечений алгебры Ли $(\Gamma(E), [\cdot, \cdot]_E)$ на алгебру Ли векторных полей $(\chi(M), [\cdot, \cdot])$, удовлетворяющих формуле Лейбница

$$[s_1, fs_2]_E = f[s_1, s_2]_E + (\sigma(s_1)f)s_2 \quad \forall s_1, s_2 \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M). \quad (1)$$

Из этого определения вытекают следующие факты:

- (i) $[\cdot, \cdot]_E$ есть $\mathbb{R}$ -билинейный оператор;
- (ii) $[\cdot, \cdot]_E$ кососимметрично, т.е. $[s_1, s_2]_E = -[s_2, s_1]_E$ для всех $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$;
- (iii) $[\cdot, \cdot]_E$ удовлетворяет тождеству Якоби

$$[s_1, [s_2, s_3]_E]_E + [s_2, [s_3, s_1]_E]_E + [s_3, [s_1, s_2]_E]_E = 0,$$

а σ , будучи гомоморфизмом алгебры Ли, означает, что $\sigma[s_1, s_2]_E = [\sigma(s_1), \sigma(s_2)]$.

Если f — функция на M , то $df(x) \in E_x^*$ задан с помощью правила

$$\langle df(x), a \rangle = \sigma(a)f \quad \forall a \in E_x.$$

Для $\omega \in \bigwedge^k(E^*)$ внешняя производная $d^E\omega \in \bigwedge^{k+1}(E^*)$ задана формулой

$$\begin{aligned} d^E\omega(s_1, \dots, s_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \sigma(s_i) \omega(s_1, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_{k+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([s_i, s_j]_E, s_1, \dots, \hat{s}_i, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_{k+1}), \end{aligned}$$

где $s_i \in \Gamma(E)$, $i = \overline{1, k+1}$, а знак $\hat{}$ над аргументом означает отсутствие аргумента. Из этого вытекает, что $(d^E)^2 = 0$ и для $\xi \in \Gamma(E)$ можно определить *производную Ли* относительно ξ формулой

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d^E + d^E \circ i_\xi,$$

где i_ξ — свертка с ξ . Напомним, что, если L и K — тензорные поля типа $(1, 1)$, то скобка Фрелихера—Нийенхайса $[L, K]$ — это векторнозначная 2-форма (см. [20])

$$\begin{aligned} [L, K]_E(X, Y) &= [LX, KY]_E + [KX, LY]_E + (LK + KL)[X, Y]_E - \\ &- L[X, KY]_E - K[X, LY]_E - L[KX, Y]_E - K[LX, Y]_E, \end{aligned}$$

а тензор Нийенхайса для L задан формулой

$$\mathbf{N}_L(X, Y) = \frac{1}{2}[L, L]_E = [LX, LY]_E + L^2[X, Y]_E - L[X, LY]_E - L[LX, Y]_E.$$

Для векторного поля в $\mathcal{X}(E)$ и тензорного поля L типа $(1, 1)$ на E скобка Фрелихера—Нийенхейса $[X, L]_E = \mathcal{L}_X L$ есть тензорное поле типа $(1, 1)$ на E , заданное формулой

$$\mathcal{L}_X L = \mathcal{L}_X \circ L - L \circ \mathcal{L}_X,$$

где $\mathcal{L}_X$ — обычная производная Ли. Если взять локальные координаты (x^i) на открытом подмногообразии $U \subset$ многообразия M , то локальный базис $\{s_\alpha\}$ сечений расслоения $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ порождает локальные координаты (x^i, y^α) на E . Локальные функции $\sigma_\alpha^i(x)$, $L_{\alpha\beta}^\gamma(x)$ на M , заданные формулами

$$\sigma(s_\alpha) = \sigma_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad [s_\alpha, s_\beta]_E = L_{\alpha\beta}^\gamma s_\gamma, \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m},$$

называются *структурными функциями* алгеброидов Ли.

2.1. Продолжение алгеброидов Ли над проекцией векторного расслоения двойственного расслоения. Пусть $\tau : E^* \rightarrow M$ — двойственное расслоение $\pi : E \rightarrow M$, $(E, [\cdot, \cdot]_E, \sigma)$ — структура алгеброида Ли над M . Можно построить структуру алгеброида Ли над E^* с помощью продолжения $(E, [\cdot, \cdot]_E, \sigma)$ над $\tau : E^* \rightarrow M$ (см. [24, 25, 31]). Ассоциированное векторное расслоение есть $(\mathcal{T}E^*, \tau_1, E^*)$, где

$$\mathcal{T}E^* = \bigcup_{u^* \in E^*} \mathcal{T}_{u^*} E^*, \quad \mathcal{T}_{u^*} E^* = \left\{ (u_x, v_{u^*}) \in E_x \times T_{u^*} E^* \mid \sigma(u_x) = T_{u^*} \tau(v_{u^*}), \tau(u^*) = x \in M \right\}$$

и проекция

$$\tau_1 : \mathcal{T}E^* \rightarrow E^*, \quad \tau_1(u_x, v_{u^*}) = u^*.$$

Структура алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{T}E^*}$ на $\Gamma(\mathcal{T}E^*)$ определена следующим образом: если $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ таковы, что

$$\begin{aligned} \rho_i(u^*) &= (X_i(\tau(u^*)), U_i(u^*)), \quad X_i \in \Gamma(E), \quad U_i \in \chi(E^*), \\ \sigma(X_i(\tau(u^*))) &= T_{u^*} \tau(U_i(u^*)), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

то

$$[\rho_1, \rho_2]_{\mathcal{T}E^*}(u^*) = \left([X_1, X_2]_{\mathcal{T}E^*}(\tau(u^*)), [U_1, U_2]_{\mathcal{T}E^*}(u^*) \right).$$

Якорь есть проекция

$$\sigma^1 : \mathcal{T}E^* \rightarrow TE^*, \quad \sigma^1(u, v) = v.$$

Заметим, что, если $\mathcal{T}\tau : \mathcal{T}E^* \rightarrow E$, $\mathcal{T}\tau(u, v) = u$, то $(V\mathcal{T}E^*, \tau_1|_{V\mathcal{T}E^*}, E^*)$ с условием $V\mathcal{T}E^* = \text{Ker } \mathcal{T}\tau$ есть подрасслоение $(\mathcal{T}E^*, \tau_1, E^*)$, называемое *вертикальным подрасслоением*. Если (q^i, μ_α) — локальные координаты на E^* в u^* , а $\{s_\alpha\}$ — локальный базис сечений $\pi : E \rightarrow M$, то локальный базис $\Gamma(\mathcal{T}E^*)$ есть $\{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{P}^\alpha\}$, где (см. [31])

$$\mathcal{Q}_\alpha(u^*) = \left(s_\alpha(\tau(u^*)), \sigma_\alpha^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{u^*} \right), \quad \mathcal{P}^\alpha(u^*) = \left(0, \frac{\partial}{\partial \mu_\alpha} \Big|_{u^*} \right).$$

Структурные функции на $\mathcal{T}E^*$ заданы с помощью следующих формул:

$$\sigma^1(\mathcal{Q}_\alpha) = \sigma_\alpha^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad \sigma^1(\mathcal{P}^\alpha) = \frac{\partial}{\partial \mu_\alpha}, \quad (2)$$

$$[\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta]_{\mathcal{T}E^*} = L_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{Q}_\gamma, \quad [\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{P}^\alpha]_{\mathcal{T}E^*} = 0, \quad [\mathcal{P}^\alpha, \mathcal{P}^\beta]_{\mathcal{T}E^*} = 0 \quad (3)$$

и, таким образом,

$$d^E q^i = \sigma_\alpha^i \mathcal{Q}^\alpha, \quad d^E \mu_\alpha = \mathcal{P}_\alpha, \quad d^E \mathcal{Q}^\gamma = -\frac{1}{2} L_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{Q}^\alpha \wedge \mathcal{Q}^\beta, \quad d^E \mathcal{P}_\alpha = 0,$$

где $\{\mathcal{Q}^\alpha, \mathcal{P}_\alpha\}$ — двойственный базис для $\{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{P}^\alpha\}$. Кроме того, если $\rho = \rho^\alpha \mathcal{Q}_\alpha + \rho_\alpha \mathcal{P}^\alpha$ есть сечение $\mathcal{T}E^*$, то

$$\sigma^1(\rho) = \sigma_\alpha^i \rho^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial \mu_\alpha}.$$

Если $u^* \in E^*$ и $(u_x, v_{u^*}) \in E_x \times T_{u^*} E^*$, то $\theta_E(u^*)(u_x, v_{u^*}) = u^*(u_x)$ называется *сечением Лиувилля*. Каноническое симплектическое сечение ω_E определяется с помощью формулы $\omega_E = -d^E \theta_E$, поэтому оно является невырожденным 2-сечением и $d^E \omega_E = 0$. На E^* имеем похожую концепцию

вертикального лифта, что и в E . Если $\alpha \in \Gamma(E^*)$, то можно определить векторное поле α^v на E^* с помощью формулы $\alpha^v(u^*) = \alpha(\tau(u^*))_{u^*}^v$, $u^* \in E^*$, где $v_{u^*} : E_{\tau(u^*)}^* \rightarrow T_{u^*}(E_{\tau(u^*)}^*)$ — канонический изоморфизм между вертикальными пространствами $E_{\tau(u^*)}^*$ и $T_{u^*}(E_{\tau(u^*)}^*)$. Кроме того, если X есть сечение $\pi : E \rightarrow M$, то существует единственное векторное поле X^{*c} на E^* , называемое полным лифтом X на E^* , удовлетворяющим следующим двум условиям:

- (i) X^{*c} является τ -проецируемым на $\sigma(X)$,
- (ii) $X^{*c}(\widehat{Y}) = \widehat{\mathcal{L}_X Y}$ при всех $Y \in \Gamma(E)$ (см. [22]).

Если X есть сечение E , то $\widehat{X}$ есть линейная функция $\widehat{X} \in C^\infty(E^*)$, заданная формулой $\widehat{X}(u^*) = u^*(X(\tau(u^*)))$ при всех $u^* \in E^*$. Теперь введем вертикальный лифт α^v и полный лифт X^{*c} сечения $\alpha \in \Gamma(E^*)$ и сечения $X \in \Gamma(E)$ в виде сечений $\mathcal{T}E^*$, заданных с помощью

$$\alpha^v(u^*) = (0, \alpha^v(u^*)), \quad X^{*c} = (X(\tau(u^*)), X^{*c}(u^*)), \quad u^* \in E^*.$$

Другой канонический объект на $\mathcal{T}E^*$, сечение Лиувилля—Гамильтона $\mathcal{C}$, задается условием $\mathcal{C}(u^*) = (0, u_{u^*}^{*v})$, $u^* \in E^*$. В локальных координатах сечение Лиувилля задается уравнением $\theta_E = \mu_\alpha \mathcal{Q}^\alpha$; получаем (см. [31])

$$\omega_E = \mathcal{Q}^\alpha \wedge \mathcal{P}_\alpha + \frac{1}{2} \mu_\alpha L_{\beta\gamma}^\alpha \mathcal{Q}^\beta \wedge \mathcal{Q}^\gamma. \quad (4)$$

Сечение Лиувилля—Гамильтона $\mathcal{C}$ имеет локальное выражение $\mathcal{C} = \mu_\alpha \mathcal{P}^\alpha$. Если θ есть сечение E^* , $\theta = \theta_\alpha s^\alpha$, и X — сечение E , $X = X^\alpha s_\alpha$, то для вертикального и полного лифта имеем выражения

$$\theta^v = \theta_\alpha \mathcal{P}^\alpha, \quad X^{*c} = X^\alpha \mathcal{Q}_\alpha - \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial q^i} + L_{\alpha\beta}^\varepsilon X^\beta \right) \mu_\varepsilon \mathcal{P}^\alpha.$$

Заметим, что $V\mathcal{T}E^*$ есть лагранжиан для ω_E , т.е. $\omega_E(\rho_1, \rho_2) = 0$ для всех вертикальных сечений $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(V\mathcal{T}E^*)$.

Определение 1 (см. [25]). Нелинейная связность Эресмана на $\mathcal{T}E^*$ является почти структурой произведения $\mathcal{N}$ на $\tau_1 : \mathcal{T}E^* \rightarrow E^*$ (т.е. морфизмом расслоения $\mathcal{N} : \mathcal{T}E^* \rightarrow \mathcal{T}E^*$, так что $\mathcal{N}^2 = \text{Id}$), гладкой на $\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}$, поэтому $V\mathcal{T}E^* = \text{Ker}(\text{Id} + \mathcal{N})$.

