Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. Лейва, Теорема Роте о неподвижной точке и приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с импульсами, задержкой и нелокальными условиями, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 178, 135–149

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-178-135-149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:28:35

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 178 (2020). С. 135–149
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-178-135-149

УДК 517.958

ТЕОРЕМА РОТЕ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ И ПРИБЛИЖЕННАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИМПУЛЬСАМИ, ЗАДЕРЖКОЙ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2020 г. У. ЛЕЙВА

Аннотация. При определенных условиях импульсы, задержки и нелокальные условия незначительны по сравнению с длительностью процесса. С практической точки зрения инженера импульсы, задержки и нелокальные условия являются внутренними явлениями системы, не нарушающими такие ее свойства, как, например, управляемость. Другими словами, как правило, управляемость робастна по отношению к воздействию импульсов, задержек и нелокальных условий. В настоящей работе применяется теорема Роте о неподвижной точке для доказательства внутренней приближенной управляемости полулинейного уравнения теплопроводности с импульсами, задержками и нелокальными условиями. Установлены условия, при которых рассматриваемая система приближенно управляема.

Ключевые слова: внутренняя приближенная управляемость; полулинейное уравнение теплопроводности; импульс; задержка; нелокальное условие.

ROTHER'S FIXED POINT THEOREM AND THE APPROXIMATE CONTROLLABILITY OF SEMILINEAR HEAT EQUATION WITH IMPULSES, DELAYS, AND NONLOCAL CONDITIONS

© 2020 H. LEIVA

ABSTRACT. Under certain conditions, impulses, delays, and nonlocal conditions are known to be negligible in comparison with the duration of the process. From the practical (engineering) point of view, delays and nonlocal conditions are intrinsic phenomena of a system that do not violate certain properties of it, such as the controllability. In other words, as a rule, the controllability is robust under the influence of impulses, delays and nonlocal conditions. In this paper, we apply Rothe's fixed-point theorem to prove the interior approximate controllability of the semilinear heat equation with impulses, delays and nonlocal conditions. Also we obtain conditions under which the system considered is approximately controllable.

Keywords and phrases: interior approximate controllability, semilinear heat equation, impulse, delay, nonlocal condition.

AMS Subject Classification: 93B05, 93C10

1. Введение. Импульсы, задержки и нелокальные условия являются внутренними элементами многих реальных управляемых систем, не влияющими на управляемость. Другими словами, можно предположить, что управляемость робастна относительно воздействия импульсов, задержек и нелокальных условий. Можно выдвинуть гипотезу: при определенных условиях резкие изменения, задержки и нелокальные условия, рассматриваемые как возмущения системы, не меняют некоторые свойства системы, в частности, управляемость. В настоящей работе применяется теорема Роте о неподвижной точке для доказательства внутренней приближенной управляемости следующего полулинейного управления теплопроводности с импульсами, задержками и нелокальными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = \Delta z(t, x) + 1_\omega u(t, x) + \\ \quad + f(t, z, z(t - r_1), \dots, z(t - r_m), u) & \text{в области } \Omega_\tau, \\ z(t, x) = 0 & \text{на границе } \Omega_\partial, t \neq t_k, \\ z(s, x) + h(z(\tau_1 + s, x), \dots, z(\tau_q + s, x)) = \phi(s, x) & \text{в области } \Omega_{-r}, \\ z(t_k^+, x) = z(t_k^-, x) + I_k(t_k, z(t_k, x), u(t_k, x)) & x \in \Omega, k = 1, 2, 3, \dots, p, \end{cases} \quad (1.1)$$

где Δ — оператор Лапласа, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), через $\partial\Omega$ обозначена граница области Ω , $\Omega_\tau = (0, \tau] \times \Omega$, $\Omega_\partial = (0, \tau) \times \partial\Omega$, $\Omega_{-r} = [-r, 0] \times \Omega$, ω — непустое открытое подмножество Ω , а 1_ω — характеристическая функция множества ω . Распределенное управление u лежит в $L_2([0, \tau]; L_2(\Omega; \cdot))$, функция $\phi : [-r, 0] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, стандартное обозначение $z_t(x)$ используется для функции из $[-r, 0]$ в $\mathbb{R}$, а $z_t(x)(s) = z(t + s, x)$, $-r \leq s \leq 0$; здесь $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_m = r$ суть задержки и $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q < \tau$.

Имеется ряд примеров импульсных систем в приложениях к моделям химических реакций, финансовым моделям (с двумерным пространством состояний: объем денежной массы и ставка рефинансирования центрального банка), к моделям роста популяции на основе уравнения реакции-диффузии. В этих примерах легко представить явления, при которых возникают резкие изменения ситуации, например, катастрофы, уборочная кампания, сиюминутный рост спроса. Эти явления моделируются с помощью импульсных дифференциальных уравнений (подробнее см. [22, 38].

Существование решений импульсных уравнений эволюции с задержками и нелокальными условиями изучалось в [2, 3, 21]. Управляемость импульсных уравнений эволюции исследовалась целым рядом авторов, однако большинство из них ограничивалось исследованием точной управляемости, упомянем здесь Д. Н. Чалишаяра [14] (точная управляемость импульсных функционально-дифференциальных уравнений с бесконечной задержкой), Б. Радакришну и К. Балачандру [35] (точная управляемость полулинейных импульсных интегро-дифференциальных эволюционных систем с нелокальными условиями), а также С. Селви и М. Малику Арюнана [36] (точная управляемость импульсных дифференциальных систем с конечной задержкой). Насколько нам известно, имеется несколько работ по приближенной управляемости импульсных полулинейных эволюционных уравнений; например, Личжэнь Чэнь и Ган Ли [15] изучали приближенную управляемость импульсных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями, используя меру некомпактности и теорему Монча о неподвижной точке, в предположении, что нелинейный член $f(t, z)$ не зависит от управления. В [13, 30, 31] исследовалась приближенная управляемость полулинейных эволюционных уравнений с импульсами с помощью теоремы Роте о неподвижной точке. В этом смысле настоящая статья может расцениваться как продолжение исследований, начатых в этих трех работах.

