Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Рылов, Геометрия расслоенных графиков отображений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 50–59

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-50-59>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:11:01

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 179 (2020). С. 50–59
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-179-50-59

УДК 514.757

ГЕОМЕТРИЯ РАССЛОЕННЫХ ГРАФИКОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2020 г. А. А. РЫЛОВ

Аннотация. В работе исследуется дифференциально-геометрический аспект отображения гладких многообразий постоянного ранга с применением понятия графика как гладкого подмногообразия в пространстве прямого произведения исходных многообразий. Случай не максимального ранга предопределяет расслоенный характер графика. Внесение римановой структуры на многообразиях обогащает геометрию графика, которая теперь существенно зависит от индуцированного поля метрического тензора: характеризуются относительно аффинные, проективные и g -омбилические отображения. Заключительная часть работы посвящена отображениям евклидовых пространств описанных ранее типов в терминах конструктивного графика В. Т. Базылева.

Ключевые слова: отображение многообразий постоянного ранга, график отображения, расслоенное подмногообразие, структура почти произведения, относительно аффинное отображение, g -омбилическое отображение.

GEOMETRY OF FIBERED GRAPHS OF MAPPINGS

© 2020 А. А. RYLOV

ABSTRACT. In this paper, we examine the differential-geometric aspect of constant-rank mappings of smooth manifolds based on the concept of a graph as a smooth submanifold in the space of the direct product of the original manifolds. The nonmaximality of the rank provides the fibered nature of the graph. A Riemannian structure on manifolds enriches the geometry of the graph, which now essentially depends on the induced field of the metric tensor; we characterize relatively affine, projective, and g -umbilical mappings. The final part of the paper is devoted to mappings of Euclidean spaces of the types described earlier in terms of V. T. Bazylev's constructive graph.

Keywords and phrases: constant-rank mapping of manifolds, graph of a mapping, fibered submanifold, almost product structure, relatively affine mapping, g -umbilical mapping.

AMS Subject Classification: 53A07, 53A55, 53B20

1. Введение. Геометрия отображений многообразий, снабженных различными структурами, продолжает оставаться стабильно развивающейся отраслью геометрической науки. Уже давно классикой стали монографии Н. С. Синюкова по геодезическим отображениям (см. [21]), Г. Тота по гармоническим отображениям (см. [42]). Подводя итоги многолетних исследований, коллектив исследователей, работающих в области теории отображений многообразий, снабженных дифференциально-геометрическими структурами, в 2015 г. издал книгу энциклопедического характера «Дифференциальная геометрия специальных отображений» (см. [27]) с обширной (около 1000 источников) библиографией. В настоящий момент готовится расширенное переиздание этого труда под редакцией проф. Й. Микеша. Ранее вышло несколько монографий по римановым и полуримановым субмерсиям [30, 31], отдельный ряд интересных статей на эти темы (см. [22, 23, 38]). Активно развивается теория бигармонических отображений (см. [25, 33, 34, 36, 37, 43, 44]); параллельно разрабатывается глобальный аспект отображений многообразий (см. [40, 41]).

В исследованиях нередко привлекают график отображения пространств как подмногообразие в пространстве прямого произведения исходных пространств (см. [26, 29, 32, 39]), в пространствах со сложной структурой вводят вспомогательные объекты типа поверхность-график (см. [10, 11, 28]). Классическая тематика геометрии точечных отображений отметила в 1994 г. выход монографии М. В. Драгнев, Ю. В. Павлюченко и В. В. Рыжкова [6], а в 2003 г. — монографии Г. Матиевой [14]. В последние годы в геометрии точечных отображений продолжается получение результатов (см., например, работы В. С. Болодурина [3], В. И. Грачевой [5], О. В. Казниной [8, 9], а также целую серию работ [15–18] под руководством Г. Матиевой). В большинстве этих работ исследование основано на привлечении конструктивного графика отображения евклидовых пространств, введенного В. Т. Базылевым (об этом [1, 2]).

В настоящей работе будет продемонстрирован расслоенный характер графика отображения гладких многообразий постоянного, но не максимального ранга. Работа выполнена методом подвижного репера и методом внешних дифференциальных форм Картана и Лаптева (см. [7]); рассмотрения локальны, а рассматриваемые функции предполагаются достаточно гладкими.