Если $\mathcal{N}$ — связность на $\mathcal{T}E^*$, то $H\mathcal{T}E^* = \text{Ker}(\text{Id} - \mathcal{N})$ — горизонтальное распределение, ассоциированное с $\mathcal{N}$ и $\mathcal{T}E^* = V\mathcal{T}E^* \oplus H\mathcal{T}E^*$. Каждое $\rho \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ можно записать в виде $\rho = \rho^h + \rho^v$, где ρ^h, ρ^v — сечения в горизонтальном и вертикальном подрасслоениях соответственно. Если $\rho^h = 0$, то ρ называется *вертикальным*, а если $\rho^v = 0$ — *горизонтальным* сечением. Связность $\mathcal{N}$ на E^* индуцирует два проектора $h, v : \mathcal{T}E^* \rightarrow \mathcal{T}E^*$, так что $h(\rho) = \rho^h$ и $v(\rho) = \rho^v$ при любом $\rho \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$. Имеем

$$h = \frac{1}{2}(\text{Id} + \mathcal{N}), \quad v = \frac{1}{2}(\text{Id} - \mathcal{N}), \quad \text{Ker } h = \text{Im } v = V\mathcal{T}E^*, \quad \text{Im } h = \text{Ker } v = H\mathcal{T}E^*,$$

$$h^2 = h, \quad v^2 = v, \quad hv = vh = 0, \quad h + v = \text{Id}, \quad h - v = \mathcal{N}.$$

Локально связность можно выразить следующим образом:

$$\mathcal{N}(\mathcal{Q}_\alpha) = \mathcal{Q}_\alpha + 2\mathcal{N}_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\beta, \quad \mathcal{N}(\mathcal{P}^\alpha) = -\mathcal{P}^\alpha,$$

где $\mathcal{N}_{\alpha\beta}(q, \mu)$ — локальные коэффициенты $\mathcal{N}$. Локальные сечения $\mathcal{P}^\alpha$, $\alpha = \overline{1, m}$, определяют локальный репер для $V\mathcal{T}E^*$, а сечения $\delta_\alpha^* = (\mathcal{Q}_\alpha)^h = \mathcal{Q}_\alpha + \mathcal{N}_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\beta$ порождают локальный репер для $H\mathcal{T}E^*$. Репер $\{\delta_\alpha^*, \mathcal{P}^\alpha\}$ задает локальный базис для $\mathcal{T}E^*$. Дуальный адаптированный базис совпадает с $\{\mathcal{Q}^\alpha, \delta\mathcal{P}_\alpha\}$, где $\delta\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha - \mathcal{N}_{\alpha\beta} \mathcal{Q}^\beta$. Связность $\mathcal{N}$ называется симметричной, если $H\mathcal{T}E^*$ — лагранжиан для ω_E ; отсюда следует, что $\mathcal{N}$ симметрично тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_{\alpha\beta} - \mathcal{N}_{\beta\alpha} = \mu_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma$. Скобки Ли адаптированного базиса $\{\delta_\alpha^*, \mathcal{P}^\alpha\}$ заданы уравнениями (см. [25])

$$\mathcal{T}E^* = L_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\gamma^* + \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{P}^\gamma, \quad [\delta_\alpha^*, \mathcal{P}^\beta]_{\mathcal{T}E^*} = -\frac{\partial \mathcal{N}_{\alpha\gamma}}{\partial \mu_\beta} \mathcal{P}^\gamma, \quad [\mathcal{P}^\alpha, \mathcal{P}^\beta]_{\mathcal{T}E^*} = 0, \quad (5)$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma} = \delta_\alpha^* (\mathcal{N}_{\beta\gamma}) - \delta_\beta^* (\mathcal{N}_{\alpha\gamma}) - L_{\alpha\beta}^\varepsilon \mathcal{N}_{\varepsilon\gamma}.$$

Кривизна связности $\mathcal{N}$ на TE^* определяется с помощью $\Omega = -\mathbf{N}_h$, где h — горизонтальный проектор, а $\mathbf{N}_h$ — тензор Нийенхейса для h . В локальных координатах получаем

$$\Omega = -\frac{1}{2}\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{Q}^\alpha \wedge \mathcal{Q}^\beta \otimes \mathcal{P}^\gamma,$$

где $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}$ заданы с помощью (5) и называются коэффициентами *тензора кривизны* для $\mathcal{N}$. Кривизна препятствует интегрируемости HTE^* в том смысле, что обращение кривизны в нуль влечет за собой замкнутость горизонтальных сечений относительно скобок алгеброида Ли TE^* . Получаем, что HTE^* интегрируемо тогда и только тогда, когда кривизна обращается в нуль.

Далее представлены понятия адаптированной касательной структуры и регулярного сечения, которые полезны для поиска канонической нелинейной связности (см. [25]).

Определение 2. Почти касательная структура $\mathcal{J}$ на TE^* есть морфизм $\mathcal{J} : TE^* \rightarrow TE^*$ расслоения $\tau_1 : TE^* \rightarrow E^*$ ранга m , так что $\mathcal{J}^2 = 0$. Почти касательная структура $\mathcal{J}$ на TE^* называется *адаптированной*, если $\text{Im } \mathcal{J} = \text{Ker } \mathcal{J} = VTE^*$. Локально адаптированная почти касательная структура задана с помощью уравнения

$$\mathcal{J} = t_{\alpha\beta}\mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta, \quad (6)$$

где тензор $t_{\alpha\beta}(x, \mu)$ невырожден.

Теперь найдем условия интегрируемости для адаптированной почти касательной структуры. Из [25] следует, что $\mathcal{J}$ является интегрируемой структурой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial t^{\alpha\gamma}}{\partial \mu_\beta} = \frac{\partial t^{\beta\gamma}}{\partial \mu_\alpha}, \quad (7)$$

где $t^{\alpha\gamma}t_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$. Адаптированная почти касательная структура $\mathcal{J}$ на TE^* называется *симметричной*, если $\omega_E(\mathcal{J}\rho_1, \rho_2) = \omega_E(\mathcal{J}\rho_2, \rho_1)$; локально она требует наличия симметрии тензора $t_{\alpha\beta}$. Если g — псевдориманова метрика на вертикальном расслоении VTE^* , то существует единственная симметричная адаптированная почти касательная структура на TE^* , для которой $g(\mathcal{J}\rho, \mathcal{J}\nu) = -\omega_E(\mathcal{J}\rho, \nu)$; при этом $\mathcal{J}$ индуцируется метрикой g . Локально, если $g(q, \mu) = g^{\alpha\beta}\mathcal{P}_\alpha \otimes \mathcal{P}_\beta$, то $t^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$.

Определение 3. Пусть $\mathcal{J}$ — адаптированная касательная структура на TE^* . Сечение ρ расслоения TE^* называется *$\mathcal{J}$ -регулярным*, если

$$\mathcal{J}[\rho, \mathcal{J}\nu]_{TE^*} = -\mathcal{J}\nu \quad (8)$$

при любом сечении ν расслоения TE^* .

Локально, сечение $\rho = \xi^\alpha \mathcal{Q}_\alpha + \rho_\beta \mathcal{P}^\beta$ является $\mathcal{J}$ -регулярным тогда и только тогда, когда

$$t^{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \mu_\alpha},$$

где $t^{\alpha\beta}t_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\gamma$. Следует заметить, что если уравнение (8) справедливо для любого сечения $\nu \in \Gamma(TE^*)$, для которого $\text{rank}[t^{\alpha\beta}] = m$, то $\mathcal{J}$ — *интегрируемая* структура.

Далее введем эндоморфизм Якоби (см. [52]), который вместе с динамической ковариантной производной позволяет найти инвариантные уравнения некоторых типов симметрий для гамильтоновых систем.

Определение 4. Для $\mathcal{J}$ -регулярного сечения ρ и произвольной нелинейной связности $\mathcal{N}$ с индуцированными проекторами (h, v) рассмотрим вертикальнозначный тензор типа $(1, 1)$ на $TE^* \setminus \{0\}$, заданный с помощью уравнения

$$\Phi = v \circ \mathcal{L}_\rho h$$

и называемый эндоморфизмом Якоби.

Имеют место формулы

$$\Phi = v \circ \mathcal{L}_\rho h = -v \circ \mathcal{L}_\rho v = v \circ (\mathcal{L}_\rho \circ h - h \circ \mathcal{L}_\rho) = v \circ \mathcal{L}_\rho \circ h.$$

Предложение 1. *Справедливы следующие уравнения:*

$$\mathcal{L}_\rho \mathcal{P}^\beta = [\rho, \mathcal{P}^\beta]_{TE^*} = -t^{\alpha\beta} \delta_\alpha^* + \left(t^{\alpha\beta} \mathcal{N}_{\alpha\gamma} - \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial \mu_\beta} \right) \mathcal{P}^\gamma, \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_\rho \delta_\beta^* = [\rho, \delta_\beta^*]_{TE^*} = -(\delta_\beta^*(\xi^\alpha) + \xi^\varepsilon L_{\varepsilon\beta}^\alpha) \delta_\alpha^* + \mathcal{R}_{\beta\gamma} \mathcal{P}^\gamma, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{R}_{\beta\gamma} = \delta_\beta^*(\xi^\alpha) \mathcal{N}_{\alpha\gamma} + \rho(\mathcal{N}_{\beta\gamma}) - \delta_\beta^*(\rho_\gamma) - \xi^\varepsilon L_{\varepsilon\beta}^\alpha \mathcal{N}_{\alpha\gamma}. \quad (11)$$

Локально эндоморфизм Якоби имеет вид

$$\Phi = \mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta,$$

где $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ определено формулой (11).

Предложение 2. *Имеет место формула*

$$\Phi = i_\rho \Omega + v \circ \mathcal{L}_{v\rho} h.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\Phi(X) = v[\rho, hX]_{TE^*} = v[h\rho, hX]_{TE^*} + v[v\rho, hX]_{TE^*}, \quad \Omega(\rho, X) = v[h\rho, hX]_{TE^*},$$

так что $\Phi(X) = \Omega(\rho, X) + v[v\rho, hX]_{TE^*}$. $\square$

Замечание 1. Если ρ — горизонтальное сечение, для которого $\rho = h\rho$, $v\rho = 0$, то получаем $\Phi = i_\rho \Omega$, и локально

$$\rho = \xi^\alpha \delta_\alpha^*, \quad \rho_\gamma = \xi^\alpha \mathcal{N}_{\alpha\gamma}, \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\varepsilon\alpha\beta} \xi^\varepsilon,$$

а значит получены локальные отношения между эндоморфизмом Якоби и тензором кривизны для нелинейной связности.

3. Динамическая ковариантная производная. Для заданного $\mathcal{J}$ -регулярного сечения ρ на TE^* производная Ли $\mathcal{L}_\rho$ определяет производную тензора на TE^* , но не сохраняет некоторые геометрические структуры, например, адаптированную касательную структуру или нелинейную связность. Далее, используя нелинейную связность, введем производную тензора на TE^* , называемую динамической ковариантной производной, которая сохраняет некоторые геометрические структуры (см., например, [54, 57] для случая кокасательного расслоения).

Определение 5 (см. [52]). Отображение $\nabla : \mathfrak{T}(TE^* \setminus \{0\}) \rightarrow \mathfrak{T}(TE^* \setminus \{0\})$ называется тензорной производной на $TE^* \setminus \{0\}$, если выполнены следующие условия:

- (i) ∇ является $\mathbb{R}$ -линейным;
- (ii) ∇ сохраняет тип, т.е.

$$\nabla \mathfrak{T}_s^r(TE^* \setminus \{0\}) \subset \mathfrak{T}_s^r(TE^* \setminus \{0\}) \quad \forall (r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};$$

- (iii) ∇ удовлетворяет формуле Лейбница: $\nabla(P \otimes S) = \nabla P \otimes S + P \otimes \nabla S$ для любых тензоров P, S на $TE^* \setminus \{0\}$;
- (iv) ∇ коммутирует с любыми свертками.