Предположим, что выполнены следующие условия. Нелинейные функции

$$I_k : [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f : [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

достаточно гладкие и удовлетворяют следующим оценкам:

$$|f(t, z, z^1, z_2, \dots, z_m, u)| \leq a_0 |z|^{\alpha_0} + \sum_{l=1}^m a_l |z_l|^{\rho_l} + b_0 |u|^{\beta_0} + c_0, \quad u, z, z_l \in \mathbb{R}; \quad (1.2)$$

$$|I_k(t, z, u)| \leq a_k |z|^{\alpha_k} + b_k |u|^{\beta_k} + c_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p, \quad u, z \in \mathbb{R}; \quad (1.3)$$

$$|h(z^1, z_2, \dots, z_q)| \leq \sum_{i=1}^q e_i |z_i|^{\eta_i} + e_0, \quad (z_1, \dots, z_q) \in \mathbb{R}^q; \quad (1.4)$$

$$|h(z^1, z_2, \dots, z_q) - h(w_1, w_2, \dots, w_q)| \leq K \max_{1 \leq i \leq q} |z_i - w_i|, \quad z_i, w_i \in \mathbb{R}; \quad (1.5)$$

здесь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \alpha_k < 1, \quad \frac{1}{2} \leq \beta_k < 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, p; \\ \frac{1}{2} &\leq \rho_l < 1, \quad l = 1, 2, 3, \dots, m; \quad \frac{1}{2} \leq \eta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, q. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$z(t_k, x) = z(t_k^+, x) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} z(t, x), \quad z(t_k^-, x) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} z(t, x).$$

Естественно считать, что решение эволюционного уравнения с задержками, импульсами и нелокальными условиями лежит в банаховом пространстве

$$PC([-r, \tau]; Z) = \left\{ z : J = [-r, \tau] \rightarrow Z \mid z \in C(J'; Z), \exists z(t_k^+, \cdot), z(t_k^-, \cdot), z(t_k, \cdot) = z(t_k^+, \cdot) \right\},$$

где $Z = L_2(\Omega)$ и $J' = [-r, \tau] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$, снабженном нормой

$$\|z\| = \sup_{t \in [-r, \tau]} \|z(t, \cdot)\|_Z, \quad \|z\|_Z = \sqrt{\int_{\Omega} \|z(x)\|^2 dx} \quad \forall z \in Z = L_2(\Omega).$$

Обозначим через C пространство непрерывных функций

$$C = \left\{ \phi : [-r, 0] \rightarrow L_2(\Omega) = Z \mid \phi \text{ непрерывна} \right\},$$

снабженное нормой

$$\|\phi\| = \sup_{-r \leq s \leq 0} \|\phi(s)\|_Z, \quad \phi(s)(x) = \phi(s, x), x \in \Omega.$$

Определение 1.1 (точная управляемость). Система (1.1) называется *точно управляемой* на отрезке $[0, \tau]$, если для любых $\phi \in C$ и $z_1 \in Z = U = L_2(\Omega)$ существует такое $u \in C(0, \tau; U)$, что мягкое решение $z(t)$ системы (1.1), соответствующее управлению u , удовлетворяет условиям

$$z(0) + (h(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}))(0) = \phi(0), \quad z(\tau) = z_1.$$

Определение 1.2 (приближенная управляемость). Система (1.1) называется *приближенно управляемой* на отрезке $[0, \tau]$, если для любых $\phi \in C$, $z_1 \in Z = U = L_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $u \in C(0, \tau; U)$, что мягкое решение $z(t)$ системы (1.1), соответствующее управлению u , удовлетворяет условиям

$$z(0) + (h(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}))(0) = \phi(0), \quad \|z(\tau) - z_1\|_Z < \varepsilon,$$

где

$$\|z(\tau) - z_1\|_Z = \left(\int_{\Omega} |z(\tau, x) - z_1(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Определение 1.3 (управляемость по траекториям). Система (1.1) называется *управляемой по траекториям* на отрезке $[0, \tau]$, если для любых $\phi, \hat{\phi} \in C$ и $\hat{u} \in C([0, \tau]; U)$ существует такое $u \in C([0, \tau]; U)$, что мягкое решение $z(t)$ системы (1.1), соответствующее управлению u , удовлетворяет условию

$$z(\tau, \phi, u) = z(\tau, \hat{\phi}, \hat{u}).$$

Определение 1.4 (управляемость в нуле). Система (1.1) называется *управляемой в нуле* на отрезке $[0, \tau]$, если для любого $\phi \in C$ существует такое $u \in C([0, \tau]; U)$, что мягкое решение $z(t)$ системы (1.1), соответствующее управлению u , удовлетворяет условиям

$$z(0) + (h(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}))(0) = \phi(0), \quad z(\tau) = 0.$$

Замечание 1.1. Ясно, что из точной управляемости системы (1.1) следуют приближенная управляемость, управляемость в нуле и управляемость по траекториям. Хорошо известно (см. [11]), что в силу эффекта диффузии или компактности полугруппы, порожденной Δ , уравнение теплопроводности не может быть точно управляемым. Заметим также, что в линейном случае управляемость по траекториям эквивалентна управляемости в нуле. Тем не менее, в общем случае приближенная управляемость и управляемость в нуле независимы. Итак, в настоящей работе изучается только приближенная управляемость системы (1.1).

Замечание 1.2. Внутренняя приближенная управляемость означает, что управление действует только на часть области Ω , в противном случае говорят о приближенной управляемости. Конечно, внутренняя управляемость представляет больший интерес для приложений.

Заметим, что для линейного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} z_t(t, x) = \Delta z(t, x) + 1_\omega u(t, x) & \text{в области } (0, \tau] \times \Omega, \\ z = 0 & \text{на границе } (0, \tau) \times \partial\Omega, \\ z(0, x) = z_0(x) & \text{при } x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

внутренняя приближенная управляемость хорошо известна (см., в частности, [30]). Приближенная управляемость системы (1.1) следует из приближенной управляемости системы (1.6), компактности полугруппы, порожденной оператором Лапласа Δ , выполнения условий (1.2)–(1.5) для нелинейных членов f , h , I_k и приведенных ниже результатов.

Предложение 1.1. Пусть метрическое пространство (X, Σ, μ) таково, что $\mu(X) < \infty$, и пусть $1 \leq q < r < \infty$. Тогда $L_r(\mu) \subset L_q(\mu)$ и

$$\|f\|_q \leq \mu(X)^{(r-q)/rq} \|f\|_r, \quad f \in L_r(\mu). \quad (1.7)$$

Доказательство этого предложения следует из [12, теорема I.V.6]. Нужно положить $p = r/q > 1$ и учесть, что

$$\int_X (|f|^q)^p d\mu = \int_X |f|^r d\mu \quad \forall f \in L_r(\mu). \quad \square$$

Теорема 1.1 (теорема Роте о неподвижной точке; [10, 20, 37]). Пусть E — банахово пространство. Рассмотрим выпуклое замкнутое множество $B \subset E$, содержащее нуль во внутренней части. Пусть непрерывное отображение $\Phi : B \rightarrow E$ таково, что $\Phi(B)$ относительно компактно в пространстве E и $\Phi(\partial B) \subset B$. Тогда существует такая точка $x^* \in B$, что $\Phi(x^*) = x^*$.

2. Формальная постановка задачи. В этом разделе вводится гильбертово пространство, в котором система (1.1) записывается с помощью абстрактного дифференциального уравнения. Введем некоторые обозначения.

