Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Оноприенко, Об одном классе три-тканей Бола, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 37–40

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-37-40>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:26:24

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 179 (2020). С. 37–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-179-37-40

УДК 514.763.7, 512.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТРИ-ТКАНЕЙ БОЛА

© 2020 г. Е. А. ОНОПРИЕНКО

Аннотация. Рассматриваются инфинитезимальные свойства многомерных средних три-тканей Бола с ковариантно постоянным тензором кривизны (ткани B_m^∇); заложены основы классификации таких тканей по рангу тензора кручения. Для три-ткани B_m^∇ ранга ρ методом Картана построен адаптированный репер и найдена соответствующая система структурных (дифференциальных) уравнений. Доказано, что три-ткань B_m^∇ ранга ρ несет нормальную подткань, которая является групповой, причем соответствующая фактор-ткань является регулярной три-тканью. Путем интегрирования структурных уравнений найдены новые семейства примеров многомерных три-тканей специального типа и гладких луп Бола, являющихся обобщением полупрямого произведения двух абелевых групп Ли.

Ключевые слова: многомерная три-ткань, три-ткань Бола, групповая три-ткань, эластичная три-ткань, G -ткань, гладкая лупа Бола.

ON ONE CLASS OF BOL THREE-WEBS

© 2020 Е. А. ONOPRIENKO

ABSTRACT. In this paper, we consider infinitesimal properties of multidimensional mean Bol three-webs with a covariantly constant curvature tensor (webs B_m^∇) and lay the foundations for classifying such webs by the rank of the torsion tensor. For three-webs B_m^∇ of rank ρ , we construct an adapted frame by the Cartan method and find the corresponding system of structural (differential) equations. We prove that a three-web B_m^∇ of rank ρ carries a normal subweb, which is a group web, and the corresponding factor-web is a regular three-web. By integrating the structure equations, we find new families of examples of multidimensional three-webs of a special type and smooth Bol loops, which are a generalization of the semidirect product of two Abelian Lie groups.

Keywords and phrases: multidimensional three-web, Bol three-web, group three-web, elastic three-web, G -web, smooth Bol loop.

AMS Subject Classification: 53A60

В настоящей работе рассматриваются три-ткани Бола с ковариантно постоянным тензором кривизны.

Три-тканью называется совокупность трех попарно трансверсальных гладких слоений коразмерности r на гладком многообразии M размерности $2r$. Локально слоения всегда можно задать уравнениями $x^i = \text{const}$, $y^i = \text{const}$ и $f^i(x^j, y^k) = \text{const}$; здесь и далее $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, r$. Локально три-ткань вполне определяется уравнением $z = f(x, y)$, которое связывает параметры x, y, z слоев первого, второго и третьего слоений, проходящих через одну точку, и называется уравнением три-ткани. В силу трансверсальности слоев уравнение три-ткани разрешимо (локально) относительно переменных x и y , поэтому оно определяет гладкую локальную квазигруппу, которая называется координатной квазигруппой три-ткани W . Следуя В. Бляшке, мы рассматриваем три-ткани с точностью до локальных диффеоморфизмов.

Систематическое изучение многомерных три-тканей начато в работе Черна [2]. Используя подход Картана—Лаптева, М. А. Акивис создал эффективный метод для изучения многомерных

три-тканей. Этим методом получены все существенные результаты по теории многомерных три-тканей (см. [1]).

Средние ткани Бола (ткани B_m) занимают особое место в теории тканей. Их алгебраический аналог — многомерные гладкие лупы Бола — следующие после аналитических луп Муфанг по близости своих свойств к группам Ли. Три-ткани B_m обладают следующими свойствами:

1. они обладают замкнутой G -структурой класса 3 — ковариантные производные тензора кривизны являются комитантами тензоров кручения и кривизны;
2. на третьем слоении этих тканей естественным образом возникает структура симметрического пространства. Эта симметрия обладает специальными свойствами, которые изучались многими авторами.

