Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Киселев, Использование принципа максимума для минимизации суммарных издержек производства, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 178, 150–153

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-178-150-153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:33:02

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 178 (2020). С. 150–153
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-178-150-153

УДК 519.85(045)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНЫХ ИЗДЕРЖЕК ПРОИЗВОДСТВА

© 2020 г. В. В. КИСЕЛЕВ

Аннотация. Не существует общих методов нахождения оптимальных решений задач экономической динамики. Применение вариационных методов возможно для достаточно узкого класса задач. В данной работе рассматривается использование принципа максимума Понтрягина, что значительно расширяет класс решаемых задач и позволяет получать численные решения.

Ключевые слова: вариационное исчисление, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, экономическая динамика.

APPLICATION OF THE MAXIMUM PRINCIPLE TO MINIMIZING TOTAL PRODUCTION COSTS

© 2020 V. V. KISELEV

ABSTRACT. There are no common methods of the search for optimal solutions to problems of economic dynamics. Application of variational methods is possible for a quite narrow class of problems. In this paper, we discuss application of the Pontryagin maximum principle, which significantly expands the class of problems considered and allows one to obtain numerical solutions.

Keywords and phrases: calculus of variation, optimal control, Pontryagin maximum principle, economic dynamics.

AMS Subject Classification: 49K99, 90C99

В экономике поиск оптимального решения часто формулируется как задача рационального ведения хозяйства. В [4] задачи рационального ведения хозяйства делятся на статические и динамические задачи. В статических задачах выбор оптимального варианта осуществляется путем решения задачи математического программирования. Основы решения таких задач были сформулированы в 1933 г. Л. В. Канторовичем (см. [5]). Динамическая задача оптимального планирования была сформулирована в [6], где предложено в качестве критериев оптимальности выбирать прибыль или издержки и для поиска оптимальных решений использовать вариационные методы и методы динамического программирования.

Динамические задачи предполагают поиск оптимального решения на протяжении некоторого промежутка времени. В таких задачах задается множество переменных величин, называемых управлениями или управляющими воздействиями, которые обычно обозначаются $u_i = u_i(t)$, $i = \overline{1, N}$. Обычно управляющие воздействия ограничены: $u \in U \subset \mathbb{R}^N$.

Выбранные управляющие переменные воздействуют на некоторые другие переменные $x_j = x_j(t)$, $i = \overline{1, M}$, которые описывают поведение экономической системы и называются фазовыми координатами. Значения фазовых координат и управляющих воздействий выбираются таким образом, чтобы минимизировать целевой функционал. Функции времени для управляющих переменных и фазовых координат связаны дифференциальными уравнениями. Критерий

оптимальности обычно представлен в виде интеграла. формально динамическую задачу рационального ведения хозяйства можно записать так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), & x &= x(t), & x &\in \mathbb{R}^N, & x^0 &= x(t_0), \\ u &= u(t), & u &\in U \subset \mathbb{R}^M, \\ \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Универсального метода решения таких задач не существует. На практике наиболее применимы три группы методов: методы вариационного исчисления, динамическое программирование и принцип максимума Понтрягина.

Каждый метод имеет свои достоинства и недостатки. Примеры использования этих методов для решения экономических задач представлены в [1–3, 7–9]. В [2, 8] сформулирована задача минимизации суммарных издержек производства. Частное решение этой задачи получено с помощью вариационных методов. Вариационные методы имеют весьма ограниченную область применения, поскольку предъявляют требования гладкости управляющих воздействий; кроме того, получение аналитических решений во многих случаях невозможно.

В данной работе рассматривается более широкий класс задач и предлагается более удобный, для практического применения и хорошо программируемый метод получения численного решения.

Рассмотрим следующую задачу экономической динамики (см. [2, 8]). Предполагается, что известен плановый период T , известна потребность $v = v(t)$ данного продукта в каждый момент планового периода. Требуется определить функцию $x = x(t)$, которая определяет объем производимой продукции в момент времени t .

Если обозначить через $V(t)$ общую потребность в данном продукте до момента времени t , а через $X(t)$ — суммарную продукцию до момента t , то можно записать

$$V(t) = \int_0^t v(t)dt, \quad X(t) = \int_0^t x(t)dt.$$

Пусть $Z(t)$ — размер запаса продукции в момент времени t , соответственно $Z(0)$ — начальный запас; тогда определенные ранее функции связаны соотношением $Z(t) = X(t) - V(t) + Z(0)$. Далее предполагается, что известны удельные издержки хранения c и в каждый момент времени известна функция издержек производства $y(t) = f(x(t))$, которая зависит от объема продукции, выпускаемой в данный момент.

Если нет ограничений на значения функции $x(t)$, то задачу планирования производства можно сформулировать следующим образом. Необходимо определить такую функцию $x(t)$, при которой суммарные издержки производства за весь плановый период T были бы минимальными. Формально это можно записать следующим образом:

$$J = \int_0^T \{ f(x(t)) + c[X(t) - V(t) + Z(0)] \} dt \rightarrow \min.$$

В [8] для решения данной задачи используются вариационные методы. Поскольку $X' = x(t)$, то функционал J зависит от X и X' , т.е.

$$J = \int_0^T F(X, X')dt.$$

Уравнение Эйлера в данном случае выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial X'} = c - \frac{d}{dt} f'(x(t)) = c - f''(x(t))x'(t) = 0. \quad (1)$$

В простейшем случае, когда функция издержек производства является многочленом второй степени $f(x) = a + bx + cx^2$, уравнение Эйлера (1) принимает вид $c - 2\gamma x'(t) = 0$. Отсюда следует, что

$$x(t) = \frac{ct}{2\gamma} + 1. \quad (2)$$

Заметим, что функция издержек производства может быть ограничена и иметь достаточно сложный вид; в этом случае методы вариационного исчисления не приводят к получению аналитического решения. Более общим методом решения задачи экономической динамики является принцип максимума Понтрягина, который, кроме того, позволяет получать численные решения.