Рассмотрим гильбертово пространство $Z = L_2(\Omega)$. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ суть собственные значения оператора $-\Delta$, где $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$, кратность каждого собственного значения γ_j конечна и равна размерности соответствующего собственного подпространства. Тогда имеют место следующие хорошо известные свойства (см. [1]):

- (i) существует полная ортонормированная система собственных векторов $\{\phi_{j,k}\}$ оператора $A = -\Delta$;
- (ii) для каждого $z \in D(A)$, имеем

$$Az = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j z, \quad (2.1)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве Z и

$$E_j z = \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}. \quad (2.2)$$

Таким образом, $\{E_j\}$ — полная система ортогональных проекций в пространстве Z и

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} E_j z, \quad z \in Z;$$

(iii) оператор $-A$ порождает такую компактную аналитическую полугруппу $\{T(t)\}$, что

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} E_j z, \quad \|T(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Следовательно, система (1.1) записывается в абстрактной функционально-дифференциальной форме с импульсами, задержками и нелокальными условиями в пространстве Z :

$$\begin{cases} z' = -Az + B_\omega u + f^e(t, z(t), z_t(-r_1), \dots, z_t(-r_m), u), & t \geq 0, \\ z(s) + (g(z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_q}))(s) = \phi(s), & s \in [-r, 0], \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), & k = 1, 2, 3, \dots, p, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $u \in L^2([0, \tau]; U)$, $U = Z$, $B_\omega : U \rightarrow Z$, $B_\omega u = 1_\omega u$ — ограниченный линейный оператор, функция $z_t \in C([-r, 0]; Z)$ определена равенством $z_t(s) = z(t + s)$, $-r \leq s \leq 0$, функции

$$I_k^e : [0, \tau] \times Z \times U \rightarrow Z, \quad f^e : [0, \tau] \times Z \times C^m \times U \rightarrow Z, \quad g : C^q([-r, 0]; Z) \rightarrow C([-r, 0]; Z)$$

определены при $k = 1, 2, \dots, p$ формулами

$$\begin{aligned} I_k^e(t, z, u)(x) &= I_k(t, z(x), u(x)) \quad \forall x \in \Omega, \\ f^e(t, z, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m, u)(x) &= f(t, z(x), \phi_1(-r_1, x), \dots, \phi(-r_m, x), u(x)) \quad \forall x \in \Omega, \\ (g(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q))(s, x) &= h(\phi_1(s, x), \dots, \phi_q(s, x)) \quad \text{в области } \Omega_{-r}. \end{aligned}$$

Следующий результат следует из предложения 1.1 и условий (1.2)–(1.3).

Предложение 2.1. При условиях (1.2)–(1.5) функции f^e , I_k^e и g удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \|f^e(t, z, \phi_1, \dots, \phi_m, u)\|_Z &\leq \tilde{a}_0 \|z\|_Z^{\alpha_0} + \sum_{l=1}^m \tilde{a}_l \|\phi_l(-r_m)\|^{\rho_l} + \tilde{b}_0 \|u\|_Z^{\beta_0} + \tilde{c}_0, \\ \|I_k^e(t, z, u)\|_Z &\leq \tilde{a}_k \|z\|_Z^{\alpha_k} + \tilde{b}_k \|u\|_Z^{\beta_k} + \tilde{c}_k, & k = 1, \dots, p, \\ \|g(\phi_1, \dots, \phi_q)\|_C &\leq \sum_{i=1}^q \tilde{e}_i \|\phi_i\|_C^{\eta_i} + \tilde{e}_0, & \phi_i \in C, \\ |g(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}) - g(w_{\tau_1}, \dots, w_{\tau_q})| &\leq K \|z - w\|_{PC([-r, \tau]; Z)}, & z, w \in PC. \end{aligned} \quad (2.5)$$

3. Управляемость невозмущенного линейного уравнения. В этом разделе приводится условие внутренней приближенной управляемости линейного уравнения теплопроводности без импульсов, задержек и нелокальных условий. Заметим, что в этом случае для любых $z^0 \in Z$ и $u \in L_2(0, \tau; U)$ задача Коши

$$\begin{cases} z' = -Az + B_\omega u(t), & z \in Z, \\ z(0) = z^0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где управление u принадлежит $L_2(0, \tau; U)$, допускает только мягкое решение

$$z(t) = T(t)z^0 + \int_0^t T(t-s)B_\omega u(s)ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (3.2)$$

Определение 3.1. Для системы (3.1) определим отображение управляемости (при $\tau > 0$) $G : L_2(0, \tau; U) \rightarrow Z$ с помощью формулы

$$Gu = \int_0^\tau T(\tau - s)B_\omega u(s)ds. \quad (3.3)$$

Соответствующий сопряженный оператор $G^* : Z \rightarrow L_2(0, \tau; Z)$ определяется формулой

$$(G^*z)(s) = B_\omega^* T^*(\tau - s)z \quad \forall s \in [0, \tau], \quad \forall z \in Z. \quad (3.4)$$

Далее, оператор Грама $W : Z \rightarrow Z$ вводится соотношением

$$Wz = GG^*z = \int_0^\tau T(\tau - s)B_\omega B_\omega^* T^*(\tau - s)ds. \quad (3.5)$$

Следующая лемма справедлива для любого ограниченного линейного оператора $G : W \rightarrow Z$ и гильбертовых пространств W, Z .

Лемма 3.1 (см. [16, 17, 24]). Уравнение (3.1) приближенно управляемо на отрезке $[0, \tau]$ тогда и только тогда, когда верно одно из следующих утверждений:

- (a) $\overline{\text{Rang } G} = Z$;
- (b) $\text{Ker}(G^*) = \{0\}$.
- (c) $\langle GG^*z, z \rangle > 0, z \neq 0$, в пространстве Z ;
- (d) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z = 0$;
- (e) если $B_\omega^* T^*(t)z = 0$ для всех $t \in [0, \tau]$, то $z = 0$;
- (f) для любого $z \in Z$ верно соотношение $Gu_\alpha = z - \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z$, где

$$u_\alpha = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad \alpha \in (0, 1];$$

таким образом, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Gu_\alpha = z$ и ошибка аппроксимации равна

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Замечание 3.1. Из леммы 3.1 следует, что для семейства $\Gamma_\alpha : Z \rightarrow L_2(0, \tau; U)$ линейных операторов, определенных при $0 < \alpha \leq 1$ соотношением

$$\Gamma_\alpha z = B_\omega^* T^*(\cdot)(\alpha I + GG^*)^{-1}z = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad (3.6)$$

выполнено равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G\Gamma_\alpha = I \quad (3.7)$$

в сильной топологии.

