Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Муньос Васкес, О q -ичных периодических последовательностях, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 34–36

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-34-36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:20:01

О q -ИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

© 2020 г. А. Х. МУНЬОС ВАСКЕС

Аннотация. Рассматривается задача оценки возможного количества периодов и длины периодической части в иррациональном числе в зависимости от его меры иррациональности β . Установлено, что разложение дробной части иррационального числа α не может начинаться с непериодической части длины $(1 - \delta)N$ и оканчиваться периодической частью длины δN , вне зависимости от системы счисления.

Ключевые слова: мера иррациональности, q -ичное разложение.

ON q -ARY PERIODIC SEQUENCES

© 2020 А. Х. MUNOS VASKES

ABSTRACT. We consider the problem of estimating the possible number of periods and the length of the periodic part of an irrational number depending on its measure of irrationality β . We state that the expansion of the fractional part of an irrational number α cannot start from the nonperiodic part of length $(1 - \delta)N$ and end with the periodic part of the length δN , regardless of the numeral system.

Keywords and phrases: measure of irrationality, q -ary decomposition.

AMS Subject Classification: 11J82

Работа продолжает исследования, начатые в [2–8]. Установлена зависимость между порядком β приближения иррационального числа рациональными числами и свойством конечной периодичности отрезков его q -ичных разложений. В [3, 5] рассматривались десятичные разложения. Здесь, имея в виду приложения к q -рядам, мы рассматриваем разложения в q -ичной системе счисления.

Напомним определения. Рассмотрим бесконечную последовательность цифр после запятой в системе счисления по основанию q для числа $\alpha \in \mathbb{I}$:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \quad (1)$$

где все $a_i, 0 \leq a_i < q, i \in \mathbb{N}$ — цифры в этой системе счисления, и ее конечный отрезок

$$a_1, a_2, \dots, a_N. \quad (2)$$

Предположим, что для этого значения N набор цифр (2) содержит начальную непериодическую часть $a_1, \dots, a_l$ и k периодов длины T :

$$a_{l+1}, \dots, a_{l+T}, \dots, a_{l+(k-1)T+1}, \dots, a_{l+kT}, a_{l+mT+i} = a_{l+i}, \quad i = 1, \dots, T; \quad m = 0, \dots, k-1. \quad (3)$$

Таким образом, $N = l + kT$, где T — длина периода, k — количество периодов, l — длина предпериода. Введем обозначение $\delta = kT/N$; тогда $kT = \delta N$, $l = (1 - \delta)N$.

Теорема 1 (ср. [5]). Пусть (1) представляет собой последовательность цифр дробной части в системе счисления по основанию q для иррационального числа α . Пусть существуют такие

$C(\alpha) > 0$, $\beta \geq 2$, что для всех $P, Q \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\left| \alpha - \frac{P}{Q} \right| > \frac{C(\alpha)}{Q^\beta}. \quad (4)$$

Если числа δ и k удовлетворяют неравенству

$$\frac{\beta - 1}{\beta} < \delta \left(\frac{k - 1}{k} \right), \quad (5)$$

а число N — неравенству

$$N > \frac{-\log_q C(\alpha)}{1 - \beta(1 - \delta + \delta/k)}, \quad (6)$$

то дробная часть разложение числа α не может начинаться с непериодической части длины $(1 - \delta)N$ и оканчиваться периодической частью длины δN .

Доказательство. Число $\alpha = 0, a_1 a_2 \dots$ соответствует последовательности (1). Пусть при некоторых N и соответствующих l, k и T набор (2) имеет вид

$$a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, \dots, a_{l+T}, \dots, a_{l+(k-1)T+1}, \dots, a_{l+kT},$$

и выполнены равенства (3). Тогда этот набор можно рассматривать как начальный отрезок рационального числа

$$\frac{P}{Q} = 0, a_1 \dots a_l (a_{l+1} \dots a_{l+T}), \quad \text{НОД } PQ = 1.$$

Существует оценка

$$\frac{1}{q^N} > \left| \alpha - \frac{P}{Q} \right|. \quad (7)$$

Тогда из неравенств (4) и (7) получим двойное неравенство

$$\frac{1}{q^N} > \left| \alpha - \frac{P}{Q} \right| > \frac{C(\alpha)}{Q^\beta}.$$