Введем следующие обозначения:

$$x_0(t) = \int_0^t F(X, X') dt, \quad x_1 = X, \quad x'_0 = F = f_0, \quad x'_1 = u = f_1;$$

тогда

$$J = \int_0^T F(x_1, u) dt.$$

Теперь можно записать сопряженные уравнения:

$$\varphi_0 = -1, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = -\varphi_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\varphi_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\varphi_0 c = c.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_1 = ct + k. \quad (3)$$

Запишем принцип максимума:

$$\begin{aligned} \max_u(\varphi, f) &= \max_u(\varphi_0 f_0 + \varphi_1 f_1) = \max_u((-1)F + \varphi_1 u) = \\ &= \max_u \left\{ (-1) \left(f(u) + c[x_1 - V + Z(0)] + u(ct + k) \right) \right\} = \\ &= (-1)c[x_1 - V + Z(0)] + \max_u \{ (-1)f(u) + u(ct + k) \}. \end{aligned}$$

Для нахождения оптимального управления достаточно рассмотреть выражение в фигурных скобках. Введем обозначение

$$L(u) = \{ (-1)f(u) + u(ct + k) \}.$$

Если $f(u) = a + bu + du^2$ и нет ограничений на управление, то оптимальное управление можно найти из уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -b - 2du + ct + k = 0.$$

Следовательно,

$$x^* = u^* = \frac{ct}{2d} + \frac{k - b}{2d}.$$

Данное решение совпадает с решением (2) вариационной задачи; здесь

$$l = \frac{k - b}{2d}.$$

Константу l можно искать следующим образом: предполагается, что вначале $x(t) > v(t)$ и на определенном интервале времени $[0, t_1]$ создается определенный запас. Далее, $x(t_1) = v(t_1)$, затем $x(t_1) = v(t_1)$, и на интервале $(t_1, T]$ запас расходуется. Если предположить, что $Z(0) = 0$ и весь запас расходуется к окончанию планового периода T , то $X(t) = V(t)$ или

$$\int_0^T x^* dt = \frac{cT^2}{2d} + \frac{k - b}{2d}T = \int_0^T v dt.$$

Из последнего уравнения получаем значение константы k .

Рассмотрим задачу с ограничениями на управление:

$$\begin{aligned} J(x_1, u) &\rightarrow \max, \\ u &\in [a, b], \quad u(t) \in C^1, \quad f(u) \in C^1, \\ x'_0 &= F, \quad x'_1 = u, \quad x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = A. \end{aligned}$$

Данная задача является задачей со свободным правым концом; условие трансверсальности можно записать в виде $\varphi_0(t) = -1$, $\varphi(t) = 0$. Теперь можно определить константу k в формуле (3): $\varphi_1(t) = cT + k = 0$, $k = -cT$. Далее решается задача

$$L(u^*) = \max_u \left\{ -f(u(t)) + u(ct - cT) \right\}, \quad u \in [a, b].$$

Ниже приведен один из возможных способов решения последней задачи.

Непрерывную задачу заменяем дискретной; для этого отрезки $[a, b]$ и $[0, T]$ разбиваем на N и M равных частей соответственно, и исходя из требований достижения заданной точности вычислений определяем величины Δu и Δt . Пусть $t_i = \Delta t \cdot i$, $i = \overline{0, M}$. В каждый момент времени t_i значения оптимального управления u_i^* вычисляются как решение задачи

$$L(u_i^*) = \max_{u_j} \left\{ -f(u_j) + u_j(ct_i - cT) \right\}. \quad (4)$$

По определению последовательность $\{u_i^*\}$ совпадает с последовательностью $\{x^*(t_i)\}$. При необходимости по формулам численного интегрирования можно получить последовательность $\{X^*(t_i)\}$. В простейшем случае $X^*(t_i)$ вычисляется по формуле

$$X^*(t_i) = \Delta t \sum u_i^*.$$

Теперь нет необходимости решать сложные вариационные задачи. Формула (4) позволяет легко вычислять значения $x(t)$ для широкого класса функций $f(x(t))$ при заданных ограничениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018.
2. Гончаренко В. М., Попов В. Ю. (ред.). Математические методы в экономике и финансах. — М.: КНОРУС, 2016.
3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: АЙРИС-ПРЕСС, 2002.
4. Канторович Л. В. Экономический расчет оптимального использования ресурсов. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.
5. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
6. Канторович Л. В. Оптимальные решения в экономике. — М.: Наука, 1972.
7. Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г. Оптимальное управление в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2008.
8. Ланге О. Оптимальные решения. — М.: Наука, 1967.
9. Таха Х. А. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2005.

Киселев Виктор Вадимович

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: bars46@gmail.com