Предложение 3.1 (см. [24]). Если $\overline{\text{Rang}(G)} = Z$, то

$$\sup_{\alpha > 0} \|\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}\| \leq 1. \quad (3.8)$$

Замечание 3.2. Доказательство следующей теоремы следует из вышеупомянутого свойства плотности образов линейных операторов и классического факта о единственности продолжения эллиптических функций (см. [34]). Это доказательство аналогично доказательству [23, теорема 4.1].

Теорема 3.1. Система (3.1) приближенно управляема на отрезке $[0, \tau]$. Более того, последовательность управлений, приводящих систему (3.1) из начального состояния z^0 в ϵ -окрестность конечного состояния z_1 за время $\tau > 0$, определяется формулой

$$u_\alpha(t) = B_\omega^* T^*(\tau - t)(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)z^0),$$

причем ошибка такого приближения равна

$$E_\alpha = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)z^0).$$

4. Системы с импульсами, задержками и нелинейными условиями. В этом разделе доказывается основной результат настоящей работы: внутренняя приближенная управляемость n -мерного уравнения теплопроводности с импульсами, задержками и нелокальными условиями (1.1). Для этого достаточно доказать приближенную управляемость системы (2.4). Согласно результатам работ [3, 15, 21], для любых $\phi \in C$ и $u \in C(0, \tau; U)$ задача Коши

$$\begin{cases} z' = -Az + B_\omega u + f^e(t, z(t), z_t(-r_1), z_t(-r_2), \dots, z_t(-r_m), u), & t \in (0, \tau], \\ z(s) + (g(z_{\tau_1}, z_{\tau_2}, \dots, z_{\tau_q}))(s) = \phi(s), & s \in [-r, 0], \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), & k = 1, 2, 3, \dots, p, \end{cases} \quad (4.1)$$

допускает только мягкое решение $z \in PC(-r, \tau; Z)$, определяемое формулой

$$\begin{aligned} z(t) = & T(t)\phi(0) - T(t)[(g(z_{t_1}, \dots, z_{t_q}))(0)] + \int_0^t T(t-s)B_\omega u(s) ds + \\ & + \int_0^t T(t-s)f^e(s, z(s), z_s(-r_1), z_s(-r_2), \dots, z_s(-r_m), u(s)) ds + \\ & + \sum_{0 < t_k < t} T(t-t_k)I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), \quad t \in [0, \tau], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$z(t) + (g(z_{t_1}, \dots, z_{t_q}))(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0].$$

Теперь сформулируем и докажем основной результат статьи о внутренней приближенной управляемости уравнения теплопроводности с импульсами, задержками и нелокальными условиями (1.1). Для этого определим оператор

$$\mathcal{K}^\alpha : PC([-r, \tau]; Z) \times C([0, \tau]; U) \rightarrow PC([-r, \tau]; Z) \times C([0, \tau]; U)$$

с помощью формулы

$$(y, v) = (\mathcal{K}_1^\alpha(z, u), \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)) = \mathcal{K}^\alpha(z, u),$$

где

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(t) = & T(t)\phi(0) - T(t)[(g(z_{t_1}, \dots, z_{t_q}))(0)] + \int_0^t T(t-s)B_\omega(\Gamma_\alpha \mathcal{L}(z, u))(s) ds + \\ & + \int_0^t T(t-s)f^e(s, z(s), z(s-r_1), z(s-r_2), \dots, z(s-r_m), u(s)) ds + \\ & + \sum_{0 < t_k < t} T(t-t_k)I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), \quad t \in [0, \tau], \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$y(t) + (g(z_{t_1}, \dots, z_{t_q}))(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0].$$

Кроме того,

$$v(t) = \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(t) = (\Gamma_\alpha \mathcal{L}(z, u))(t) = B_\omega^* T^*(\tau - t)(\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \mathcal{L}(z, u), \quad t \in [0, \tau], \quad (4.4)$$

где оператор $\mathcal{L} : PC([-r, \tau]; Z) \times C([0, \tau]; U) \rightarrow Z$ задан формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(z, u) = & z^1 - T(\tau)\phi(0) + T(\tau)[(g(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}))(0)] - \\ & - \int_0^\tau T(\tau-s)f^e(s, z(s), z(s-r_1), \dots, z(s-r_m), u(s)) ds - \\ & - \sum_{0 < t_k < \tau} T(\tau-t_k)I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теорема 4.1. При условиях (1.2)–(1.5) нелинейная система (1.1) приближенно управляема на отрезке $[0, \tau]$. Более того, последовательность управлений системы (1.1), переводящая ее из начального состояния ϕ в ϵ -окрестность конечного состояния z^1 за время $\tau > 0$ задается формулой

$$u_\alpha(t) = B_\omega^* T^*(\tau - t)(\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha), \quad t \in [0, \tau],$$

причем ошибка этого приближения равна

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha),$$

где

$$\begin{aligned} z_\alpha(t) = & T(t)\phi(0) - T(t)[(g(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}))(0)] + \int_0^t T(t-s)B_\omega u_\alpha(s) ds + \\ & + \int_0^t T(t-s)f^e(s, z_\alpha(s), z_\alpha(s-r_1), \dots, z_\alpha(s-r_m), u_\alpha(s)) ds + \\ & + \sum_{0 < t_k < t} T(t-t_k)I_k^e(t_k, z_\alpha(t_k), u_\alpha(t_k)), \quad t \in [0, \tau], \\ z_\alpha(t) + (g(z_{t_1}, \dots, z_{t_q}))(t) = & \phi(t), \quad t \in [-r, 0]. \end{aligned}$$

Доказательство. Разобьем доказательство этой теоремы на шаги. Для начала заметим, что

$$\|B_\omega\| = 1, \quad \|T(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0.$$

Шаг 1. Оператор $\mathcal{K}^\alpha$ непрерывен. В самом деле, достаточно доказать, что непрерывны операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^\alpha : PC([-r, \tau]; Z) \times C([0, \tau]; U) & \rightarrow PC([-r, \tau]; Z), \\ \mathcal{K}_2^\alpha : PC([-r, \tau]; Z) \times C([0, \tau]; U) & \rightarrow C([0, \tau]; U). \end{aligned}$$