Для $\mathcal{J}$ -регулярного сечения ρ и произвольной нелинейной связности $\mathcal{N}$ с индуцированными проекторами (h, v) рассмотрим отображение

$$\nabla : \Gamma(TE^* \setminus \{0\}) \rightarrow \Gamma(TE^* \setminus \{0\}),$$

заданное формулой

$$\nabla = h \circ \mathcal{L}_\rho \circ h + v \circ \mathcal{L}_\rho \circ v; \quad (12)$$

оно называется динамической ковариантной производной относительно ρ и нелинейной связности $\mathcal{N}$. Следует заметить, что никакой зависимости между ρ и нелинейной связностью $\mathcal{N}$ с индуцированными проекторами (h, v) пока не подразумевается. Установив $\nabla f = \rho(f)$ и для $f \in C^\infty(TE^* \setminus \{0\})$ и используя формулу Лейбница и требование, что ∇ коммутирует с любым

сжатием, можно расширить действие ∇ на произвольное сечение расслоения $\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}$. Для сечения $\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}$ динамическая ковариантная производная задана формулой

$$(\nabla\varphi)(X) = \rho(\varphi)(X) - \varphi(\nabla X).$$

Для тензора T типа $(1, 1)$ на $\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}$ динамическая ковариантная производная имеет вид

$$\nabla T = \nabla \circ T - T \circ \nabla.$$

Непосредственное вычисление приводит к соотношению $\nabla h = \nabla v = 0$ и следующей формуле для действия динамической ковариантной производной:

$$\nabla \mathcal{P}^\beta = v[\rho, \mathcal{P}^\beta]_{\mathcal{T}E^*} = \left(t^{\alpha\beta} \mathcal{N}_{\alpha\gamma} - \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial \mu_\beta} \right) \mathcal{P}^\gamma, \quad \nabla \delta \mathcal{P}_\beta = - \left(t^{\gamma\alpha} \mathcal{N}_{\alpha\beta} - \frac{\partial \rho_\beta}{\partial \mu_\gamma} \right) \delta \mathcal{P}_\gamma, \quad (13)$$

$$\nabla \delta_\beta^* = h[\rho, \delta_\beta^*]_{\mathcal{T}E^*} = -(\delta_\beta^*(\xi^\alpha) + \xi^\varepsilon L_{\varepsilon\beta}^\alpha) \delta_\alpha^*, \quad \nabla \mathcal{Q}^\beta = (\delta_\alpha^*(\xi^\beta) + \xi^\varepsilon L_{\varepsilon\alpha}^\beta) \mathcal{Q}^\alpha. \quad (14)$$

Следующее предложение доказывает условия совместимости между некоторыми геометрическими структурами на алгеброидах Ли.

Предложение 3. *Справедливы следующие результаты:*

$$h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} = -h, \quad \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = -v, \quad (15)$$

$$\nabla \mathcal{J} = \mathcal{L}_\rho \mathcal{J} + \mathcal{N}, \quad \nabla \mathcal{J} = \left(\rho(t_{\alpha\beta}) + t_{\gamma\beta} \sigma_\alpha^i \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial q^i} + t_{\gamma\beta} \xi^\varepsilon L_{\varepsilon\alpha}^\gamma - t_{\alpha\gamma} \frac{\partial \rho_\beta}{\partial \mu_\gamma} + 2\mathcal{N}_{\alpha\beta} \right) \mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta. \quad (16)$$

Доказательство. Из (8) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\rho, \mathcal{J}X]_{\mathcal{T}E^*} = -\mathcal{J}X &\Rightarrow \mathcal{J}([\rho, \mathcal{J}X]_{\mathcal{T}E^*} + X) = 0 \Rightarrow [\rho, \mathcal{J}X]_{\mathcal{T}E^*} + X \in V\mathcal{T}E^*, \\ h([\rho, \mathcal{J}X]_{\mathcal{T}E^*} + X) = 0 &\Rightarrow h[\rho, \mathcal{J}X]_{\mathcal{T}E^*} = -hX \Leftrightarrow h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} = -h. \end{aligned}$$

Также из уравнения

$$\mathcal{J}[\rho, \mathcal{J}X]_{\mathcal{T}E^*} + \mathcal{J}X = 0,$$

принимая во внимание соотношение $\mathcal{J}X = vZ$, следует, что

$$\mathcal{J}[\rho, vZ]_{\mathcal{T}E^*} = -vZ \Leftrightarrow \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = -v.$$

Затем имеем

$$\begin{aligned} \nabla \circ \mathcal{J} &= h \circ \mathcal{L}_\rho \circ h \circ \mathcal{J} + v \circ \mathcal{L}_\rho \circ v \circ \mathcal{J} = v \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} = \\ &= (\text{Id} - h) \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} = \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} - h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} = \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} + h. \end{aligned}$$

Более того, получаем

$$\mathcal{J} \circ \nabla = \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho \circ h = \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho \circ (\text{Id} - v) = \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho - \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho + v$$

и, следовательно,

$$\nabla \circ \mathcal{J} - \mathcal{J} \circ \nabla = \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} + h - \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho - v \Rightarrow \nabla \mathcal{J} = \mathcal{L}_\rho \mathcal{J} + h - v.$$

Далее, получаем

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{J} &= \nabla \left(t_{\alpha\beta} \mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta \right) = \nabla t_{\alpha\beta} \mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta + t_{\alpha\beta} \mathcal{Q}^\alpha \otimes \nabla \mathcal{P}^\beta = \\ &= \left(\rho(t_{\alpha\beta}) \mathcal{Q}^\alpha + t_{\alpha\beta} \nabla \mathcal{Q}^\alpha \right) \otimes \mathcal{P}^\beta + t_{\alpha\beta} \mathcal{Q}^\alpha \otimes \nabla \mathcal{P}^\beta = \\ &= \rho(t_{\alpha\beta}) \mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta + t_{\alpha\beta} \left(\delta_\gamma^*(\xi^\alpha) + \xi^\varepsilon L_{\varepsilon\gamma}^\alpha \right) \mathcal{Q}^\gamma \otimes \mathcal{P}^\beta + t_{\alpha\beta} \mathcal{Q}^\alpha \otimes \left(t^{\alpha\beta} \mathcal{N}_{\alpha\gamma} - \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial \mu_\beta} \right) \mathcal{P}^\gamma = \\ &= \left(\rho(t_{\alpha\beta}) + t_{\gamma\beta} \delta_\alpha^*(\xi^\gamma) + t_{\gamma\beta} \xi^\varepsilon L_{\varepsilon\alpha}^\gamma + \mathcal{N}_{\alpha\beta} - t_{\alpha\gamma} \frac{\partial \rho_\beta}{\partial \mu_\gamma} \right) \mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta = \\ &= \left(\rho(t_{\alpha\beta}) + t_{\gamma\beta} \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial q^i} + \mathcal{N}_{\alpha\varepsilon} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \mu_\varepsilon} \right) + t_{\gamma\beta} \xi^\varepsilon L_{\varepsilon\alpha}^\gamma + \mathcal{N}_{\alpha\beta} - t_{\alpha\gamma} \frac{\partial \rho_\beta}{\partial \mu_\gamma} \right) \mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\rho(t_{\alpha\beta}) + t_{\gamma\beta} \sigma_{\alpha}^i \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial q^i} + t_{\gamma\beta} t^{\varepsilon\gamma} \mathcal{N}_{\alpha\varepsilon} + t_{\gamma\beta} \xi^{\varepsilon} L_{\varepsilon\alpha}^{\gamma} + \mathcal{N}_{\alpha\beta} - t_{\alpha\gamma} \frac{\partial \rho_{\beta}}{\partial \mu_{\gamma}} \right) \mathcal{Q}^{\alpha} \otimes \mathcal{P}^{\beta} = \\
&= \left(\rho(t_{\alpha\beta}) + t_{\gamma\beta} \sigma_{\alpha}^i \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial q^i} + t_{\gamma\beta} \xi^{\varepsilon} L_{\varepsilon\alpha}^{\gamma} - t_{\alpha\gamma} \frac{\partial \rho_{\beta}}{\partial \mu_{\gamma}} + 2\mathcal{N}_{\alpha\beta} \right) \mathcal{Q}^{\alpha} \otimes \mathcal{P}^{\beta}.
\end{aligned}$$

Предложение 3 доказано. $\square$

Следует заметить, что формула $\nabla \mathcal{J} = \mathcal{L}_{\rho} \mathcal{J} + \mathcal{N}$ показывает разницу между произвольной нелинейной связностью $\mathcal{N}$, которая пока не зафиксирована, и канонической нелинейной связностью, ассоциированной с $\mathcal{J}$ -регулярным сечением ρ , которая будет зафиксирована в следующей теореме.

Теорема 1. Для $\mathcal{J}$ -регулярного сечения ρ , произвольной нелинейной связности $\mathcal{N}$ и динамической ковариантной производной ∇ относительно ρ и $\mathcal{N}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $\nabla \mathcal{J} = 0$;
- (ii) $\mathcal{L}_{\rho} \mathcal{J} + \mathcal{N} = 0$;
- (iii) справедлива формула

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(t_{\alpha\gamma} \frac{\partial \rho_{\beta}}{\partial \mu_{\gamma}} - \sigma_{\alpha}^i t_{\gamma\beta} \frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial q^i} - \rho(t_{\alpha\beta}) + \xi^{\gamma} t_{\varepsilon\beta} L_{\gamma\alpha}^{\varepsilon} \right).$$

Доказательство следует из соотношений (16).

Теорема 1 показывает, что условие совместимости $\nabla \mathcal{J} = 0$ для динамической ковариантной производной с адаптированной касательной структурой $\mathcal{J}$ фиксирует нелинейную связность $\mathcal{N} = -\mathcal{L}_{\rho} \mathcal{J}$. Далее будем иметь дело с этой нелинейной связностью, индуцированной $\mathcal{J}$ -регулярным сечением ρ , называемой канонической нелинейной связностью. Рассмотрим $\mathbb{R}$ -линейное отображение

$$\begin{aligned}
&\nabla_0 : \Gamma(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}), \\
&\nabla_0 X = h[\rho, hX]_{\mathcal{T}E^*} + v[\rho, vX]_{\mathcal{T}E^*} \quad \forall X \in \Gamma(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}),
\end{aligned} \tag{17}$$

где ρ — $\mathcal{J}$ -регулярное сечение. Имеем

$$\nabla_0(fX) = \rho(f)X + f\nabla_0 X \quad \forall f \in C^{\infty}(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}). \tag{18}$$

Любая тензорная производная на $\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}$ полностью определена своими действиями на гладких функциях и сечениях на $\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}$ (см. обобщенную теорему Уиллмора в [64]). Таким образом, существует единственная тензорная производная ∇ на $\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}$, так что

$$\nabla|_{C^{\infty}(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\})} = \rho, \quad \nabla|_{\Gamma(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\})} = \nabla_0.$$

Тензорную производную ∇ будем называть *динамической ковариантной производной*, индуцированной $\mathcal{J}$ -регулярным сечением ρ . Введем почти комплексную структуру, которая поможет найти формулу разложения для динамической ковариантной производной и изучить линейную связность Бервальда.