Представим дробь $0, a_1 \dots a_l (a_{l+1} \dots a_{l+T})$ в виде суммы двух дробей

$$0, a_1 \dots a_l, \quad 0, 0 \dots 0 (a_{l+1} \dots a_{l+T}).$$

У первой дроби знаменатель не больше чем q^{-l} . Вторая дробь имеет вид

$$\frac{a_{l+1} \dots a_{l+T}}{q^{l+T}} (1 + q^{-T} + q^{-2T} + \dots) = \frac{a_{l+1} \dots a_{l+T}}{q^{l+T}} \cdot \frac{q^T}{q^T - 1} = \frac{a_{l+1} \dots a_{l+T}}{q^l} \cdot \frac{1}{(q - 1) \cdot 1 \dots 1}.$$

Оценка знаменателя последней дроби q^{l+T} дает оценку знаменателя для рационального приближения $Q < q^{l+T}$. Поэтому выполняется неравенство

$$\frac{1}{q^N} > \frac{C(\alpha)}{Q^\beta} > \frac{C(\alpha)}{q^{(l+T)\beta}}.$$

Рассмотрим полученное неравенство

$$\frac{1}{q^N} > \frac{C(\alpha)}{q^{(l+T)\beta}}.$$

Так как $T = \delta N/k$, получаем

$$\frac{1}{q^N} > \frac{C(\alpha)}{q^{(1-\delta+\delta/k)\beta N}},$$

или, логарифмируя по основанию q ,

$$-N > \log_q C(\alpha) - \left(1 - \delta + \frac{\delta}{k} \right) \beta N \iff N \left(1 - \beta \left(1 - \delta + \frac{\delta}{k} \right) \right) < -\log_q C(\alpha) \quad (8)$$

Если выполняется условие

$$1 - \beta \left(1 - \delta + \frac{\delta}{k} \right) > 0, \quad (9)$$

то при достаточно большом N неравенство (8) не выполняется. Это означает, что если

$$N > \frac{-\log_q C(\alpha)}{1 - \beta(1 - \delta + \delta/k)}$$

(условие (6)), то в разложении числа α в системе счисления с основанием q не может оказаться, что его отрезок из N начальных цифр состоит из непериодической части длины $l = (1 - \delta)N$ и периодической части $kT = \delta N$ с k периодами.

Преобразуем условие (9):

$$1 - \beta \left(1 - \delta + \frac{\delta}{k} \right) > 0; \quad \frac{1}{\beta} > 1 - \delta + \frac{\delta}{k}; \quad \frac{1}{\beta} - 1 > -\delta + \frac{\delta}{k}; \quad \frac{\beta - 1}{\beta} < \delta \left(\frac{k - 1}{k} \right),$$

т.е. наше условие (5). □

Исследуем неравенство (5).

Следствие 1. Число δ при справедливости утверждения теоремы не может быть меньше или равно $1/2$.

Доказательство. Действительно, так как $(k - 1)/k < 1$, неравенство (5) примет вид $(\beta - 1)/\beta < \delta$, с учетом $\beta \geq 2$ получим $1/2 < \delta \leq 1$. □

Следствие 2. Если мы ограничим сверху число δ числом δ_0 с условием $\delta_0\beta - \beta + 1 > 0$, то утверждение теоремы будет выполняться при

$$k > \frac{\delta_0\beta}{\delta_0\beta - \beta + 1}.$$

Следствие 3. Если мы ограничим сверху число k числом k_0 , то при выполнении условия $\beta < k < k_0$ утверждение теоремы будет выполняться при

$$\delta > \frac{\beta - 1}{\beta} \cdot \frac{k_0}{k_0 - 1}.$$

Приложением этих результатов могут служить q -базисные ряды, представляющие иррациональные числа. Будет получен некоторый выигрыш в количестве необходимых вычислений при получении q -ичных цифр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. — СПб.: Лань, 2008.
2. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Докл. РАН. — 2014. — 459, № 6. — С. 677–679.
3. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышев. сб.. — 17, № 3. — С. 180–185 ур 2016.
4. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — 81, № 2. — С. 215–232.
5. Чирский В. Г. Периодические и непериодические конечные последовательности // Чебышев. сб. — 2017. — 18, № 2. — С. 275–278.
6. Чирский В. Г. Представление натуральных чисел слагаемыми определенного вида // Совр. пробл. мат. — 2017. — № 24. — С. 81–84.
7. Чирский В. Г., Нестеренко А. Ю. Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей // Дискр. мат. — 2015. — 27, № 4. — С. 150–157.
8. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in works of Yu. V. Nesterenko // Russ. J. Math. Phys. — 2017. — 24, № 2. — P. 153–171.

Муньос Васкес Анхель Хорхеевич

Московский педагогический государственный университет

E-mail: m.v.ankhel@yandex.ru