Непрерывность оператора $\mathcal{K}_1^\alpha$ следует из непрерывности нелинейных функций g , $f^e(t, \phi, u)$, $I_k^e(t, z, u)$ и следующей оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(t) - \mathcal{K}_1^\alpha(w, v)(t)\| \leq & \\ \leq \tilde{K}\|z - w\|_{PC([-r, \tau]; Z)} + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \left\| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \right\| \cdot \|\mathcal{L}(z, u) - \mathcal{L}(w, v)\| ds + & \\ + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \left\| f^e(s, z(s), z(s-r_1), \dots, z(s-r_m), u(s)) - \right. & \\ \left. - f^e(s, w(s), w(s-r_1), \dots, w(s-r_m), v(s)) \right\| ds + & \\ + \sum_{0 < t_k < t} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \left\| I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)) - I_k^e(t_k, w(t_k), v(t_k)) \right\|. & \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(z, u) - \mathcal{L}(w, v)\| \leq & \\ \leq \tilde{K}\|z - w\|_{PC([-r, \tau]; Z)} + \tau \sup_{s \in [0, \tau]} \left\| f^e(s, z(s), \dots, u(s)) - f^e(s, w(s), \dots, v(s)) \right\| + & \\ + \sum_{0 < t_k < \tau} e^{-\lambda_1(t-t_k)} \left\| I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)) - I_k^e(t_k, w(t_k), v(t_k)) \right\|. & \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{K}_2^\alpha(z, u) - \mathcal{K}_2^\alpha(w, v) \right\| &\leq \tilde{K} \|z - w\|_{PC([-r, \tau]; Z)} + \\ &+ L_1 \sup_{s \in [0, \tau]} \left\| f^e(s, z(s), \dots, u(s)) - f^e(s, w(s), \dots, v(s)) \right\| + \\ &+ L_2 \sum_{0 < t_k < \tau} \left\| I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)) - I_k^e(t_k, w(t_k), v(t_k)) \right\|, \end{aligned}$$

где

$$L_1 = \tau \left(\tau \left\| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \right\| + 1 \right), \quad L_2 = \left(1 + \tau \left\| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \right\| \right).$$

Непрерывность оператора $\mathcal{K}_2^\alpha$ следует из непрерывности операторов $\mathcal{L}$ и Γ_α , определенных выше.

Шаг 2. Оператор $\mathcal{K}^\alpha$ компактен. Действительно, пусть D — ограниченное подмножество $PC(J; Z) \times C(J; U)$. Следовательно, для всех $(z, u) \in D$, имеем

$$\begin{aligned} \|f^e(\cdot, z, u)\| &\leq L_3, \quad \left\| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \mathcal{L}(z, u) \right\| \leq L_4, \\ \|\mathcal{L}(z, u)\| &\leq L_5, \quad \|I_k^e(\cdot, z, u)\| \leq l_k, \quad k = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{K}(D)$ равномерно ограничено. Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{K}^\alpha(z, u)(\sigma_2) - \mathcal{K}^\alpha(z, u)(\sigma_1) \right\| &= \\ &= \left\| \mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(\sigma_2) - \mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(\sigma_1) \right\| + \left\| \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(\sigma_2) - \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(\sigma_1) \right\|. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < \sigma_1 < \sigma_2$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(\sigma_2) - \mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(\sigma_1) \right\| &\leq \|T(\sigma_2) - T(\sigma_1)\| \left\{ \|\phi\| + \left\| [(g(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}))(0)] \right\| \right\} + \\ &+ \int_0^{\sigma_1} \|T(\sigma_2 - s) - T(\sigma_1 - s)\| \cdot \|\mathcal{L}(z, u)(s)\| ds + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \|T(\sigma_2 - s)\| \cdot \|\mathcal{L}(z, u)(s)\| ds + \\ &+ \int_0^{\sigma_1} \|T(\sigma_2 - s) - T(\sigma_1 - s)\| \cdot \left\| f^e(s, z(s), z(s - r_1), \dots, z(s - r_m)u(s)) \right\| ds + \\ &+ \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \|T(\sigma_2 - s)\| \cdot \left\| f^e(s, z(s), z(s - r_1), \dots, z(s - r_m)u(s)) \right\| ds + \\ &+ \sum_{0 < t_k < \sigma_1} \|T(\sigma_2 - t_k) - T(\sigma_1 - t_k)\| \cdot \|I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k))\| + \\ &+ \sum_{\sigma_1 < t_k < \sigma_2} \|T(\sigma_2 - t_k)I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k))\|. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\left\| \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(\sigma_1) \right\| \leq \|T^*(\tau - \sigma_2) - T^*(\tau - \sigma_1)\| \cdot \left\| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \mathcal{L}(z, u) \right\|.$$

Так как оператор $T(t)$ компактен при $t > 0$, то из результатов [33] следует, что функция $0 < t \rightarrow T(t)$ равномерно непрерывна. Значит,

$$\lim_{|\sigma_2 - \sigma_1| \rightarrow 0} \|T(\sigma_2) - T(\sigma_1)\| = 0.$$

Следовательно, последовательность $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$ на множестве $\mathcal{K}^\alpha(D)$ равномерна ограничена и равномерно непрерывна на отрезке $[-r, t_1]$. По теореме Арцела найдется подпоследовательность $\{\phi_j^1 : j = 1, 2, \dots\}$ последовательности $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$, равномерно сходящаяся на отрезке $[-r, t_1]$. Рассмотрим последовательность $\{\phi_j^1 : j = 1, 2, \dots\}$ на полуинтервале $(t_1, t_2]$;

она равномерно ограничена и равностепенно непрерывна по тем же причинам. Существует подпоследовательность $\{\phi_j^2\}$, равномерно сходящаяся на отрезке $[-r, t_2]$. Продолжая этот процесс на полуинтервалах $(t_2, t_3]$, $(t_3, t_4]$, $\dots$, $(t_p, \tau]$, получим, что последовательность $\{\phi_j^{p+1} : j = 1, 2, \dots\}$ сходится равномерно на отрезке $[-r, \tau]$. Значит, множество $\overline{\mathcal{K}^\alpha(D)}$ компактно. Следовательно, оператор $\mathcal{K}^\alpha$ компактен.

Шаг 3. Имеем

$$\lim_{\| (z, u) \rightarrow | \rightarrow | \rightarrow \infty} \frac{\| \mathcal{K}^\alpha(z, u) \|}{\| (z, u) \|} = 0,$$

где $\| (z, u) \| = \| z \| + \| u \|$ есть норма в пространстве $PC([-r, \tau]; Z) \times C(0, \tau; Z)$. Рассмотрим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \| \mathcal{L}(z, u) \| \leq M_1 + M_2 \left\{ \bar{a}_0 \| z \|^{\alpha_0} + \sum_{l=1}^m \bar{a}_l |z|^{\rho_l} + \sum_{i=1}^q \bar{e}_i |z|^{\eta_i} + \bar{b}_0 \| u \|^{\beta_0} + \bar{c}_0 \right\} + \\ + M_3 \sum_{0 < t_k < \tau} \left\{ \bar{a}_k \| z \|^{\alpha_k} + \bar{b}_k \| u \|^{\beta_k} + \bar{c}_k \right\}, \end{aligned}$$

где

$$M_1 = \| z_1 \| + e^{-\lambda_1 \tau} \| \phi(0) \|, \quad M_2 = \frac{1}{-\lambda_1} (e^{-\lambda_1 \tau} - 1), \quad M_3 = e^{-\lambda_1 \tau},$$