2. Отображение гладких многообразий и его график. Пусть M, M^* — гладкие многообразия, $\dim M = n, \dim M^* = m; f: M \rightarrow M^*$ — гладкое отображение, определенное на некоторой области $\Omega \subset M$, так что для любого $x \in \Omega$ имеем $f(x) = y \in M^*$. Отображение f можно интерпретировать в виде n -мерного гладкого подмногообразия в пространстве прямого произведения $M \times M^*$

$$G = \left\{ z = (x, y) \in M \times M^* \mid x \in \Omega; f(x) = y \in M^* \right\},$$

которое принято называть *графиком отображения* f (см. [4, с. 56]). Пусть $\text{pr}_1: G \rightarrow M, \text{pr}_2: G \rightarrow M^*$ — естественные проекции графика на каждое из многообразий. Отображение проектирования на область $\Omega \subset M$ обратимо, а обратное к нему отображение $f': M \rightarrow G$, определенное по закону $f(x) = z \in G$ для каждого $x \in \Omega$, можно назвать *присоединенным* отображением по аналогии со случаем евклидовых пространств (см. [2]).

Обозначим через $\omega^J(I, J, K = 1, \dots, n)$ и $\omega^{*A}(A, B, C = 1, \dots, m)$ структурные формы расслоений HM и HM^* линейных реперов $(\bar{e}_I)$ и $(\bar{e}_A^*)$ над заданными многообразиями. Указанные формы подчинены структурным уравнениям

$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J; \quad D\omega^{*A} = \omega^{*B} \wedge \omega_B^{*A}. \quad (1)$$

Набор $n + m$ линейных дифференциальных форм ω^J, ω^{*A} будем определять на подрасслоении таких реперов в точках графика $(\bar{e}_I, \bar{e}_A^*)_z$, которые соответствующими линейными отображениями Pr_1 и Pr_2 проектируются в подвижные реперы $(\bar{e}_I)_x$ и $(\bar{e}_A^*)_y$. Структурные уравнения отображения f (см. [13]) имеют вид

$$\omega^{*A} = h_I^A \omega^I. \quad (2)$$

Продолжая эту систему, согласно уравнениям (1) получаем

$$\Delta h_I^A = h_{IJ}^A \omega^J, \quad h_{IJ}^A = h_{JI}^A, \quad (3)$$

где $\Delta h_I^A := dh_I^A - h_K^A \omega_I^K + h_I^B \omega_B^{*A}$, а линейные дифференциальные формы ω_I^J и ω_B^{*A} определены на подрасслоении второго порядка H^2G . Величины $\{h_I^A\}$ и $\{h_I^A, h_{IJ}^A\}$ являются относительно компонентами фундаментальных объектов первого и второго порядка, порожденных отображением (см. [13, с. 40]). С помощью объекта $\{h_I^A\}$ определяются координаты X^{*A} образа $f_*\bar{e}$ векторного поля $\bar{e}$ в дифференциале отображения $f_*: X^{*A} = h_I^A X^I$. В настоящей работе изучаются гладкие отображения $f: M \rightarrow M^*$ с постоянным на области $\Omega \subset M$ положительным, но не максимальным рангом r , где $0 < r < \min(n, m)$. Это означает, что для всякого координатного представления $y^A = y^A(x^1, \dots, x^n)$ отображения f ранг якобиевой матрицы $\partial y^A / \partial x^I$ равен числу r . Значит, $\text{rank}(h_I^A) = r$ во всех точках области Ω . Проведем дальнейшую канонизацию репера $(\bar{e}_I, \bar{e}_A^*)_z$:

(а) в соответствующем репере $(\bar{e}_I)_x$ последние $(n - r)$ векторов $\bar{e}_\alpha (\alpha, \beta, \gamma = r + 1, \dots, n)$ образуют базис ядра $\text{Ker } f_{*x}$ в каждой точке $x \in \Omega$, а первые r векторов $\bar{e}_i (i, j, k, l, s, t = 1, \dots, r)$ дополняют $\bar{e}_\alpha$ до базиса всего касательного пространства $T_x M$;

- (b) в соответствующем репере $(\bar{e}_A^*)_y$ первые r векторов $\bar{e}_i^* = f_{*x}(\bar{e}_i)$ составляют базис образа $\text{Im } f_{*x}$, а остальные векторы $\bar{e}_a^*(a, b, c = r + 1, \dots, m)$ дополняют $\bar{e}_i^*$ до базиса всего пространства $T_y M^*$.