Определение 6. Почти комплексная структура задается следующим образом:

$$\mathbb{F} = h \circ \mathcal{L}_{\rho} h - \mathcal{J}.$$

Предложение 4. Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{F}^2 = -\text{Id}, \quad \mathbb{F} \circ \mathcal{J} = h, \quad \mathcal{J} \circ \mathbb{F} = v, \quad v \circ \mathbb{F} = \mathbb{F} \circ h = -\mathcal{J}, \\
&h \circ \mathbb{F} = \mathbb{F} \circ v = \mathbb{F} + \mathcal{J}, \quad \mathcal{N} \circ \mathbb{F} = \mathbb{F} + 2\mathcal{J}, \quad \Phi = \mathcal{L}_{\rho} h - \mathbb{F} - \mathcal{J}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbb{F} = h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ h - h \circ \mathcal{L}_{\rho} - \mathcal{J} = h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ (h - \text{Id}) - \mathcal{J} = -h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ v - \mathcal{J};$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^2 &= \left(-h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ v - \mathcal{J} \right) \circ \left(-h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ v - \mathcal{J} \right) = \\
&= h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ v \circ h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ v + h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ v \circ \mathcal{J} + \mathcal{J} \circ h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ v + \mathcal{J}^2 = \\
&= h \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ \mathcal{J} + \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_{\rho} \circ v = -h - v = -\text{Id},
\end{aligned}$$

$$\mathbb{F} \circ \mathcal{J} = \left(-h \circ \mathcal{L}_\rho \circ v - \mathcal{J} \right) \circ \mathcal{J} = -h \circ \mathcal{L}_\rho \circ v \circ \mathcal{J} - \mathcal{J}^2 = -h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} = h.$$

Остальные соотношения можно доказать тем же способом, используя (15). $\square$

В локальных координатах получаем следующее локальное выражение для почти комплексной структуры:

$$\mathbb{F} = t_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\beta \otimes \mathcal{Q}^\alpha - t^{\alpha\beta} \delta_\alpha^* \otimes \delta \mathcal{P}_\beta.$$

Предложение 5. *Динамическая ковариантная производная может быть задана с помощью уравнения*

$$\nabla = \mathcal{L}_\rho + \mathbb{F} + \mathcal{J} - \Phi.$$

Доказательство. Используя соотношение (12), получаем

$$\begin{aligned} \nabla &= h \circ \mathcal{L}_\rho \circ h + v \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = h \circ (\mathcal{L}_\rho h + h \circ \mathcal{L}_\rho) + v \circ (\mathcal{L}_\rho v + v \circ \mathcal{L}_\rho) = \\ &= h \circ \mathcal{L}_\rho h + v \circ \mathcal{L}_\rho v + (h + v) \circ \mathcal{L}_\rho = \mathcal{L}_\rho + \mathbb{F} + \mathcal{J} - \Phi. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 6. *В случае канонической нелинейной связности справедливы следующие свойства:*

$$\nabla \mathcal{J} = 0, \quad \nabla \mathbb{F} = 0.$$

Доказательство. Из (16) следует $\nabla \mathcal{J} = 0$. Из соотношений

$$\mathbb{F} = -h \circ \mathcal{L}_\rho \circ v - \mathcal{J}, \quad \nabla \mathbb{F} = \nabla \circ \mathbb{F} - \mathbb{F} \circ \nabla$$

получаем

$$\begin{aligned} \nabla \mathbb{F} &= \left(h \circ \mathcal{L}_\rho \circ h + v \circ \mathcal{L}_\rho \circ v \right) \circ \left(-h \circ \mathcal{L}_\rho \circ v \right) - \left(-h \circ \mathcal{L}_\rho \circ v \right) \circ \left(h \circ \mathcal{L}_\rho \circ h + v \circ \mathcal{L}_\rho \circ v \right) = \\ &= -h \circ \mathcal{L}_\rho \circ h \circ \mathcal{L}_\rho \circ v + h \circ \mathcal{L}_\rho \circ v \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = \\ &= h \circ \mathcal{L}_\rho \circ (v - h) \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{L}_\rho \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = \\ &= h \circ \mathcal{L}_\rho \circ (\mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} - \mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho) \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = \\ &= h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{L}_\rho \circ \left(\mathcal{J} \circ \mathcal{L}_\rho \circ v \right) - \left(h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{J} \right) \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = \\ &= -h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{L}_\rho \circ v + h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \mathcal{L}_\rho \circ v = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Следует отметить, что, если ρ — горизонтальное $\mathcal{J}$ -регулярное сечение, то $\nabla \rho = 0$. В самом деле, $\rho = h\rho$, $v\rho = 0$, откуда следует

$$\nabla \rho = h \circ \mathcal{L}_\rho \circ h\rho + v \circ \mathcal{L}_\rho \circ v\rho = h \circ \mathcal{L}_\rho \circ \rho = 0.$$

4. Линейная связность Бервальда на алгеброидах Ли. Далее введем линейную связность Бервальда, индуцированную нелинейной связностью, и докажем, что в случае горизонтального $\mathcal{J}$ -регулярного сечения она совпадает с динамической ковариантной производной. Эта связность была введена на касательном расслоении Л. Бервальдом в [5] и изучена позднее в [7, 16, 43, 55].

Определение 7. Линейная связность Бервальда на $\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}$ определена следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \Gamma(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}) \times \Gamma(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}) &\rightarrow \Gamma(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\}), \\ \mathcal{D}_X Y &= v[hX, vY]_{\mathcal{T}E^*} + h[vX, hY]_{\mathcal{T}E^*} + \mathcal{J} \left[vX, (\mathbb{F} + \mathcal{J})Y \right]_{\mathcal{T}E^*} + (\mathbb{F} + \mathcal{J})[hX, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*}. \end{aligned}$$

Так как все структуры из правой части аддитивны, то $\mathcal{D}$ также аддитивна относительно обоих аргументов. Далее, используя соотношения $vh = hv = \mathcal{J}v = 0$ и $(\mathbb{F} + \mathcal{J})h = 0$, докажем непосредственным вычислением, что

$$\mathcal{D}_f X Y = f \mathcal{D}_X Y \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{T}E^*).$$

В самом деле, для первого члена из $\mathcal{D}_f X Y$ имеем

$$v[fhX, vY]_{\mathcal{T}E^*} = v\left(f[hX, vY]_{\mathcal{T}E^*} - (vY)(f)hX\right) = fv[hX, vY]_{\mathcal{T}E^*}.$$

Для того чтобы доказать соотношение $\mathcal{D}_X fY = X(f)Y + f\mathcal{D}_X Y$, заметим, что

$$\mathcal{D}_X fY = f\mathcal{D}_X Y + (hX)(f)v^2Y + (vX)(f)h^2Y + (vX)(f)\mathcal{J}(\mathbb{F} + \mathcal{J})(Y) + (hX)(f)(\mathbb{F} + \mathcal{J})\mathcal{J}(Y).$$

Поскольку $v^2 = v$, $h^2 = h$, $\mathcal{J}(\mathbb{F} + \mathcal{J}) = v$, $(\mathbb{F} + \mathcal{J})\mathcal{J} = h$, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X fY &= f\mathcal{D}_X Y + (hX)(f)vY + (vX)(f)hY + (vX)(f)vY + (hX)(f)hY = \\ &= f\mathcal{D}_X Y + (hX)(f)Y + (vX)(f)Y = f\mathcal{D}_X Y + X(f)Y; \end{aligned}$$

это доказывает, что $\mathcal{D}$ — линейная связность.

Предложение 7. *Линейная связность Бервальда обладает следующими свойствами:*

$$\mathcal{D}h = 0, \quad \mathcal{D}v = 0, \quad \mathcal{D}\mathcal{J} = 0, \quad \mathcal{D}\mathbb{F} = 0.$$

Доказательство. Используя свойства вертикального и горизонтального проектора, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X vY &= v[hX, vY]_{\mathcal{T}E^*} + \mathcal{J}\left[vX, (\mathbb{F} + \mathcal{J})Y\right]_{\mathcal{T}E^*}, \\ v(\mathcal{D}_X Y) &= v[hX, vY]_{\mathcal{T}E^*} + \mathcal{J}\left[vX, (\mathbb{F} + \mathcal{J})Y\right]_{\mathcal{T}E^*}, \end{aligned}$$

что влечет $\mathcal{D}v = 0$. Также

$$\mathcal{D}_X hY = h[vX, hY]_{\mathcal{T}E^*} + (\mathbb{F} + \mathcal{J})[hX, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*} = h(\mathcal{D}_X Y),$$

откуда следует $\mathcal{D}h = 0$. Кроме того,

$$\mathcal{D}_X \mathcal{J}Y = v[hX, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*} + \mathcal{J}[vX, hY]_{\mathcal{T}E^*}, \quad \mathcal{J}(\mathcal{D}_X Y) = \mathcal{J}[vX, hY]_{\mathcal{T}E^*} + v[hX, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*};$$

получаем

$$\mathcal{D}\mathcal{J} = 0,$$

$$\mathcal{D}_X \mathbb{F}Y = v[hX, -\mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*} + h\left[vX, (\mathbb{F} + \mathcal{J})Y\right]_{\mathcal{T}E^*} + \mathcal{J}[vX, -hY]_{\mathcal{T}E^*} + (\mathbb{F} + \mathcal{J})[hX, vY]_{\mathcal{T}E^*},$$

$$\mathbb{F}(\mathcal{D}_X Y) = (\mathbb{F} + \mathcal{J})[hX, vY]_{\mathcal{T}E^*} - \mathcal{J}[vX, hY]_{\mathcal{T}E^*} + h\left[vX, (\mathbb{F} + \mathcal{J})Y\right]_{\mathcal{T}E^*} - v[hX, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*} = \mathcal{D}_X \mathbb{F}Y,$$

что влечет $\mathcal{D}\mathbb{F} = 0$. $\square$

Отсюда следует, что связность Бервальда сохраняет одновременно горизонтальное и вертикальное распределения. Локально имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\delta_\alpha^*} \delta_\beta^* &= t^{\varepsilon\xi} \left(\delta_\alpha^*(t_{\beta\varepsilon}) - t_{\beta\gamma} \frac{\partial \mathcal{N}_{\alpha\varepsilon}}{\partial \mu_\gamma} \right) \delta_\xi^*, & \mathcal{D}_{\delta_\alpha^*} \mathcal{P}^\beta &= -\frac{\partial \mathcal{N}_{\alpha\gamma}}{\partial \mu_\beta} \mathcal{P}^\gamma, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{P}^\alpha} \delta_\beta^* &= 0, & \mathcal{D}_{\mathcal{P}^\alpha} \mathcal{P}^\beta &= t_{\varepsilon\gamma} \frac{\partial t^{\beta\varepsilon}}{\partial \mu_\alpha} \mathcal{P}^\gamma. \end{aligned}$$

Видно, что динамическая ковариантная производная имеет те же свойства; это приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Если ρ является горизонтальным $\mathcal{J}$ -регулярным сечением, то справедливо равенство $\nabla = \mathcal{D}_\rho$.*

Доказательство. Если ρ — горизонтальное $\mathcal{J}$ -регулярное сечение, то $\rho = h\rho$ и $v\rho = 0$, что влечет

$$\mathcal{D}_\rho Y = v[\rho, vY]_{\mathcal{T}E^*} + (\mathbb{F} + \mathcal{J})[\rho, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*}.$$

Но $\nabla Y = h[\rho, hY]_{\mathcal{T}E^*} + v[\rho, vY]_{\mathcal{T}E^*}$; при помощи вычисления в локальных координатах докажем, что

$$h[\rho, hY]_{\mathcal{T}E^*} = (\mathbb{F} + \mathcal{J})[\rho, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*}.$$

Рассмотрим $Y = X^\alpha(q, \mu)Q_\alpha + Y_\beta(q, \mu)\mathcal{P}^\beta$ и, используя (1), получаем

$$\begin{aligned} [\rho, hY]_{\mathcal{T}E^*} &= [\xi^\alpha \delta_\alpha^*, X^\beta \delta_\beta^*]_{\mathcal{T}E^*} = \xi^\alpha X^\beta \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{P}^\gamma + \xi^\alpha X^\beta L_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\gamma^* + \xi^\alpha \delta_\alpha^* (X^\beta) \delta_\beta^* - X^\beta \delta_\beta^* (\xi^\alpha) \delta_\alpha^*, \\ h[\rho, hY]_{\mathcal{T}E^*} &= \left(\xi^\alpha X^\gamma L_{\alpha\gamma}^\beta + \xi^\alpha \delta_\alpha^* (X^\beta) - X^\alpha \delta_\alpha^* (\xi^\beta) \right) \delta_\beta^*. \end{aligned}$$

Вводя выражения канонической линейной связности в случае горизонтального $\mathcal{J}$ -регулярного сечения, заданного формулой

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = -t_{\varepsilon\beta} \sigma_\alpha^i \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial x^i} - \xi^\varepsilon \delta_\varepsilon^* (t_{\alpha\beta}) + \xi^\gamma t_{\alpha\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{N}_{\gamma\beta}}{\partial \mu_\varepsilon} + \xi^\gamma t_{\varepsilon\beta} L_{\gamma\alpha}^\varepsilon,$$