а также

$$\begin{aligned} \| \mathcal{K}_2^\alpha(z, u) \| \leq M_3 M_1 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| + \\ + M_3 M_2 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| \left\{ \bar{a}_0 \| z \|^{\alpha_0} + \sum_{l=1}^m \bar{a}_l |z|^{\rho_l} + \sum_{i=1}^q \bar{e}_i |z|^{\eta_i} + \bar{b}_0 \| u \|^{\beta_0} + \bar{c}_0 \right\} + \\ + M_3 M_2 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| \sum_{0 < t_k < \tau} \left\{ \bar{a}_k \| z \|^{\alpha_k} + \bar{b}_k \| u \|^{\beta_k} + \bar{c}_k \right\}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \| \mathcal{K}_1^\alpha(z, u) \| \leq M_3 \left\{ \| z^0 \| + M_1 M_2 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| \right\} + \\ + M_2 \left\{ 1 + M_2 M_3 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| \right\} \left\{ \bar{a}_0 \| z \|^{\alpha_0} + \sum_{l=1}^m \bar{a}_l |z|^{\rho_l} + \sum_{i=1}^q \bar{e}_i |z|^{\eta_i} + \bar{b}_0 \| u \|^{\beta_0} + \bar{c}_0 \right\} + \\ + M_3 \left\{ 1 + M_2 M_3 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| \right\} \sum_{0 < t_k < \tau} \left\{ \bar{a}_k \| z \|^{\alpha_k} + \bar{b}_k \| u \|^{\beta_k} + \bar{c}_k \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \| \mathcal{K}^\alpha(z, u) \| = \| \mathcal{K}_1^\alpha(z, u) \| + \| \mathcal{K}_2^\alpha(z, u) \| \leq \\ \leq M_4 + M_3 M_2 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| \left\{ 1 + 2M_2 \right\} \left\{ \bar{a}_0 \| z \|^{\alpha_0} + \sum_{l=1}^m \bar{a}_l |z|^{\rho_l} + \sum_{i=1}^q \bar{e}_i |z|^{\eta_i} + \bar{b}_0 \| u \|^{\beta_0} + \bar{c}_0 \right\} + \\ + \left\{ M_3 M_2 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| \left\{ 1 + M_3 \right\} + M_3 \right\} \sum_{0 < t_k < \tau} \left\{ \bar{a}_k \| z \|^{\alpha_k} + \bar{b}_k \| u \|^{\beta_k} + \bar{c}_k \right\}, \end{aligned}$$

где

$$M_4 = M_3 \left\{ \| z^0 \| + (M_2 + 1) M_1 \| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \| \right\}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{|||\mathcal{K}^\alpha(z, u)|||}{|||(z, u)|||} &\leq \frac{M_4}{|||z||| + |||u|||} + \left\{ M_3 M_2 \left\| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \right\| \{1 + M_2\} \right\} \times \\ &\times \left\{ \bar{a}_0 |||z|||^{\alpha_0-1} + \sum_{l=1}^m \bar{a}_l |z|^{\rho_l-1} + \sum_{i=1}^q \bar{e}_i |z|^{\eta_i-1} + \bar{b}_0 |||u|||^{\beta_0-1} + \frac{\bar{c}_0}{|||z||| + |||u|||} \right\} + \\ &+ \left\{ M_3 M_2 \left\| (\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \right\| \{1 + M_3\} + M_3 \right\} \sum_{0 < t_k < \tau} \left\{ \bar{a}_k |||z|||^{\alpha_k-1} + \bar{b}_k |||u|||^{\beta_k-1} + \frac{\bar{c}_k}{|||z||| + |||u|||} \right\}, \end{aligned}$$

так что получаем

$$\lim_{|||(z, u)||| \rightarrow \infty} \frac{|||\mathcal{K}^\alpha(z, u)|||}{|||(z, u)|||} = 0. \quad (4.6)$$

Шаг 4. Оператор $\mathcal{K}^\alpha$ имеет неподвижную точку. В самом деле, при фиксированном $0 < \rho < 1$ существует достаточно большое $R > 0$, для которого

$$|||\mathcal{K}^\alpha(z, u)||| \leq \rho |||(z, u)|||, \quad |||(z, u)||| = R.$$

Обозначим через $B(0, R)$ шар радиуса $R > 0$ с центром в нуле; тогда $\mathcal{K}^\alpha(\partial B(0, R)) \subset B(0, R)$. Ввиду того, что оператор $\mathcal{K}^\alpha$ компактен и переводит сферу $\partial B(0, R)$ во внутренность шара $B(0, R)$, применима теорема Роте о неподвижной точке 1.1. Значит, существует такая неподвижная точка $(z_\alpha, u_\alpha) \in B(0, R) \subset PC([0, \tau]; Z) \times C([0, \tau]; U)$, что

$$(z_\alpha, u_\alpha) = \mathcal{K}^\alpha(z_\alpha, u_\alpha). \quad (4.7)$$

Шаг 5. Последовательность $\{(z_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in (0, 1]}$ ограничена. Действительно, предположив, что $\{(z_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in (0, 1]}$ неограничена, приходим к выводу о существовании такой подпоследовательности $\{(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})\}_{\alpha_n \in (0, 1]} \subset \{(z_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in (0, 1]}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |||(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})||| = \infty.$$

С другой стороны, из (4.6) следует, что для любого $\alpha \in (0, 1]$ выполнено соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|||\mathcal{K}^\alpha(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||}{|||(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||} = 0.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_1}(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1})|||}{|||(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1})|||} & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_1}(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2})|||}{|||(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2})|||} & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_1}(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3})|||}{|||(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3})|||} & \quad \dots\dots\dots & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_1}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||}{|||(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||} \rightarrow 0, \\ \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_2}(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1})|||}{|||(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1})|||} & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_2}(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2})|||}{|||(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2})|||} & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_2}(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3})|||}{|||(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3})|||} & \quad \dots\dots\dots & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_2}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||}{|||(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||} \rightarrow 0, \\ \dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots \\ \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_k}(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1})|||}{|||(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1})|||} & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_k}(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2})|||}{|||(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2})|||} & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_k}(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3})|||}{|||(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3})|||} & \quad \dots\dots\dots & \quad \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_k}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||}{|||(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Применяя диагональный процесс Кантора, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_n}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||}{|||(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||} = 0.$$

Далее, используя (4.7), находим

$$\frac{|||\mathcal{K}^{\alpha_n}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||}{|||(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})|||} = 1;$$

противоречие. Следовательно, существует такое $\gamma > 0$, что

$$|||(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})||| \leq \gamma, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)$ сходится к $y \in Z$. Таким образом, если

$$u_\alpha = \Gamma_\alpha \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = G^* (\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha),$$