Этой канонизации репера отвечает приведение матрицы h_I^A к диагональному виду $\begin{pmatrix} \delta_i^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и следующей записи структурных уравнений (2) отображения:

$$\omega^{*i} = \omega^i, \quad \omega^{*a} = 0. \quad (4)$$

Продолжение этих уравнений с учетом (3) дает следующий набор соотношений:

$$\omega_i^{*j} - \omega_i^j = h_{ik}^j \omega^k + h_{i\alpha}^j \omega^\alpha, \quad (5)$$

$$\omega_i^{*a} = h_{ik}^a \omega^k, \quad (6)$$

$$-\omega_\alpha^j = h_{\alpha k}^j \omega^k + h_{\alpha\beta}^j \omega^\beta, \quad (7)$$

$$h_{\alpha k}^b = 0, \quad h_{\alpha\gamma}^b = 0.$$

Теорема 1. *Гладкое отображение многообразий $f: M \rightarrow M^*$, заданное на некоторой области $\Omega \subset M$, имеет постоянный ранг r тогда и только тогда, когда график отображения $G \subset M \times M^*$ представляет собой расслоенное подмногообразие над r -мерным образом $f(\Omega) \subset M^*$.*

Доказательство. Пусть отображение $f: M \rightarrow M^*$, заданное на области $\Omega \subset M$, имеет постоянный ранг r . Тогда при описанной выше канонизации реперов на области, на ее образе $f(\Omega) \subset M^*$ и на графике $G \subset M \times M^*$ имеют место уравнения (4)–(7). Значит, подсистема форм ω^k определяет на графике некоторое интегрируемое $(n - r)$ -распределение, соответствующее распределению $\text{Ker } f_*$ элементов ядра дифференциала f_* .

Обозначим через F_x максимальное интегральное многообразие распределения $\text{Ker } f_*$, т.е. $F_x = f^{-1}(y)$, а через $F'_z = (F_x, y)$ — $(n - r)$ -мерное интегральное многообразие распределения Δ_ν на графике G , которое можно называть *вертикальным*. Согласно уравнениям (4) и (6) система

$$\omega^{*i} = \omega^i, \quad \omega^{*a} = 0, \quad \omega^{*a}_i = h_{ik}^a \omega^k$$

определяет r -мерное подмногообразие $f(\Omega) \subset M^*$, а полный образ $\text{Im } f_*$, определяемый базисом $\bar{e}_i^*$, представляет собой касательное расслоение над многообразием $f(\Omega)$. Субмерсия $\text{pr}_2: G \rightarrow f(\Omega)$ выполняет роль канонической проекции, расслаивающей график G на $(n - r)$ -мерные слои F' над базой $f(\Omega)$. В силу соотношений (1), (4)–(5) формы ω^i — базовые, ω^α — слоевые; они удовлетворяют структурным уравнениям расслоенного пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^{*i}_k; \quad D\omega^\alpha = \omega^k \wedge \omega^\alpha_k + \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta.$$

Обратно, пусть теперь $f: M \rightarrow M^*$ — гладкое отображение, определенное на области $\Omega \subset M$, $\dim M = n$, $\dim M^* = m$. Предположим, что его n -мерный график представляет собой расслоенное подмногообразие $G \subseteq M \times M^*$ над r -мерным образом $f(\Omega) \subset M^*$. Очевидно, что $r < m$. Каноническая проекция $\text{pr}_2: G \rightarrow f(\Omega)$ расслаивает график на r -параметрическое семейство $(n - r)$ -мерных многообразий F' , причем во всякой точке $z \in G$ имеем $F'_z = \{(F_x, y) \mid F_x = f^{-1}(y)\}$. Выберем репер $(\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha)_x$, в котором векторы $\bar{e}_\alpha$ — базис касательного пространства $T_x F_x$, а для соответствующего репера $(\bar{e}_i^*, \bar{e}_a^*)_y$ векторы $\bar{e}_i^* = f_{*x}(\bar{e}_i)$ — базис пространства $T_y f(\Omega)$. Тогда $f_{*x}(\bar{e}_\alpha) = \bar{e}$ и в области $\Omega \subset M$ имеем $\text{rank}(h_I^A) = r < \min(n, m)$, т.е. отображение f имеет пониженный ранг r . $\square$