получаем

$$\begin{aligned} h[\rho, hY]_{\mathcal{T}E^*} &= \left(\xi^\alpha X^\gamma L_{\alpha\gamma}^\beta + \xi^\alpha \delta_\alpha^* (X^\beta) \right) \delta_\beta^* - \\ &\quad - X^\alpha \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} + \left(-t_{\gamma\varepsilon} \sigma_\alpha^i \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^i} - \xi^\gamma \delta_\gamma^* (t_{\alpha\varepsilon}) + \xi^\gamma t_{\alpha\vartheta} \frac{\partial \mathcal{N}_{\gamma\varepsilon}}{\partial \mu_\vartheta} + \xi^\gamma t_{\vartheta\varepsilon} L_{\gamma\alpha}^\vartheta \right) t^{\varepsilon\beta} \right) \delta_\beta^* = \\ &= \left(\xi^\alpha X^\gamma L_{\alpha\gamma}^\beta + \xi^\alpha \delta_\alpha^* (X^\beta) \right) \delta_\beta^* - \\ &\quad - X^\alpha \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} - \sigma_\alpha^i \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} - \xi^\gamma t^{\varepsilon\beta} \delta_\gamma^* (t_{\alpha\varepsilon}) + \xi^\gamma t_{\alpha\vartheta} \frac{\partial \mathcal{N}_{\gamma\varepsilon}}{\partial \mu_\vartheta} t^{\varepsilon\beta} + \xi^\gamma L_{\gamma\alpha}^\beta \right) \delta_\beta^* = \\ &= \left(\xi^\alpha \delta_\alpha^* (X^\beta) + X^\alpha \xi^\gamma t^{\varepsilon\beta} \delta_\gamma^* (t_{\alpha\varepsilon}) - X^\alpha \xi^\gamma t_{\alpha\vartheta} \frac{\partial \mathcal{N}_{\gamma\varepsilon}}{\partial \mu_\vartheta} t^{\varepsilon\beta} \right) \delta_\beta^*. \end{aligned}$$

Далее,

$$[\rho, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*} = [\xi^\alpha \delta_\alpha^*, X^\varepsilon t_{\varepsilon\gamma} \mathcal{P}^\gamma]_{\mathcal{T}E^*} = -\xi^\alpha X^\varepsilon t_{\varepsilon\gamma} \frac{\partial \mathcal{N}_{\alpha\beta}}{\partial \mu_\gamma} \mathcal{P}^\beta + \xi^\alpha \delta_\alpha^* (X^\varepsilon t_{\varepsilon\gamma}) \mathcal{P}^\gamma - X^\varepsilon t_{\varepsilon\gamma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \mu_\gamma} \delta_\alpha^*;$$

используя равенства

$$(\mathbb{F} + \mathcal{J})(\delta_\alpha^*) = 0, \quad (\mathbb{F} + \mathcal{J})(\mathcal{P}^\beta) = t^{\beta\varepsilon} \delta_\varepsilon^*,$$

получаем

$$(\mathbb{F} + \mathcal{J})[\rho, \mathcal{J}Y]_{\mathcal{T}E^*} = h[\rho, hY]_{\mathcal{T}E^*},$$

что завершает доказательство. $\square$

Кроме того, $\nabla \rho = \mathcal{D}_\rho \rho = 0$; отсюда следует, что интегральные кривые для ρ являются геодезическими линейной связности Бервальда.

5. Симметрии для гамильтоновых систем на алгеброидах Ли. Рассмотрим дифференцируемый и регулярный гамильтониан $\mathcal{H} : E^* \rightarrow \mathbb{R}$, регулярность означает, что матрица

$$g^{\alpha\beta}(q, \mu) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha \partial \mu_\beta}$$

невыврождена. Любой регулярный гамильтониан $\mathcal{H}$ на E^* индуцирует псевдориманову метрику на $V\mathcal{T}E^*$ (метрический тензор $g^{\alpha\beta}(q, \mu)$); таким образом, он индуцирует единственную симметричную адаптированную касательную структуру

$$\mathcal{J}_\mathcal{H} = g_{\alpha\beta} \mathcal{Q}^\alpha \otimes \mathcal{P}^\beta.$$

$\mathcal{J}$ -Регулярное сечение, индуцируемое регулярным гамильтонианом $\mathcal{H}$, есть

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \mathcal{Q}_\alpha + \rho_\alpha \mathcal{P}^\alpha.$$

Так как ω_E является симплектическим сечением на алгеброиде Ли $(\mathcal{T}E^*, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{T}E^*}, \sigma^1)$ и $d^E \mathcal{H} \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$, то существует единственное гамильтоново сечение $\rho_\mathcal{H} \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$, так что

$$i_{\rho_\mathcal{H}} \omega_E = d^E \mathcal{H}.$$

Относительно локального базиса $\{Q_\alpha, P^\alpha\}$ локальное выражение для $\rho_{\mathcal{H}}$ есть (см. [31])

$$\rho_{\mathcal{H}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} Q_\alpha - \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} + \mu_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right) P^\alpha. \quad (19)$$

Таким образом, векторное поле $\sigma^1(\rho_{\mathcal{H}})$ на E^* задано формулой

$$\sigma^1(\rho_{\mathcal{H}}) = \sigma_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} + \mu_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right) \frac{\partial}{\partial \mu_\alpha},$$

и вследствие этого интегральные кривые для $\rho_{\mathcal{H}}$ (т.е. интегральные кривые векторного поля $\sigma^1(\rho_{\mathcal{H}})$) удовлетворяют гамильтоновым уравнениям (см. [31, 65])

$$\frac{dq^i}{dt} = \sigma_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha}, \quad \frac{d\mu_\alpha}{dt} = -\sigma_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} - \mu_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta}. \quad (20)$$

Симметричная нелинейная связность $\mathcal{N} = -\mathcal{L}_{\rho_{\mathcal{H}}} \mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ имеет коэффициенты, заданные с помощью уравнения (см. [52])

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} & \left(\sigma_\gamma^i \{g_{\alpha\beta}, \mathcal{H}\} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q^i \partial \mu_\varepsilon} (\sigma_\beta^i g_{\alpha\varepsilon} + \sigma_\alpha^i g_{\beta\varepsilon}) + \right. \\ & \left. + \mu_\gamma L_{\varepsilon\kappa}^\gamma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\varepsilon} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mu_\kappa} + \mu_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\delta} (g_{\alpha\varepsilon} L_{\delta\beta}^\varepsilon + g_{\beta\varepsilon} L_{\delta\alpha}^\varepsilon) \right), \end{aligned}$$

где

$$\{g_{\alpha\beta}, \mathcal{H}\} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mu_\gamma} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\gamma}$$

— скобка Пуассона. Указанная связность называется *канонической нелинейной связностью*, индуцированной регулярным гамильтонианом; она является метрической нелинейной связностью, так что выполнено условие $\nabla g = 0$ (см. [52]). В этом случае действие динамической ковариантной производной на базис Бервальда задано формулой

$$\nabla \delta_\beta^* = h[\rho_{\mathcal{H}}, \delta_\beta^*]_{\mathcal{T}E^*} = - \left(\sigma_\beta^i \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha \partial x^i} + \mathcal{N}_{\beta\varepsilon} g^{\varepsilon\alpha} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\varepsilon} L_{\varepsilon\beta}^\alpha \right) \delta_\alpha^*, \quad (21)$$

$$\nabla \mathcal{P}^\beta = v[\rho_{\mathcal{H}}, \mathcal{P}^\beta]_{\mathcal{T}E^*} = \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta \partial x^i} + \mathcal{N}_{\alpha\varepsilon} g^{\varepsilon\beta} \right) P^\alpha. \quad (22)$$

Далее изучим симметрии для гамильтоновых систем на алгеброидах Ли $\mathcal{T}E^*$, используя сечение гамильтониана и адаптированную касательную структуру.

Определение 8. Сечение $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ называется инфинитезимальной симметрией гамильтонова сечения, если

$$[\rho_{\mathcal{H}}, X]_{\mathcal{T}E^*} = 0.$$

Если $X = X^\alpha(q, \mu) Q_\alpha + Y_\alpha(q, \mu) P^\alpha$, то инфинитезимальная симметрия задается с помощью уравнений

$$X \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \right) = \rho_{\mathcal{H}}(X^\alpha) - X^\varepsilon L_{\varepsilon\beta}^\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta}, \quad (23)$$

$$X \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} + \mu_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right) + \rho_{\mathcal{H}}(Y_\alpha) = 0, \quad (24)$$

и первое отношение приводит к

$$Y_\varepsilon = g_{\varepsilon\alpha} \left(\rho_{\mathcal{H}}(X^\alpha) - X^\beta \sigma_\beta^i \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha \partial q^i} - X^\gamma L_{\gamma\beta}^\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right).$$

Определение 9. Сечение $\tilde{Z} \in \Gamma(E)$ называется *естественной инфинитезимальной симметрией*, если ее полный лифт на $\mathcal{T}E^*$ является инфинитезимальной симметрией, т.е. $[\rho_{\mathcal{H}}, \tilde{Z}^{*c}] = 0$.

Известно, что для $\tilde{Z} = \tilde{Z}^\alpha s_\alpha$ полный лифт на $\mathcal{T}E^*$ задан с помощью уравнения (см. [31])

$$\tilde{Z}^{*c} = \tilde{Z}^\alpha \mathcal{Q}_\alpha - \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \tilde{Z}^\varepsilon}{\partial q^i} + L_{\alpha\beta}^\varepsilon \tilde{Z}^\beta \right) \mu_\varepsilon \mathcal{P}^\alpha;$$

следовательно, естественная инфинитезимальная симметрия характеризуется уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^{*c} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \right) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \sigma_\beta^i \frac{\partial \tilde{Z}^\alpha}{\partial q^i}, \\ \tilde{Z}^{*c} \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} + \mu_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right) &= \rho_\mathcal{H} \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \tilde{Z}^\varepsilon}{\partial q^i} \mu_\varepsilon + L_{\alpha\beta}^\varepsilon \tilde{Z}^\beta \mu_\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Далее введем ньютоново сечение на $\mathcal{T}E^*$ (см. [9, 37] для случая касательного расслоения и [55] для алгеброидов Ли $\mathcal{T}E$), которое поможет найти каноническую нелинейную связность, индуцированную регулярным гамильтонианом.

Определение 10. Сечение $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ называется *ньютоновым*, если $\mathcal{J}_\mathcal{H}[\rho_\mathcal{H}, X] = 0$.

В локальных координатах имеем

$$g_{\alpha\beta} \left(X \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \right) - \rho_\mathcal{H}(X^\alpha) + X^\varepsilon L_{\varepsilon\beta}^\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right) \mathcal{P}^\beta = 0.$$

Используя соотношение $\text{rank} \|g^{\alpha\beta}(x, p)\| = m$, получаем уравнение (23), которое приводит к следующему выражению для ньютонова сечения:

$$X = X^\alpha \mathcal{Q}_\alpha + g_{\varepsilon\alpha} \left(\rho_\mathcal{H}(X^\alpha) - X^\beta \sigma_\beta^i \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha \partial q^i} - X^\gamma L_{\gamma\beta}^\alpha \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\beta} \right) \mathcal{P}^\varepsilon.$$

Заметим, что X есть инфинитезимальная симметрия тогда и только тогда, когда оно является ньютоновым сечением и удовлетворяет уравнению (24). Множество ньютоновых сечений задается уравнением

$$\mathfrak{X}_{\rho_\mathcal{H}} = \text{Ker}(\mathcal{J}_\mathcal{H} \circ \mathcal{L}_{\rho_\mathcal{H}}) = \text{Im}(\text{Id} + \mathcal{J}_\mathcal{H} \circ \mathcal{L}_{\rho_\mathcal{H}}).$$

Чтобы найти инвариантные уравнения для ньютоновых сечений и инфинитезимальных симметрий, будем использовать динамическую ковариантную производную и эндоморфизм Якоби. Пусть $\rho_\mathcal{H}$ — сечение гамильтониана, $\mathcal{N}$ — произвольная нелинейная связность с индуцированными проекциями v и h , ∇ — индуцированная динамическая ковариантная производная.