то

$$\begin{aligned} Gu_\alpha &= G\Gamma_\alpha \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = GG^* (\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = \\ &= (\alpha I + GG^* - \alpha I) (\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = \\ &= \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - \alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha). \end{aligned}$$

Значит,

$$Gu_\alpha - \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = -\alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha).$$

Для завершения доказательства теоремы, достаточно показать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} \right\} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = 0.$$

Из леммы 3.1(d) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) \right\} &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} y + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} (\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} (\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y). \end{aligned}$$

Кроме того, из предложения 3.1 получаем

$$\left\| \alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} (\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y) \right\| \leq \left\| \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y \right\|.$$

Так как $\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)$ сходится к y , то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} (\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y) \right\} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\alpha (\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) \right\} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ Gu_\alpha - \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) \right\} = 0.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ T(\tau) \phi(0) + T(\tau) \left[(g(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}))(0) \right] + \int_0^\tau T(\tau - s) B_\omega u_\alpha(s) ds + \right. \\ \left. + \int_0^\tau T(\tau - s) f^e \left(s, z_\alpha(s), z_\alpha(s - r_1), \dots, z_\alpha(s - r_m), u_\alpha(s) \right) ds + \right. \\ \left. + \sum_{0 < t_k < \tau} T(\tau - t_k) I_k^e(z_\alpha(t_k), u_\alpha(t_k)) \right\} = z^1, \end{aligned}$$

и доказательство теоремы завершено. $\square$

В качестве следствия этой теоремы получается следующая характеристика приближенной управляемости.

Теорема 4.2. *Полулинейное уравнение теплопроводности (1.1) с импульсами, задержками и нелокальными условиями приближенно управляемо, если для любого состояния ϕ , конечного состояния z^1 и $\alpha \in (0, 1]$ оператор K^α , определенный формулами (4.3)–(4.5), имеет неподвижную точку, а последовательность $\{\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in (0, 1]}$ сходится, т.е.*

$$(z_\alpha, u_\alpha) = K^\alpha(z_\alpha, u_\alpha), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = y \in Z.$$

5. Заключительные замечания. Заметим, что описанная достаточно простая техника может применяться к управляемым системам в диффузионных процессах с импульсами, задержками и нелокальными условиями, например, к уравнению Бенджамена–Бона–Махони, к строго затухающему волновому уравнению, уравнению светового пучка и др. Более того, можно дать общую формулировку задачи для полулинейных эволюционных уравнений с импульсами, задержками и нелокальными условиями. Действительно, рассмотрим полулинейное эволюционное уравнения в гильбертовом пространстве Z :

$$\begin{cases} z' = -Az + B_\omega u + f^e(t, z(t), z_t(-r_1), \dots, z_t(-r_m), u), & t \geq 0, \\ z(s) + (g(z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_q}))(s) = \phi(s), & s \in [-r, 0], \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), & k = 1, 2, 3, \dots, p, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ — неограниченный линейный оператор в пространстве Z со спектральным разложением

$$Az = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k},$$

где собственные значения $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \dots \lambda_n \rightarrow \infty$ оператора A имеют конечные кратности γ_j , равные размерностям соответствующих собственных подпространств, а $\{\phi_{j,k}\}$ — ортонормированная система собственных функций оператора A . Оператор $-A$ порождает такую строго непрерывную компактную полугруппу $\{T_A(t)\}_{t \geq 0}$, что

$$T_A(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k};$$

$u \in C(0, \tau; U)$ — управление, где $U = Z$; $B : Z \rightarrow Z$ — линейный ограниченный (линейный непрерывный) оператор. Функции

$$I_k^e : [0, \tau] \times Z \times U \rightarrow Z, \quad f^e : [0, \tau] \times Z \times C^m \times U \rightarrow Z, \quad g : C^q([-r, 0]; Z) \rightarrow C([-r, 0]; Z)$$

удовлетворяют неравенствам

$$\|f^e(t, z, \phi_1, \dots, \phi_m, u)\|_Z \leq \tilde{a}_0 \|z\|_Z^{\alpha_0} + \sum_{l=1}^m \tilde{a}_l \|\phi_l(-r_m)\|^{\rho_l} + \tilde{b}_0 \|u\|_Z^{\beta_0} + \tilde{c}_0,$$

$$\|I_k^e(t, z, u)\|_Z \leq \tilde{a}_k \|z\|_Z^{\alpha_k} + \tilde{b}_k \|u\|_Z^{\beta_k} + \tilde{c}_k, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\|g(\phi_1, \dots, \phi_q)\|_C \leq \sum_{i=1}^q \tilde{e}_i \|\phi_i\|_C^{\eta_i} + \tilde{e}_0, \quad \phi_i \in C,$$

$$\left| g(z_{\tau_1}, \dots, z_{\tau_q}) - g(w_{\tau_1}, \dots, w_{\tau_q}) \right| \leq K \|z - w\|_{PC([-r, \tau]; Z)}, \quad z, w \in PC.$$

В этом случае следующая теорема является обобщением теоремы 4.1.

Теорема 5.1. *При выполнении перечисленных выше условий, если векторы $B^* \phi_{j,k}$ линейно независимы в пространстве Z , то система (5.1) приближенно управляема на отрезке $[0, \tau]$.*

Более того, некоторые частные задачи допускают общую формулировку. Рассмотрим следующее полулинейное эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве Z :

$$\begin{cases} z' = -Az + Bu(t) + F(t, z(t-r), u(t)), & z \in Z, \quad t \in (0, \tau], \\ z(s) = \phi(s), & s \in [-r, 0], \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), & k = 1, 2, 3, \dots, p, \end{cases} \quad (5.2)$$

где $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$ — неограниченный линейный оператор в пространстве Z со спектральным разложением

$$Az = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k},$$

где собственные значения $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \dots \lambda_n \rightarrow \infty$ оператора A имеют конечные кратности γ_j , равные размерностям соответствующих собственных подпространств, а $\{\phi_{j,k}\}$ — полная ортонормированная система собственных функций оператора A . Оператор $-A$ порождает такую строго непрерывную компактную полугруппу $\{T_A(t)\}_{t \geq 0}$, что

$$T_A(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle z, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k};$$

$u \in L_2(0, \tau; U)$ — управление, где $U = Z$; $B : Z \rightarrow Z$ — линейный ограниченный (линейный непрерывный) оператор. Функции $I_k^e : [0, \tau] \times Z \times U \rightarrow Z$, $F : [0, \tau] \times C \times U \rightarrow Z$ удовлетворяют неравенствам:

$$\|F(t, \phi, u)\|_Z \leq a_0 \|\phi(-r)\|_Z^{\alpha_0} + \|u\|_U^{\beta_0} + c_0,$$

$$\|I_k^e(t, z, u)\|_Z \leq a_k \|z\|_Z^{\alpha_k} + \|u\|_U^{\beta_k} + c_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p.$$

Обозначим через C пространство непрерывных функций $\phi : [-r, 0] \rightarrow Z$, снабженное нормой $\|\phi\| = \sup_{-r \leq s \leq 0} \|\phi(s)\|_Z$. В этом случае следующая теорема обобщает теорему 4.1.