3. Риманова структура графика отображения. Пусть $(M, g), (M^*, g^*)$ — римановы многообразия, где g, g^* обозначают соответствующее поле метрического тензора на гладком многообразии; $\dim M = n$, $\dim M^* = m$. Обозначим через (ω^I, ω_J^I) и $(\omega^{*A}, \omega_B^{*A})$ формы римановых

связностей на M и M^* , удовлетворяющие структурным уравнениям

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I; \quad D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} dg_{IJ} - g_{IK}\omega_J^K - g_{KJ}\omega_I^K &= 0; \\ D\omega^{*A} = \omega^{*B} \wedge \omega_B^{*A}; \quad D\omega_B^{*A} &= \omega_B^{*C} \wedge \omega_C^{*A} + R_{BCD}^{*A} \omega^{*C} \wedge \omega^{*D}; \\ dg_{AB}^* - g_{AC}^* \omega_B^{*C} - g_{CB}^* \omega_A^{*C} &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

где R_{JKL}^I, R_{BCD}^{*A} — тензоры кривизны связностей Леви-Чивиты соответствующих римановых многообразий M и M^* . На пространстве прямого произведения $M \times M^*$ определяется риманова структура полем метрического тензора $g \oplus g^*$ с компонентами

$$\begin{pmatrix} g_{IJ} & 0 \\ 0 & g_{AB}^* \end{pmatrix}$$

Если задано гладкое отображение $f: (M, g) \rightarrow (M^*, g^*)$ на некоторой области $\Omega \subset M$ так, что $\forall x \in \Omega : f(x) = y \in M^*$, то график отображения — это n -мерное подмногообразие $G \subset M \times M^*$ в римановом пространстве. Дальнейшее продолжение структурных уравнений (2)–(3) отображения f приводит к системе

$$\Delta h_{IJ}^A = h_{IJK}^A \omega^K, \quad (10)$$

где $\Delta h_{IJ}^A := dh_{IJ}^A - h_{IL}^A \omega_J^L - h_{LJ}^A \omega_I^L + h_{IJ}^B \omega_B^{*A}$, $h_{I[JK]}^A = h_L^A R_{IJK}^L - h_I^B h_J^C h_K^D R_{BCD}^{*A}$. Теперь система величин h_{IJ}^A образует тензор на графике, носящий название *второго (фундаментального) тензора отображения f* . Его компоненты определяют координатную запись билинейного отображения $\sigma: TM \times TM \rightarrow Tf(M)$, называемого второй фундаментальной формой отображения f (см. [35]). Отображение σ всякой паре векторных полей $\bar{e}$ и $\bar{e}$ ставит в соответствие векторное поле на образе $f(\Omega)$ по закону: $\sigma(\bar{e}, \bar{e}) = h_{IJ}^A X^I Y^J \bar{e}_A^*$.

Следствие 1.1. *Гладкое отображение римановых многообразий $f: (M, g) \rightarrow (M^*, g^*)$ пониженного ранга r , заданное на некоторой области $\Omega \subset M$, порождает на ней полуинтегрируемую структуру почти произведения из вертикального слоения $\text{Ker } f_*$ элементов ядра дифференциала отображения f_* и ортогонального ему r -мерного распределения.*

Доказательство. Для обоснования утверждения уточним канонизацию репера $(\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha)_x$ из доказательства Теоремы 1, выбрав $(\bar{e}_\alpha)$ — ортонормированным базисом касательного пространства $T_x F_x$, а $(\bar{e}_i)$ — ортогональными элементу ядра дифференциала отображения f_* . В свою очередь векторы $(\bar{e}_a^*)$ репера $(\bar{e}_i^*, \bar{e}_a^*)_y$ составляют ортонормированный базис ортогонального дополнения подпространства $\text{Im } f_*$ до пространства $T_y f(\Omega)$. Тогда в подрасслоении $H_0 G$ линейных реперов графика компоненты метрических тензоров приведены к виду

$$g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad g^* = \begin{pmatrix} g_{ij}^* & 0 \\ 0 & \delta_{ab} \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} g_{ij}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Не выписывая полного набора структурных уравнений для метрических тензоров, обратим внимание на одно из них:

$$\omega_i^\beta = -g_{ik} \omega_\beta^k,$$

которое с учетом формул (7) примет вид

$$\omega_i^\beta = h_{ij\beta} \omega^j + h_{i\gamma\beta} \omega^\gamma, \quad (11)$$