Предложение 8. Сечение $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ является ньютоновым тогда и только тогда, когда

$$v(X) = \mathcal{J}_\mathcal{H}(\nabla X). \quad (25)$$

Доказательство. Согласно (10) имеем

$$\mathcal{J}_\mathcal{H} \circ \nabla = \mathcal{J}_\mathcal{H} \circ \mathcal{L}_{\rho_\mathcal{H}} + v,$$

поэтому

$$\mathcal{J}_\mathcal{H}[\rho_\mathcal{H}, X]_{\mathcal{T}E^*} = 0$$

тогда и только тогда, когда $v(X) = \mathcal{J}_\mathcal{H}(\nabla X)$. $\square$

Предложение 9. Сечение $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ является инфинитезимальной симметрией тогда и только тогда, когда X является ньютоновым сечением и удовлетворяет уравнению

$$\nabla(\mathcal{J}_\mathcal{H} \nabla X) + \Phi(X) = 0. \quad (26)$$

Доказательство. Сечение $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ является инфинитезимальной симметрией тогда и только тогда, когда

$$h[\rho_\mathcal{H}, X]_{\mathcal{T}E^*} = 0, \quad v[\rho_\mathcal{H}, X]_{\mathcal{T}E^*} = 0.$$

Взяв композицию с $\mathcal{J}_\mathcal{H}$, получаем

$$\mathcal{J}_\mathcal{H} h[\rho_\mathcal{H}, X]_{\mathcal{T}E^*} = \mathcal{J}_\mathcal{H}[\rho_\mathcal{H}, X]_{\mathcal{T}E^*} = 0;$$

это означает, что X есть ньютоново сечение. Кроме того,

$$v[\rho_{\mathcal{H}}, X]_{\mathcal{T}E^*} = v[\rho_{\mathcal{H}}, vX]_{\mathcal{T}E^*} + v[\rho_{\mathcal{H}}, hX]_{\mathcal{T}E^*} = \nabla(vX) + \Phi(X) = \nabla(\mathcal{J}_{\mathcal{H}}(\nabla X)) + \Phi(X),$$

что завершает доказательство. $\square$

Для $f \in C^\infty(E)$ и $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ определим произведение

$$f * X = (\text{Id} + \mathcal{J}_{\mathcal{H}} \circ \mathcal{L}_{\rho_{\mathcal{H}}})(fX) = fX + f\mathcal{J}_{\mathcal{H}}[\rho_{\mathcal{H}}, X]_{\mathcal{T}E^*} + \rho_{\mathcal{H}}(f)\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X;$$

следовательно, сечение X является ньютоновым тогда и только тогда, когда

$$X = X^\alpha(q, \mu) * \mathcal{Q}_\alpha.$$

Кроме того, если $X \in \mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}}$, то $f * X = fX + \rho_{\mathcal{H}}(f)\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X$ (см. [9, 62] для случая касательного расслоения и [55] для алгеброидов Ли $\mathcal{T}E$). Следующая теорема утверждает, что каноническую нелинейную связность, индуцированную регулярным гамильтонианом, можно определить с помощью симметрий.

Теорема 3. Рассмотрим сечение гамильтониана $\rho_{\mathcal{H}}$, произвольную нелинейную связность $\mathcal{N}$ и динамическую ковариантную производную ∇ . Следующие условия эквивалентны:

- (i) ограничение $\nabla : \mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}}$ ковариантной производной ∇ удовлетворяет правилу Лейбница относительно произведения $*$;
- (ii) $\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}} = 0$;
- (iii) $\mathcal{L}_{\rho_{\mathcal{H}}} \mathcal{J}_{\mathcal{H}} + \mathcal{N} = 0$;
- (iv) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\sigma_\gamma^i \{g_{\alpha\beta}, \mathcal{H}\} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q^i \partial \mu_\varepsilon} (\sigma_\beta^i g_{\alpha\varepsilon} + \sigma_\alpha^i g_{\beta\varepsilon}) + \right. \\ \left. + \mu_\gamma L_{\varepsilon\kappa}^\gamma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\varepsilon} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \mu_\kappa} + \mu_\gamma L_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\delta} (g_{\alpha\varepsilon} L_{\delta\beta}^\varepsilon + g_{\beta\varepsilon} L_{\delta\alpha}^\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) рассмотрим $X \in \mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}}$ и, используя (25), получаем $vX = \mathcal{J}_{\mathcal{H}}(\nabla X)$. Применяя ∇ к обеим частям, получаем $\nabla(vX) = \nabla(\mathcal{J}_{\mathcal{H}}\nabla X)$, что приводит к

$$(\nabla v)X + v(\nabla X) = (\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}})(\nabla X) + \mathcal{J}_{\mathcal{H}}\nabla(\nabla X).$$

Используя соотношения $\nabla v = 0$ и $\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}} = 0$, находим $v(\nabla X) = \mathcal{J}_{\mathcal{H}}\nabla(\nabla X)$; следовательно, $\nabla X \in \mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}}$. Для $X \in \mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}}$ получаем

$$\begin{aligned} \nabla(f * X) &= \nabla(fX + \rho_{\mathcal{H}}(f)\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X) = \rho_{\mathcal{H}}(f)X + f\nabla X + \rho_{\mathcal{H}}^2(f)\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X + \rho_{\mathcal{H}}(f)\nabla(\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X), \\ \nabla f * X + f * \nabla X &= \rho_{\mathcal{H}}(f)X + f\nabla X + \rho_{\mathcal{H}}^2(f)\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X + \rho_{\mathcal{H}}(f)\mathcal{J}_{\mathcal{H}}(\nabla X). \end{aligned}$$

Но

$$\nabla(\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X) = (\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}})X + \mathcal{J}_{\mathcal{H}}(\nabla X),$$

и из равенства $\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}} = 0$ следует

$$\nabla(\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X) = \mathcal{J}_{\mathcal{H}}(\nabla X),$$

что приводит к соотношению $\nabla(f * X) = \nabla f * X + f * \nabla X$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Докажем, что $\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ обращается в нуль на множестве $\mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}} \cup \Gamma^v(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\})$, являющемся множеством генераторов для $\Gamma(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\})$. Для $X \in \Gamma^v(\mathcal{T}E^* \setminus \{0\})$ имеем $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X = 0$ и $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}(\nabla X) = 0$, что приводит к соотношению

$$\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}}(X) = \nabla(\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X) - \mathcal{J}_{\mathcal{H}}(\nabla X) = 0.$$

Далее, если $X \in \mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}}$, то из равенства $\nabla(f * X) = \nabla f * X + f * \nabla X$ выводим

$$\rho_{\mathcal{H}}(f)\nabla(\mathcal{J}_{\mathcal{H}}X) = \rho_{\mathcal{H}}(f)\mathcal{J}_{\mathcal{H}}(\nabla X),$$

откуда следует $\rho_{\mathcal{H}}(f)(\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}})X = 0$ для произвольной функции $f \in C^\infty(E \setminus \{0\})$ и произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{\rho_{\mathcal{H}}}$. Таким образом, $\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}} = 0$, что завершает доказательство.

Равносильность (ii), (iii), (iv) следует из (16). $\square$

Рассматривая каноническую нелинейную связность $\mathcal{N} = -\mathcal{L}_{\rho_{\mathcal{H}}}\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$, получаем следующие результаты.

Предложение 10. *Сечение $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ является инфинитезимальной симметрией тогда и только тогда, когда X является ньютоновым сечением и удовлетворяет уравнению*

$$\nabla^2 \mathcal{J}_{\mathcal{H}} X + \Phi(X) = 0; \quad (27)$$

в локальном случае

$$\nabla^2 g_{\alpha\beta} X^\alpha + \mathcal{R}_{\alpha\beta} X^\alpha = 0. \quad (28)$$

Доказательство. Если $\mathcal{N}$ — каноническая нелинейная связность, то $\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}} = 0$; используя соотношение

$$\nabla \mathcal{J}_{\mathcal{H}} = \nabla \circ \mathcal{J}_{\mathcal{H}} - \mathcal{J}_{\mathcal{H}} \circ \nabla,$$

из (26) получаем (27). Кроме того, видим, что локальные компоненты вертикальных сечений (27) суть (28). $\square$

Определение 11.

(a) *Инфинитезимальной симметрией Нетер* для гамильтониана $\mathcal{H}$ называется сечение $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$; таким образом,

$$\mathcal{L}_X \omega_E = 0, \quad \mathcal{L}_X \mathcal{H} = 0.$$

(b) Сечение $\tilde{X} \in \Gamma(E)$ называют *инвариантным* для гамильтониана $\mathcal{H}$, если $\tilde{X}^{*c}(\mathcal{H}) = 0$.

(c) Функция $f \in C^\infty(E)$ называется *интегралом движения* (или *законом сохранения*) для гамильтониана $\mathcal{H}$, если $\mathcal{L}_{\rho_{\mathcal{H}}} f = 0$.

Предложение 11. *Каждая инфинитезимальная симметрия Нетер есть инфинитезимальная симметрия.*

Доказательство. Применяя производную Ли к обеим частям симплектического уравнения $i_{\rho_{\mathcal{H}}} \omega_E = d^E \mathcal{H}$, получаем

$$\mathcal{L}_X (i_{\rho_{\mathcal{H}}} \omega) = \mathcal{L}_X d^E \mathcal{H} = d^E \mathcal{L}_X \mathcal{H} = 0.$$

Также из формулы

$$i_{[X, \rho_{\mathcal{H}}]} = \mathcal{L}_X \circ i_{\rho_{\mathcal{H}}} - i_{\rho_{\mathcal{H}}} \circ \mathcal{L}_X$$

имеем

$$\mathcal{L}_X (i_{\rho_{\mathcal{H}}} \omega_E) = i_{[X, \rho_{\mathcal{H}}]} \omega_E + i_{\rho_{\mathcal{H}}} \mathcal{L}_X \omega_E = i_{[X, \rho_{\mathcal{H}}]} \omega_E,$$

что приводит к соотношению $i_{[X, \rho_{\mathcal{H}}]} \omega_E = 0$. Итак, получаем $[X, \rho_{\mathcal{H}}] = 0$. $\square$

Предложение 12. *Если $\tilde{X}$ есть такое сечение E , что $\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} \theta_E$ замкнуто и $d^E(\tilde{X}^{*c} \mathcal{H}) = 0$, то $\tilde{X}$ — естественная инфинитезимальная симметрия.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} i_{[\tilde{X}^{*c}, \rho_{\mathcal{H}}]} \omega_E &= \mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} (i_{\rho_{\mathcal{H}}} \omega_E) - i_{\rho_{\mathcal{H}}} (\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} \omega_E) = \mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} d^E \mathcal{H} + i_{\rho_{\mathcal{H}}} (\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} d^E \theta_E) = \\ &= d^E \mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} \mathcal{H} + i_{\rho_{\mathcal{H}}} d^E (\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} \theta_E) = d^E (\tilde{X}^{*c} \mathcal{H}) = 0, \end{aligned}$$

так как $d^E (\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} \theta_E) = 0$. $\square$

Предложение 13. *Сечение гамильтониана $\rho_{\mathcal{H}}$ является инфинитезимальной симметрией Нетер.*

Доказательство. Используя кососимметричность симплектического 2-сечения ω_E , получаем

$$0 = i_{\rho_{\mathcal{H}}}\omega_E(\rho_{\mathcal{H}}) = d^E\mathcal{H}(\rho_{\mathcal{H}}) = \rho_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}_{\rho_{\mathcal{H}}}\mathcal{H}.$$

Также из $d^E\omega_E = 0$ получаем

$$\mathcal{L}_{\rho_{\mathcal{H}}}\omega_E = d^E i_{\rho_{\mathcal{H}}}\omega_E + i_{\rho_{\mathcal{H}}}d^E\omega_E = d^E(d^E\mathcal{H}) = 0. \quad \square$$

Так как производная Ли и внешняя производная коммутируют, то для инфинитезимальной симметрии Нетер получаем

$$d^E\mathcal{L}_X\theta_E = \mathcal{L}_Xd^E\theta_E = -\mathcal{L}_X\omega_E = 0.$$

Отсюда следует, что 1-сечение $\mathcal{L}_X\theta_E$ является замкнутым 1-сечением и поэтому $\mathcal{L}_{\rho_H}\theta_E$ замкнуто.

Определение 12. Инфинитезимальная симметрия Нетер $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$ называют *точной инфинитезимальной симметрией Нетер*, если 1-сечение $\mathcal{L}_X\theta_E$ является точным.

Следующий результат доказывает, что существует однозначное соответствие между точными инфинитезимальными симметриями Нетер и законами сохранения. Кроме того, если X — точная инфинитезимальная симметрия Нетер, то существует такая функция $f \in C^\infty(E)$, что $\mathcal{L}_X\theta_E = d^Ef$.