Три-ткани B_m были введены Г. Болом (см. [3]). Их алгебраические свойства исследовались В. Д. Белоусовым и другими авторами. Четырехмерные ткани Бола полностью описал А. Д. Иванов. Ткани B_m произвольной размерности исследовала В. И. Федорова, которая, в частности, заложила основы классификации шестимерных тканей B_m . Специальный класс тканей Бола — эластичные ткани, или ткани E — исследовались А. М. Шелеховым, Г. Баландиной, К. Р. Джукашевым. Три-ткани B_m с тензором кривизны минимального ранга рассматривались М. И. Антиповой. Гладкие лупы Бола исследовались Л. В. Сабининым и П. О. Михеевым.

Доказаны следующие утверждения.

1. Пусть кобазис дифференциальных форм ω_1^i и ω_2^i ($i, j, k, \dots = 1, \dots, r$) на многообразии M выбран так, что формы ω_1^i , ω_2^i и $\omega_1^i + \omega_2^i$ аннулируются соответственно на первом, втором и третьем слоениях ткани B_m^∇ . Тогда эти формы удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\omega_1^i &= \omega_1^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k, & d\omega_2^i &= \omega_2^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b_{jk}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l, & \nabla a_{jk}^i &= -b_{[jk]l}^i (\omega_1^l - \omega_2^l), & \nabla b_{jkl}^i &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

замкнутой относительно операции внешнего дифференцирования в силу соотношений

$$\begin{aligned} b_{[jk]l}^i &= 2a_{[jk}^m a_{|m|l]}^i, & b_{j(kl)}^i &= 0, & b_{jkp}^i a_{lm}^p &= 0, \\ a_{jk}^p b_{p\ell m}^i &= a_{pk}^i b_{j\ell m}^p + a_{jp}^i b_{k\ell m}^p, & b_{jkp}^i b_{lmq}^p &= 0, & b_{prs}^i b_{jkl}^p &= b_{pkl}^i b_{jrs}^p. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь a_{jk}^i — тензор кручения, b_{jkl}^i — тензор кривизны.

2. Не существует негрупповых четырехмерных тканей B_m^∇ .
3. Класс негрупповых шестимерных тканей B_m^∇ содержит только две три-ткани — это известные эластичные ткани E_1 и E_2 .

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, определяемая тензором кручения. Назовем рангом тензора кручения размерность производной алгебры $\mathcal{A}'$. Верно следующее утверждение:

4. Ткани B_m^∇ с тензором кручения ранга 0, r или $r - 1$ являются групповыми тканями.

Анализ системы (1)–(2) приводит к следующей теореме.

5. Класс тканей B_m^∇ с тензором кручения ранга 1 совпадает с классом эластичных тканей E_1^r .

Уравнения ткани E_1^r в локальных координатах имеют вид

$$z^1 = x^1 + e^{2a_{\hat{k}} x^{\hat{k}}} (y^1 + \lambda_{\hat{j}\hat{k}} x^{\hat{j}} y^{\hat{k}}), \quad z^{\hat{i}} = x^{\hat{i}} + y^{\hat{i}},$$

где $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = 2, \dots, r$, $a_{\hat{k}}$ и $\lambda_{\hat{j}\hat{k}}$ — постоянные, причем $\lambda_{\hat{j}\hat{k}} = -\lambda_{\hat{k}\hat{j}}$.

6. Для ткани B_m^∇ ранга ρ существует адаптированный репер, в котором структурные уравнения этой ткани имеют вид

$$\begin{aligned}
 d\omega_1^a &= \omega_1^b \wedge \omega_b^a + \omega_1^v \wedge \omega_v^a + a_{jk}^a \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \\
 d\omega_2^a &= \omega_2^b \wedge \omega_b^a + \omega_2^v \wedge \omega_v^a - a_{jk}^a \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \\
 d\omega_1^u &= 0, \\
 d\omega_2^u &= 0, \\
 d\omega_b^a &= \omega_b^c \wedge \omega_c^a + 2(a_{wz}^c a_{cb}^a + a_{zb}^c a_{cw}^a + a_{bw}^c a_{cz}^a) \omega_1^w \wedge \omega_2^z, \\
 d\omega_u^a &= \omega_u^c \wedge \omega_c^a + b_{uwz}^a \omega_1^w \wedge \omega_2^z,
 \end{aligned} \tag{3}$$