где $h_{ij\beta} := g_{ik} h_{j\beta}^k$; $h_{i\gamma\beta} := g_{ik} h_{\gamma\beta}^k$. Эта система представляет собой структурные уравнения распределения Δ r -мерных плоскостей, в каждой точке $x \in \Omega$ ортогональных слоям $F_x = f^{-1}(y)$. Таким образом, на области $\Omega \subset M$ задана полуинтегрируемая структура почти произведения

$$TM = \Delta \oplus \text{Ker } f_*,$$

где $\Delta = \text{Ker}^\perp f_*$. □

Тождественное равенство нулю второй фундаментальной формы отображения $f: h_{IJ}^A = 0$ характеризует тип *аффинных*, или *вполне геодезических* отображений (см. [45]). Они отображают

геодезические кривые области $\Omega \subset M$ в геодезические многообразия M^* с сохранением аффинного параметра кривой.

Если поле ненулевого второго тензора отображения f допускает представление с помощью компонент h_I^A первого тензора отображения

$$h_{IJ}^A = a_I h_J^A + a_J h_I^A, \quad (12)$$

где a_I — компоненты некоторого ковектора на графике G , то f отображает геодезические области $\Omega \subset M$ в геодезические многообразия M^* без сохранения аффинного параметра и носит название *проективного отображения*.

Отображение $f: (M, g) \rightarrow (M^*, g^*)$ индуцирует на области Ω поле тензора с компонентами $\tilde{g}$

$$\tilde{g}_{IJ} = h_I^A h_J^B g_{AB}^* \quad (13)$$

и соответствующую метрику $d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{IJ} \omega^I \omega^J$. Выделим ряд известных типов отображений римановых многообразий, существенно использующих наличие метрики. Отображение $f: (M, g) \rightarrow (M^*, g^*)$ называют *относительно аффинным* (см. [46]), если оно индуцирует на области $\Omega \subset M$ поле тензора $\tilde{g}$, ковариантно постоянного относительно римановой связности на области Ω :

$$\nabla \tilde{g}_{IJ} = 0.$$

Согласно уравнениям структуры тензорного поля и циклической замене индексов приходим к следствию:

$$h_I^A h_{JK}^B g_{AB}^* = 0. \quad (14)$$

Таким образом, всякое аффинное отображение является относительно аффинным. Известно (см. [46]), что относительно аффинное отображение связного многообразия в другое многообразие имеет постоянный ранг.

С другой стороны, поле второго тензора отображения всегда допускает представление в виде суммы

$$h_{IJ}^A = \xi^A g_{IJ} + h_{IJ}^{\circ A},$$

где $\xi^A = \frac{1}{n} g^{IJ} h_{IJ}^A$, $h_{IJ}^{\circ A}$ — бесследовая часть. Величины $h^A = g^{IJ} h_{IJ}^A$ подчиняются структурным уравнениям

$$dh^A + h^B \omega_B^{*A} = g^{IJ} h_{IJK}^A \omega^{*K},$$

поэтому функции h^A являются компонентами векторного поля на образе $f(\Omega)$, носящего название *поля напряжения* отображения f .

В соответствии с представлением второго тензора h_{IJ}^A можно выделить два класса отображений

(а) первый класс характеризуется нулевым полем напряжения:

$$g^{IJ} h_{IJ}^A = 0, \quad (15)$$

состоит из *гармонических* отображений;

(б) второй класс выделяется нулевой бесследовой частью разложения:

$$h_{IJ}^A = \xi^A g_{IJ}, \quad (16)$$

такие отображения будем называть *g-омбилическими*. Заметим, что отображение $f: (M, g) \rightarrow (M^*, g^*)$ является аффинным тогда и только тогда, когда оно одновременно *g-омбилическое* и *гармоническое*: $h_{IJ}^A = 0$.

Если вторая фундаментальная форма отображения f пропорциональна метрике $d\tilde{s}^2$, то отображение будем называть *g*-омбилическим*.