Теорема 4. Если X — точная инфинитезимальная симметрия Нетер, то $f - \theta_E(X)$ — закон сохранения для гамильтониана $\mathcal{H}$. Обратно, если $f \in C^\infty(E)$ — закон сохранения для $\mathcal{H}$, то векторное поле $X \in \Gamma(\mathcal{T}E^*)$, являющееся единственным решением уравнения $i_X\omega_E = d^Ef$, есть точная инфинитезимальная симметрия Нетер.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{H}}(f - \theta_E(X)) &= d^E(f - \theta_E(X))(\rho_{\mathcal{H}}) = (\mathcal{L}_X\theta_E - d^E i_X(\theta_E))(\rho_{\mathcal{H}}) = \\ &= i_X d^E\theta_E(\rho_{\mathcal{H}}) = -i_X\omega_E(\rho_{\mathcal{H}}) = i_{\rho_{\mathcal{H}}}\omega_E(X) = d^E\mathcal{H}(X) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $f - \theta_E(X)$ есть закон сохранения для динамики, ассоциированной с регулярным гамильтонианом $\mathcal{H}$. Обратно, если X — решение уравнения $i_X\omega_E = d^Ef$, то

$$\mathcal{L}_X\theta_E = i_X d^E\theta_E + d^E i_X\theta_E = -d^Ef + d^E i_X\theta_E$$

есть точное 1-сечение. Следовательно,

$$0 = d^E\mathcal{L}_X\theta_E = \mathcal{L}_Xd^E\theta_E = -\mathcal{L}_X\omega.$$

Кроме того, f является законом сохранения, откуда получаем

$$0 = \rho_{\mathcal{H}}(f) = d^Ef(\rho_{\mathcal{H}}) = i_X\omega_E(\rho_{\mathcal{H}}) = -i_{\rho_{\mathcal{H}}}\omega_E(X) = -d^E\mathcal{H}(X) = -X(\mathcal{H}).$$

Таким образом, заключаем, что $\mathcal{L}_X\mathcal{H} = 0$ и X — точная инфинитезимальная симметрия Нетер. $\square$

Теорема 5. Если $\tilde{X} \in \Gamma(E)$ — инвариантное сечение для гамильтониана $\mathcal{H}$, то его полный лифт $\tilde{X}^{*c}$ является точной инфинитезимальной симметрией Нетер и поэтому $\tilde{X}$ является естественной инфинитезимальной симметрией. Кроме того, функция $\theta(\tilde{X})$ есть закон сохранения для гамильтониана $\mathcal{H}$.

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}}\mathcal{H} = \tilde{X}^{*c}(\mathcal{H}) = 0.$$

Используя вычисление в локальных координатах, докажем, что $\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}}\theta_E = 0$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}}\theta_E)(\mathcal{Q}_\beta) &= \tilde{X}^{*c}(\theta_E(\mathcal{Q}_\beta)) - \theta_E[\tilde{X}^{*c}, \mathcal{Q}_\beta]_{\mathcal{T}E^*} = \\ &= \tilde{X}^{*c}(\mu_\beta) - \theta_E\left(\tilde{X}^\alpha L_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{Q}_\gamma - \sigma_\beta^i \frac{\tilde{X}^\alpha}{\partial q^i} \mathcal{Q}_\alpha + \mathcal{Q}_\beta \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \tilde{X}^\varepsilon}{\partial q^i} + L_{\alpha\beta}^\varepsilon \tilde{X}^\beta\right) \mu_\varepsilon \mathcal{P}^\alpha\right) = \\ &= -\sigma_\beta^i \frac{\partial \tilde{X}^\varepsilon}{\partial q^i} \mu_\varepsilon - L_{\beta\alpha}^\varepsilon \tilde{X}^\alpha \mu_\varepsilon + \sigma_\beta^i \frac{\tilde{X}^\alpha}{\partial q^i} \mu_\alpha - \tilde{X}^\alpha L_{\alpha\beta}^\gamma \mu_\gamma = 0, \\ (\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}}\theta_E)(\mathcal{P}^\beta) &= \tilde{X}^{*c}(\theta_E(\mathcal{P}^\beta)) - \theta_E[\tilde{X}^{*c}, \mathcal{P}^\beta]_{\mathcal{T}E^*} = -\theta_E\left(\mathcal{P}^\beta \left(\sigma_\alpha^i \frac{\partial \tilde{X}^\varepsilon}{\partial q^i} + L_{\alpha\beta}^\varepsilon \tilde{X}^\beta\right) \mu_\varepsilon \mathcal{P}^\alpha\right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$0 = d^E \mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} \theta_E = \mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} d^E \theta_E = -\mathcal{L}_{\tilde{X}^{*c}} \omega_E$$

и $\tilde{X}^{*c}$ есть точная инфинитезимальная симметрия Нетер. Используя предложение 11, получаем, что $\tilde{X}^{*c}$ — инфинитезимальная симметрия и, следовательно, $\tilde{X}$ — естественная инфинитезимальная симметрия. Кроме того, согласно теореме 4, для $f = 0$ находим, что

$$\theta_E(\tilde{X}^{*c}) = \mu_\alpha \tilde{X}^\alpha,$$

есть закон сохранения для гамильтониана $\mathcal{H}$. □

6. Пример. Далее рассмотрим пример из теории оптимального управления и покажем, что для вычисления некоторых симметрий динамики, индуцированной функцией Гамильтона, концепция алгеброидов Ли более полезна, чем кокасательное расслоение. Рассмотрим следующую линейную по управлению систему в $\mathbb{R}^3$ (аффинная система управления без дрейфа; см. [50]):

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1 + u^2 x^1, \\ \dot{x}^2 = u^2 x^2, \\ \dot{x}^3 = u^2. \end{cases}$$

Пусть x_0 и x_1 — две точки в $\mathbb{R}^3$. Задача оптимального управления состоит из поиска траекторий нашей управляемой системы, которые соединяют x_0 и x_1 , а также минимизируют лагранжиан

$$\min \int_0^T \mathcal{L}(u(t)) dt, \quad \mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}((u^1)^2 + (u^2)^2), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

где $\dot{x}^i = dx^i/dt$, а u^1, u^2 — управляемые переменные. Используя принцип максимума Понтрягина, находим функцию Гамильтона на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{R}^3$ в виде

$$H(x, p, u) = p_i \dot{x}^i - \mathcal{L} = p_1(u^1 + u^2 x^1) + p_2 u^2 x^2 + p_3 u^2 - \frac{1}{2}((u^1)^2 + (u^2)^2),$$

с условием $\partial H / \partial u = 0$, которое приводит к $u^1 = p_1$, $u^2 = p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3$. Получаем

$$H(x, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + (p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3)^2), \tag{29}$$

и выводим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_1} &= p_1 + (p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3) x^1, \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} &= (p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3) x^2, \\ \frac{\partial H}{\partial p_3} &= (p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3). \end{aligned}$$

Матрица Гессе для H относительно переменных p_i имеет вид

$$g^{ij}(x, p) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} = \begin{pmatrix} 1 + (x^1)^2 & x^1 x^2 & x^1 \\ x^1 x^2 & (x^2)^2 & x^2 \\ x^1 & x^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

эта матрица вырождена, $\text{rank}(g^{ij}) = 2$, т.е. гамильтониан на кокасательном расслоении вырожден (сингулярен), и в этом случае невозможно ввести адаптированную касательную структуру. Также лагранжиан на касательном расслоении $T\mathbb{R}^3$ есть лагранжиан с голономными ограничениями (см. [55]). Поэтому будем использовать другой подход, рассматривая концепцию алгеброидов Ли. Систему можно записать в следующем виде:

$$\dot{x} = u^1 X_1 + u^2 X_2, \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее распределение $\Delta = \text{span}\{X_1, X_2\}$ имеет постоянный ранг 2 и является голономным, так как

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_2 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad [X_1, X_2] = X_1.$$

Из теоремы Фробениуса следует, что распределение Δ является интегрируемым, оно определяет слоение на $T\mathbb{R}^3$, и две точки можно соединить оптимальной траекторией тогда и только тогда, когда они расположены на одном и том же листе (см. [50]). Для применения теории алгеброидов Ли рассмотрим алгеброид Ли, являющийся лишь распределением $E = \Delta$, и якорь $\sigma : E \rightarrow T\mathbb{R}^3$, являющийся включением, с компонентами

$$\sigma_\alpha^i = \begin{pmatrix} 1 & x^1 \\ 0 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из соотношения

$$[X_\alpha, X_\beta] = L_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2,$$

получаем ненулевые структурные функции

$$L_{12}^1 = 1, \quad L_{21}^1 = -1.$$

Предложение 14. *Связь между гамильтонианом H на кокасательном расслоении T^*M и гамильтонианом $\mathcal{H}$ на дуальном расслоении E^* задается равенствами*

$$H(x, p) = \mathcal{H}(\sigma^*(p)), \quad \mu = \sigma^*(p), \quad p \in T_x^*M, \quad \mu \in E_x^*.$$

Доказательство. Для лагранжиана L двойственным по Фенхелю—Лежандру является гамильтониан H , заданный с помощью выражения

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \sup_v \{ \langle p, v \rangle - L(v) \} = \sup_v \{ \langle p, v \rangle - \mathcal{L}(u); \sigma(u) = v \} \\ &= \sup_u \{ \langle p, \sigma(u) \rangle - \mathcal{L}(u) \} = \sup_u \{ \langle \sigma^*(p), u \rangle - \mathcal{L}(u) \} = \mathcal{H}(\sigma^*(p)). \end{aligned}$$

Получаем

$$H(x, p) = \mathcal{H}(\mu), \quad \mu = \sigma^*(p), \quad p \in T_x^*M, \quad \mu \in E_x^*,$$

или локально

$$\mu_\alpha = \sigma_\alpha^{*i} p_i, \tag{30}$$

где гамильтониан $H(x, p)$ вырожден на $\text{Ker } \sigma^* \subset T^*M$. $\square$

Следующая диаграмма иллюстрирует результат, приведенный выше:

$$\begin{array}{ccccc}
 T^*M & \xrightarrow{\sigma^*} & E^* & \xleftrightarrow[\text{Лежандра}]{\text{преобразование}} & E & \xrightarrow{\sigma} & TM \\
 & \searrow H & \swarrow \mathcal{H} & & \searrow \mathcal{L} & \swarrow L & \\
 & & \mathbb{R} & & & \mathbb{R} &
 \end{array}$$

$$H = \mathcal{H} \circ \sigma^*$$

$$\mathcal{L} = L \circ \sigma$$

Используя преобразование Лежандра, связанное с регулярным лагранжианом $\mathcal{L} = \frac{1}{2}((u^1)^2 + (u^2)^2)$ на алгеброиде Ли E , получаем невырожденный (регулярный) гамильтониан $\mathcal{H}$ на E^* в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2),$$

и можем найти гамильтониан H на кокасательном расслоении, заданный формулой $H(x, p) = \mathcal{H}(\mu)$, где $\mu_\alpha = \sigma_\alpha^{*i} p_i$, $\alpha = 1, 2$:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^1 & x^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Также на E^* имеем невырожденную матрицу

$$g^{\alpha\beta}(q, \mu) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha \partial \mu_\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая приводит к адаптированной касательной структуре

$$\mathcal{J}_\mathcal{H} = \mathcal{Q}^1 \otimes \mathcal{P}^1 + \mathcal{Q}^2 \otimes \mathcal{P}^2,$$

и из (19) получаем гамильтоново сечение

$$\rho_\mathcal{H} = \mu_1 \mathcal{Q}_1 + \mu_2 \mathcal{Q}_2 - \mu_1 \mu_2 \mathcal{P}^1 + \mu_1^2 \mathcal{P}^2. \quad (31)$$

Таким образом, векторное поле $\sigma^1(\rho_\mathcal{H})$ на E^* задано с помощью уравнения

$$\sigma^1(\rho_\mathcal{H}) = (\mu_1 + x^1 \mu_2) \frac{\partial}{\partial q^1} + x^2 \mu_2 \frac{\partial}{\partial q^2} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial q^3} - \mu_1 \mu_2 \frac{\partial}{\partial \mu_1} + \mu_1^2 \frac{\partial}{\partial \mu_2}.$$

Из предложения 10 следует, что сечение гамильтониана (31) является инфинитезимальной симметрией Нетер для динамики, индуцированной регулярным гамильтонианом $\mathcal{H}$ на алгеброиде Ли. Локальные коэффициенты канонической нелинейной связности имеют вид

$$\mathcal{N}_{11} = -\mu_2, \quad \mathcal{N}_{12} = \mu_1, \quad \mathcal{N}_{21} = 0, \quad \mathcal{N}_{22} = 0.$$

Непосредственным вычислением получаем, что

$$\rho_\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \mathcal{Q}_1 + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \mathcal{N}_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\beta = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \delta_\alpha^*,$$

и заключаем, что сечение гамильтониана является горизонтальным $\mathcal{J}_\mathcal{H}$ -регулярным сечением. В этом случае получаем, что эндоморфизм Якоби (11) задан уравнением

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\varepsilon\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\varepsilon},$$

где $\mathcal{R}_{\varepsilon\alpha\beta}$ — локальные коэффициенты из (5) для кривизны канонической нелинейной связности с ненулевыми компонентами

$$\mathcal{R}_{121} = \mu_2 = -\mathcal{R}_{211}, \quad \mathcal{R}_{122} = -\mu_1 = -\mathcal{R}_{212}.$$

Кроме того, $\nabla \rho_\mathcal{H} = \mathcal{D}_{\rho_\mathcal{H}} \rho_\mathcal{H} = 0$, так что получаем, что интегральные кривые сечения гамильтониана $\rho_\mathcal{H}$ являются геодезическими линейной связности Бервальда. По поводу оптимального решения управляемой системы на основе концепции алгеброидов Ли см. [50].