Теорема 5.2. Если векторы $B^* \phi_{j,k}$ линейно независимы в пространстве Z , то система (5.2) приближенно управляема на отрезке $[0, \tau]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахизер Н. И. Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
2. Abada N., Benchohra M., Hammouche H. Existence results for semilinear differential evolution equations with impulses and delay// Cubo. — 2010). — 12, № 2. — P. 1–17.
3. Akca H., Boucherif A., Covachev V. Impulsive functional-differential equations with nonlocal conditions// Int. J. Math. Math. Sci. — 2002. — 29, № 5. — P. 251–256.
4. Bashirov A. E., Ghahramanlou N. On partial approximate controllability of semilinear systems// Cogent Eng. — 2014. — 1, № 1. — 965947.
5. Bashirov A. E., Ghahramanlou N. On partial S-controllability of semilinear partially observable systems// Int. J. Control. — 2014. — 986763.
6. Bashirov A. E., Jneid M. On partial complete controllability of semilinear systems// Abstr. Appl. Anal. — 2013. — 521052.
7. Bashirov A. E., Mahmudov N., Semi N., Etikan H. On partial controllability concepts// Int. J. Control, — 2007. — 80, № 1. — P. 1–7.
8. Bashirov A. E., Kerimov K. R. On controllability conception for stochastic systems// SIAM J. Control and Optim. — 1997. — 35. — P. 384–398.
9. Bashirov A. E., Mahmudov N. I. On controllability of deterministic and stochastic systems// SIAM J. Control Optim. — 1999. — 37. — P. 1808–1821.
10. Banas J., Goebel K. Measures of Noncompactness in Banach Spaces. — New York: Marcel Dekker, 1980.
11. Barcenas D., Leiva H., Sivoli Z. A broad class of evolution equations are approximately Controllable, but never exactly controllable// IMA J. Math. Control Inform. — 2005. — 22, № 3. — P. 310–320.

12. *Brezis H.* Analisis Funcional. Teoria y Aplicaciones. — Madrid, 1984.
13. *Carrasco A., Leiva H., Sanchez J. L., Tineo A.* Approximate controllability of the semilinear impulsive beam equation with impulses// Trans. IoT Cloud Comput. — 2014. — 2, № 3. — P. 70–88.
14. *Chalishajar D. N.* Controllability of impulsive partial neutral functional differential equation with infinite delay// Int. J. Math. Anal. — 2011. — 5, № 8. — P. 369–380.
15. *Chen Lizhen, Li Gang* Approximate controllability of impulsive differential equations with nonlocal conditions// Int. J. Nonlin. Sci. — 2010. — 10, № 4. — P. 438–446.
16. *Curtain R. F., Pritchard A. J.* Infinite Dimensional Linear Systems. — Berlin: Springer-Verlag, 1978.
17. *Curtain R. F., Zwart H. J.* An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory. — New York: Springer-Verlag, 1995.
18. *Goldstein H. J.* Semigroups of Linear Operators and Applications. — Oxford Univ. Press, 1985.
19. *Hernández E., Pierri M., Goncalves G.* Existence results for an impulsive abstract partial differential equation with state-dependent delay// Int. J. Comput. Math. Appl. — 2006. — 52. — P. 411–420.
20. *Isac G.* On Rothe's fixed point theorem in general topological vector spaces// An. St. Univ. Ovidius Const. — 2004. — 12, № 2. — P. 127–134.
21. *Shikharchand R., Baburao Dhakne M.* On mild solutions of nonlocal semilinear impulsive functional integro-differential equations// Appl. Math. E-Notes. — 2013. — 13. — P. 109–119.
22. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of Impulsive Differential Equations. — Singapore: World Scientific, 1989.
23. *Leiva H., Merentes N., Sanchez J. L.* Approximate controllability of semilinear reaction diffusion equation// Math. Control Rel. Field. — 2012. — 2, № 2.
24. *Leiva H., Merentes N., Sanchez J. L.* A characterization of semilinear dense range operators and applications// Abstr. Appl. Anal. — 2013. — 2013. — 729093.
25. *Leiva H., Merentes N., Sanchez J. L.* Interior controllability of the Benjamin–Bona–Mahony Equation// J. Math. Appl. — 2010. — № 33. — P. 51–59.
26. *Leiva H., Merentes N., Sanchez J. L.* Interior controllability of the semilinear Benjamin–Bona–Mahony equation// J. Math. Appl. — 2012. — № 35. — P. 97–109.
27. *Leiva H., Merentes N., Sanchez J. L.* Approximate controllability of a semilinear heat equation// Int. J. Partial Differ. Equations — 2013. — 2013. — 424309.
28. *Leiva H.* Rothe's fixed point theorem and controllability of semilinear nonautonomous systems// Syst. Control Lett. — 2014. — 67. — P. 14–18.
29. *Leiva H.* Controllability of semilinear impulsive nonautonomous systems// Int. J. Control. — 2014. — 966759.
30. *Leiva H., Merentes N.* Approximate controllability of the impulsive semilinear heat equation// J. Math. Appl. — 2015. — № 38. — P. 85–104.
31. *Leiva H.* Approximate controllability of semilinear impulsive evolution equations// Abstr. Appl. Anal. — 2015. — 2015. — 797439.
32. *Liang Jin, Liu J. H., Xiao Ti-Jun,* Nonlocal impulsive problems for nonlinear differential equations in Banach spaces// Math. Comput. Model. — 2009. — 49. — P. 798–804.
33. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1983.
34. *Protter M. H.* Unique continuation for elliptic equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1960. — 95, № 1. — P. 81–91.
35. *Radhakrishnan B., Blachandran K. J.* Control Theory Appl. — 2012. — 10. — P. 28–34.
36. *Selvi S., Mallika Arjunan M.* Controllability results for impulsive differential systems with finite delay// J. Nonlin. Sci. Appl. — 2012. — 5. — P. 206–219.
37. *Smart J. D. R.* Fixed Point Theorems. — Cambridge Univ. Press, 1974.
38. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive Differential Equations. — Singapore: World Scientific, 1995.

Leiva Hugo

Андский университет, Мерида, Венесуэла;

Университет Ячайтех, Уркуки, Имбабура, Эквадор

E-mail: hleiva@ula.ve; hleiva@yachaytech.edu.ec