причем ненулевые компоненты тензоров кручения и кривизны связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
 a_{de}^b a_{bc}^a + a_{ec}^b a_{bd}^a + a_{cd}^b a_{be}^a &= 0, \quad a_{du}^b a_{bc}^a + a_{uc}^b a_{bd}^a + a_{cd}^b a_{bu}^a = 0; \\
 a_{bu}^f (a_{fd}^a a_{vc}^b + a_{cf}^a a_{vd}^b - a_{cd}^b a_{fv}^a) + a_{bv}^f (a_{fd}^a a_{cu}^b + a_{cf}^a a_{du}^b - a_{cd}^b a_{fu}^a) &= 0; \\
 (a_{uv}^d a_{db}^a + a_{vb}^d a_{du}^a + a_{bu}^d a_{dv}^a) (a_{wz}^e a_{ec}^b + a_{zc}^e a_{ew}^b + a_{cw}^e a_{ez}^b) &= \\
 = (a_{wz}^d a_{db}^a + a_{zb}^d a_{dw}^a + a_{bw}^d a_{dz}^a) (a_{uv}^e a_{ec}^b + a_{vc}^e a_{eu}^b + a_{cu}^e a_{ev}^b); \\
 b_{buu}^a &= 2(a_{uv}^c a_{cb}^a + a_{vb}^c a_{cu}^a + a_{bu}^c a_{cv}^a); \\
 b_{uvw}^a + b_{vuw}^a + b_{wuv}^a &= 2(a_{uv}^b a_{bw}^a + a_{vw}^b a_{bu}^a + a_{wu}^b a_{bv}^a); \\
 a_{cb}^a b_{wuv}^a &= 2a_{cw}^b \left(a_{uv}^f a_{fb}^a + a_{vb}^f a_{fu}^a + a_{bu}^f a_{fv}^a \right) - 2a_{bw}^b \left(a_{uv}^f a_{fc}^a + a_{vc}^f a_{fu}^a + a_{cu}^f a_{fv}^a \right); \\
 a_{bz}^a b_{wuv}^a + a_{wb}^a b_{zuv}^a &= 2a_{wz}^b (a_{uv}^c a_{cb}^a + a_{vb}^c a_{cu}^a + a_{bu}^c a_{cv}^a); \\
 b_{qwz}^b (a_{vb}^c a_{cu}^a + a_{bu}^c a_{cv}^a) - b_{quv}^b (a_{zb}^c a_{cw}^a + a_{bw}^c a_{cz}^a) &= \\
 = 2a_{wz}^c \left[a_{cq}^b \left(a_{uv}^f a_{fb}^a + a_{vb}^f a_{fu}^a + a_{bu}^f a_{fv}^a \right) - a_{bq}^b \left(a_{uv}^f a_{fc}^a + a_{vc}^f a_{fu}^a + a_{cu}^f a_{fv}^a \right) \right] - \\
 - 2a_{uv}^c \left[a_{cq}^b \left(a_{wz}^f a_{fb}^a + a_{zb}^f a_{fw}^a + a_{bw}^f a_{fz}^a \right) - a_{bq}^b \left(a_{wz}^f a_{fc}^a + a_{zc}^f a_{fw}^a + a_{cw}^f a_{fz}^a \right) \right]
 \end{aligned}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
 \nabla a_{bc}^a &= da_{bc}^a + a_{bc}^d \omega_d^a - a_{dc}^a \omega_b^d - a_{bd}^a \omega_c^d = 0; \\
 \nabla a_{bu}^a &= da_{bu}^a + a_{bu}^d \omega_d^a - a_{du}^a \omega_b^d - a_{bd}^a \omega_u^d = -(a_{uv}^c a_{cb}^a + a_{vb}^c a_{cu}^a + a_{bu}^c a_{cv}^a) \left(\omega_1^v - \omega_2^v \right); \\
 \nabla a_{uv}^a &= da_{uv}^a + a_{uv}^d \omega_d^a - a_{dv}^a \omega_u^d - a_{ud}^a \omega_v^d = -b_{[uv]w}^a \left(\omega_1^w - \omega_2^w \right); \\
 \nabla a_{uv}^a &= da_{uv}^a + a_{uv}^d \omega_d^a - a_{dv}^a \omega_u^d - a_{ud}^a \omega_v^d = \left(\frac{1}{2} b_{wuv}^a - (a_{uv}^b a_{bw}^a + a_{vw}^b a_{bu}^a + a_{wu}^b a_{bv}^a) \right) \left(\omega_1^w - \omega_2^w \right); \\
 \nabla b_{cuv}^a &= db_{cuv}^a + b_{cuv}^b \omega_b^a - b_{buu}^a \omega_c^b = 0; \\
 \nabla b_{wuv}^a &= db_{wuv}^a + b_{wuv}^b \omega_b^a - b_{buu}^a \omega_w^b = 0.
 \end{aligned}$$