7. Заключение. Основная цель статьи — изучение инфинитезимальных симметрий и законов сохранения для гамильтоновых систем на алгеброидах Ли. Введены понятия адаптированной касательной структуры $\mathcal{J}$ и регулярного сечения ρ , которые вместе с произвольной нелинейной связностью $\mathcal{N}$ приводит к эндоморфизму Якоби Φ и динамической ковариантной производной ∇ . Эти геометрические структуры позволяют записать инвариантные уравнения для инфинитезимальных симметрий и найти отношения между ними. Условие совместимости ∇ с $\mathcal{J}$ (т.е. $\nabla\mathcal{J} = 0$) фиксирует каноническую нелинейную связность $\mathcal{N} = -\mathcal{L}_\rho\mathcal{J}$. Также в случае горизонтального регулярного сечения доказано, что эндоморфизм Якоби является сверткой с ρ кривизны нелинейной связности, а линейная связность Бервальда совпадает с динамической ковариантной производной. Изучены инфинитезимальные симметрии, естественные инфинитезимальные симметрии, ньютоновы сечения, инфинитезимальные симметрии Нетер и законы сохранения для гамильтоновых систем в общей концепции алгеброидов Ли. Наконец, приведен пример из теории оптимального управления, который доказывает, что для поиска симметрий динамики, индуцированной функцией Гамильтона, концепция алгеброидов Ли более полезна, чем касательное расслоение. Для дальнейшего развития можно изучить симметрии, используя k -симплектический формализм на алгеброидах Ли, приведенный в [32].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *B. И. Арнольд* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
2. *Abraham R., Marsden J.* Foundation of Mechanics. — New York: Benjamin, 1978.
3. *Arcuş C. M.* Mechanical systems in the generalized Lie algebroids framework// Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2014. — 11. — 1450023.
4. *Barbero-Liñán M., Farré Puiggalí M., Martín de Diego D.* Inverse problem for Lagrangian systems on Lie algebroids and applications to reduction by symmetries// Monatsh. Math. — 2016. — 180, № 4. — P. 665–691.
5. *Berwald L.* On system of second order ODE's whose integral curves are topologically equivalent to the system of straight lines// Ann. Math. — 1947. — 48. — P. 93–215.
6. *Bua L., Bucătaru I., Salgado M.* Symmetries, Newtonoid vector fields and conservation laws on the Lagrangian k -symplectic formalism// Rev. Math. Phys. — 2012. — 24. — 1250030.
7. *Bucătaru I.* Linear connection for systems of higher order differential equations// Houston J. Math. — 2005. — 32, № 1. — P. 315–332.
8. *Bucătaru I., Dahl M. F.* Semi-basic 1-form and Helmholtz conditions for the inverse problem of the calculus of variations// J. Geom. Mech. — 2009. — 1, № 2. — P. 159–180.
9. *Bucătaru I., Constantinescu O., Dahl M. F.* A geometric setting for systems of ordinary differential equations// Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2011. — 8, № 6. — 12019.
10. *Cariñena J. F., Martínez E.* Generalized Jacobi equation and inverse problem in classical mechanics// Proc. 18th Int. Colloq. “Group-Theoretical Methods in Physics” (Moscow, 1990). — New York: Nova Science, 1991.
11. *Cariñena J. F., Rodríguez-Olmos M.* Gauge equivalence and conserved quantities for Lagrangian systems on Lie algebroids// J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — 42. — 265209.
12. *Cariñena J. F., Gheorghiu I., Martínez E.* Jacobi fields for second-order differential equations on Lie algebroids// Proc. 10th AIMS Int. Conf. “Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” (Madrid). — AIMS, 2015. — P. 213–222.
13. *Cortes J., Martínez E.* Mechanical control systems on Lie algebroids// IMA J. Math. Control Inform. — 2004. — 21. — P. 457–492.
14. *Castellani L.* Symmetries in constrained Hamiltonian systems// Ann. Phys. — 1982. — 143, № 2. — P. 357–371.
15. *Crampin M.* Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics// J. Phys. A: Math. Gen. — 1983. — 16. — P. 3755–3772.
16. *Crampin M., Martínez E., Sarlet W.* Linear connections for system of second-order ordinary differential equations// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1996. — 65, № 2. — P. 223–249.
17. *Crampin M., Pirani F. A. E.* Applicable Differential Geometry. — Cambridge Univ. Press, 1986.
18. *Crâsmăreanu M., Ida C.* Almost analyticity on almost (para) complex Lie algebroids// Res. Math. — 2015. — 67, № 34. — P. 495–519.

19. *Fernandes R. L.* Lie algebroids, holonomy and characteristic classes// *Adv. Math.* — 2002. — 170. — P. 119–179.
20. *Frölicher A., Nijenhuis A.* Theory of vector-valued differential forms// *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* — 1956. — 59. — P. 338–359.
21. *Gràcia X., Pons J. M.* Symmetries and infinitesimal symmetries of singular differential equations// *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2002. — 35. — P. 5059–5077.
22. *Grabowski J., Urbanski P.* Tangent and cotangent lift and graded Lie algebra associated with Lie algebroids// *Ann. Global Anal. Geom.* — 1997. — 15. — P. 447–486.
23. *Grifone J.* Structure presque tangente et connections, I// *Ann. Inst. Fourier.* — 1972. — 22, № 1. — P. 287–334.
24. *Higgins P. J., Mackenzie K.* Algebraic constructions in the category of Lie algebroids// *J. Algebra.* — 1990. — 129. — P. 194–230.
25. *Hrimiuc D., Popescu L.* Nonlinear connections on dual Lie algebroids// *Balkan J. Geom. Appl.* — 2006. — 11, № 1. — P. 73–80.
26. *Hrimiuc D., Popescu L.* Geodesics of sub-Finslerian geometries// *Proc. Conf. “Differential Geometry and Its Applications” (Prague, 2004).* — Prague, 2005. — P. 59–67.
27. *Jerie M., Prince G.* Jacobi fields and linear connections for arbitrary second-order ODEs// *J. Geom. Phys.* — 2002. — 43. — P. 351–370.
28. *de León M., Rodrigues P. R.* 1989.
29. *de León M., Martín de Diego D.* Symmetries and constants of the motion for singular Lagrangian systems// *Int. J. Theor. Phys.* — 1996. — 35, № 5. — P. 975–1011.
30. *de León M., Martín de Diego D., Santamaria Merino A.* Symmetries in classical field theories// *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* — 2004. — 5. — P. 651–710.
31. *de León M., Marrero J. C., Martínez E.* Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids// *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2005. — 38. — P. 241–308.
32. *de León M., Martín de Diego D., Salgado M., Vilarinho S.* k -Symplectic formalism on Lie algebroids// *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2009. — 42. — 385209.
33. *Libermann P.* Lie algebroids and mechanics// 32 — 1996. — P. 147–162.
34. *Mackenzie K.* Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
35. *Mackenzie K.* General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
36. *Marle C. M.* Symmetries of Hamiltonian systems on symplectic and Poisson manifolds// in: *Similarity and Symmetry Methods (Ganghoffer J. F., Mladenov I., eds.).* — Springer, 2014. — P. 185–269.
37. *Marmo G., Mukunda N.* Symmetries and constant of the motion in the Lagrangian formalism on TQ // *Nuovo Cim. B.* — 1986. — 92. — P. 1–12.
38. *Marsden J. E., Ratiu T.* Introduction to Mechanics and Symmetry. — Springer, 2013.
39. *Martínez E., Cariñena J. F., Sarlet W.* Derivations of differential forms along the tangent bundle projection, II// *Differ. Geom. Appl.* — 1993. — 3, № 1. — P. 1–29.
40. *Martínez E.* Lagrangian mechanics on Lie algebroids// *Acta Appl. Math.* — 2001. — 67. — P. 295–320.
41. *Martínez E., Mestdag T., Sarlet W.* Lie algebroid structures and Lagrangian systems on affine bundles// *J. Geom. Phys.* — 2002. — 44, № 1. — P. 70–95.
42. *Mestdag T., Langerock B.* A Lie algebroid framework for non-holonomic systems// *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2005. — 38, № 5. — P. 1097–1111.
43. *Miron R., Hrimiuc D., Shimada H., Sabău S.* The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces. — Springer, 2001.
44. *Mukhanov V., Wipf A.* On the symmetries of Hamiltonian systems// *Int. J. Mod. Phys. A.* — 1995. — 10, № 4. — P. 579–610.
45. *Oproiu V.* Regular vector fields and connections on cotangent bundles// *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza. Iaşi. Ser. 1. Math.* — 1991. — 37, № 1. — P. 87–104.
46. *Peyghan E.* Berwald-type and Yano-type connections on Lie algebroids// *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* — 2015. — 12, № 10. — 1550125.
47. *Popescu L.* The geometry of Lie algebroids and applications to optimal control// *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza. Iaşi. Ser. 1. Math.* — 2005. — 51. — P. 155–170.

48. *Popescu L.* Geometrical structures on Lie algebroids// Publ. Math. Debrecen. — 2008. — 72, № 1-2. — P. 95–109.
49. *Popescu L.* Hamiltonian formalism on Lie algebroids and its applications// Proc. Conf. “Differential Geometry and Its Applications” (Olomouc, 2007). — Singapore: World Scientific, 2008. — P. 665–673.
50. *Popescu L.* Lie algebroids framework for distributional systems// An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza. Iaşi. Ser. 1. Math. — 2009. — 55, № 2. — P. 373–390.
51. *Popescu L.* Metric nonlinear connections on Lie algebroids// Balkan J. Geom. Appl. — 2011. — 16, № 1. — P. 111–121.
52. *Popescu L.* Metric non-linear connections on the prolongation of a Lie algebroid to its dual bundle// An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza. Iaşi. Ser. 1. Math. — 2011. — 57. — P. 211–220.
53. *Popescu L.* Dual structures on the prolongations of a Lie algebroid// An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza. Iaşi. Ser. 1. Math. — 2013. — 59, № 2. — P. 357–374.
54. *Popescu L.* Geometrical structures on the cotangent bundle// Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2016. — 13, № 5. — 1650071.
55. *Popescu L.* Symmetries of second order differential equations on Lie algebroids// J. Geom. Phys. — 2017. — 117. — P. 84–98.
56. *Popescu L.* Symmetries and conservation laws of Hamiltonian systems// J. Geom. Phys. — 2020. — 151. — 103638.
57. *Popescu L., Criveanu R.* A note on metric nonlinear connections on the cotangent bundle// Carpathian J. Math. — 2011. — 27, № 2. — P. 261–268.
58. *Prince G.* Toward a classification of dynamical symmetries in classical mechanics// Bull. Austr. Math. Soc. — 1983. — 27. — P. 53–71.
59. *Prince G.* A complete classification of dynamical symmetries in classical mechanics// Bull. Austr. Math. Soc. — 1985. — 32. — P. 299–308.
60. *Putra M.* Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization. — Dordrecht: Kluwer, 1993.
61. *Román-Roy N., Salgado M., Vilarinho S.* Symmetries and conservation laws in Günter k -symplectic formalism of field theory// Rev. Math. Phys. — 2007. — 19, № 10. — P. 1117–1147.
62. *Sarlet W.* Adjoint symmetries of second-order differential equations and generalizations// Proc. Conf. “Differential Geometry and Its Applications” (Brno, 1989). — Singapore: World Scientific, 1990. — P. 412–421.
63. *Sarlet W.* Linear connections along the tangent bundle projection// Proc. Conf. “Variations, Geometry and Physics” (Olomouc, 2007). — Nova Science: New York, 2008.
64. *Szilasi J.* A setting for spray and Finsler geometry// in: Handbook of Finsler Geometry. — Kluwer, 2003. — P. 1183–1426.
65. *Weinstein A.* Lagrangian mechanics and groupoids// Fields Inst. Commun. — 1996. — 7. — P. 207–231.

Popescu Liviu

Университет Крайова, Крайова, Румыния

E-mail: liviupopescu@central.ucv.ro; liviunew@yahoo.com