Эта система замкнута относительно внешнего дифференцирования.

7. В построенном адаптированном репере тензор кручения ткани B_m^∇ удовлетворяет, помимо обобщенного тождества Якоби, еще некоторым соотношениям третьей и четвертой степени.
8. Три-ткань B_m^∇ ранга ρ допускает нормальную подткань $\widetilde{W}$, которая является групповой, причем соответствующая фактор-ткань $W_1 = W/\widetilde{W}$ является регулярной.

В настоящей работе исследуются ткани CB_m^∇ , для которых $a_{bc}^a = 0$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

9. Операторы $A_u = (a_{bu}^a)$ порождают линейную алгебру Ли $[\bar{A}]$. Эта алгебра является нильпотентной высоты 2.

Полностью описаны ткани, у которых алгебра $[\bar{\mathcal{A}}]$ является тривиальной, то есть все операторы A_u попарно коммутируют. Эти ткани обозначаем $CB_m^\nabla(1)$ — общий случай, и $CB_m^\nabla(0)$ — все операторы A_u имеют простую структуру.

10. Для тканей $CB_m^\nabla(0)$ существует семейство адаптированных реперов, в которых все операторы A_u становятся скалярными. Три-ткань $CB_m^\nabla(0)$ обладает замкнутой G_W -структурой класса 2 и является G -тканью, то есть допускает транзитивную группу автоморфизмов. При некотором выборе параметров слоений уравнения три-ткани $CB_m^\nabla(0)$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} Z^a &= X^a + e^{2a_{au}^a X^u} \left(Y^a - \frac{1}{4} \lambda_{vz}^a (X^v Y^z - X^z Y^v) \right), \\ Z^u &= X^u + Y^u. \end{aligned}$$

Найдена система структурных уравнений тканей $CB_m^\nabla(1)$ и проинтегрирована.

11. В некоторых локальных координатах уравнения ткани $CB_m^\nabla(1)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} Z^a &= X^a + e_b^a(X) \left(Y^b - \frac{1}{2} d_{uv}^b (X^u Y^v - X^v Y^u) - \Lambda_{(uv)v}^b X^u X^w Y^v \right) + \\ &\quad + \frac{2}{3} S_c^a(X) a_{b(t}^c \Lambda_{uv)v}^b X^t X^u X^w Y^v, \\ Z^u &= X^u + Y^u. \end{aligned}$$

Этот класс тканей зависит от параметров a_{bu}^a — компонент тензора кручения, входящих в функции $e_b^a(X)$ и $S_c^a(X)$, постоянных d_{uv}^b и Λ_{uvw}^b . Функции $S_c^a(X)$ находятся из дифференциальных уравнений

$$S'(x)C(x) + 3S(x) = 3 \exp(2C(x)),$$

где штрих обозначает формальную производную по C , $C(x) = (a_{bu}^a x^u)$, и удовлетворяют уравнению

$$S(x)C^3(x) = \frac{3}{2} \exp(2C(x)) \left(C(x) - \frac{1}{2}E \right)^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akivis M. A., Shelekhov A. M.* Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1992.
2. *Chern S. S.* Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r -dimensionalen Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}_{2r}$ // Abh. Math. Sem. — 1936. — 11, № 1–2. — P. 333–358.
3. *Bol G.* Gewebe und Gruppen // Math. Ann. — 1937. — 114. — P. 414–431.

Оноприенко Екатерина Андреевна
Бауманская инженерная школа № 1580, Москва
E-mail: katrinonoprienko@mail.ru