Из соотношений (12)–(16) на компоненты первого и второго тензора отображения в силу введенной канонизации реперов непосредственно следует

Предложение 1 (см. [20]). *Если гладкое отображение римановых многообразий $f: (M, g) \rightarrow (M^*, g^*)$, заданное на некоторой области $\Omega \subset M$, постоянного ранга r является*

(1) *относительно аффинным, то вертикальное слоение $\text{Ker } f_*$ вполне геодезическое, а распределение $\Delta = \text{Ker}^\perp f_*$ задает также вполне геодезическое слоение;*

- (2) проективным, то вертикальное слоеение $\text{Ker } f_*$ вполне геодезическое, а распределение $\Delta = \text{Ker}^\perp f_*$ задает омбилическое слоеение;
- (3) g -омбилическим ($1 < r < n - 1$), то вертикальное слоеение $\text{Ker } f_*$ омбилическое, а распределение $\Delta = \text{Ker}^\perp f_*$ задает вполне геодезическое слоеение.

Перейдем от подвижного репера $(\bar{e}_I, \bar{e}_A^*)_z$ к новому реперу $(\bar{e}_I, \bar{e}_A^*)_z$, в котором

- (а) векторы $\bar{e}_I = \bar{e}_I + h_I^A \bar{e}_A^*$ образуют базис касательного пространства $T_z G$ к графику f ,
- (б) векторы $\bar{e}_A^*$ составляют базис ортогонального дополнения $T_z^\perp G$ касательного пространства до всего прямого произведения $M \times M^*$.

Тем самым подрасслоение указанных реперов над многообразием G допускает представление в виде суммы $H'_0 G \oplus H_0^\perp G$, где $H'_0 G$ — подрасслоение реперов $(\bar{e}_I)$, $H_0^\perp G$ — подрасслоение нормальных реперов $(\bar{e}_A^*)$. Как было отмечено выше, отображение $f: (M, g) \rightarrow (M^*, g^*)$ индуцирует на области Ω поле тензора $\tilde{g}$ и соответствующую метрику $\tilde{ds}^2$. Тем временем на графике индуцируется поле тензора с компонентами

$$G_{IJ} = \langle \bar{e}_I, \bar{e}_J \rangle = g_{IJ} + \tilde{g}_{IJ}$$

и метрика $dS^2 = G_{IJ} \omega^I \omega^J$. Введя обозначение $G_{AB}^* = \langle \bar{e}_A^*, \bar{e}_B^* \rangle$, получаем метрику пространства $M \times M^*$ в виде

$$\begin{pmatrix} G_{IJ} & 0 \\ 0 & G_{AB}^* \end{pmatrix}$$

Для риманова многообразия $M \times M^*$ можно выписать структурные уравнения вида (8), формы римановой связности в них будем обозначать заглавными буквами $(\Omega_I^J, \Omega_I^{n+B}, \Omega_{n+A}^J, \Omega_{n+A}^{n+B})$. В подвижном репере $(\bar{e}_I, \bar{e}_A^*)_z$ структурные уравнения подмногообразия $G \subset M \times M^*$ записываются в виде

$$\Omega^{n+A} = 0,$$

где $\Omega^{n+A} := \omega^{n+A} - h_I^A \omega^I$. Продолжение этой системы дает соотношения

$$\Omega_I^{n+A} = t_{IJ}^{n+A} \omega^J, \quad t_{IJ}^{n+A} = t_{JI}^{n+A},$$

в которых через t_{IJ}^{n+A} обозначены относительные компоненты второго фундаментального тензора графика G . Из нового выражения метрики пространства $M \times M^*$ следует справедливость равенства

$$G_{IJ} \Omega_{n+A}^J + G_{AB}^* \Omega_I^{n+B} = 0,$$

откуда имеем $\Omega_{n+A}^J = -G^{IJ} G_{AB}^* \Omega_I^{n+B}$. Исходя из этих соотношений, уравнения структуры подрасслоений $H'_0 G$ и $H_0^\perp G$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} D\omega^I &= \omega^J \wedge \omega_J^I; \\ D\Omega_I^J &= \Omega_I^K \wedge \Omega_K^J + \tilde{R}_{IKL}^J \omega^K \wedge \omega^L; \\ D\Omega_{n+A}^{n+B} &= \Omega_{n+A}^C \wedge \Omega_{n+C}^{n+B} + \tilde{R}_{AKL}^B \omega^K \wedge \omega^L, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\tilde{R}_{IKL}^J := -G^{JS} G_{AB}^* t_{I[K}^A t_{L]S}^{n+B}$; $\tilde{R}_{AKL}^B := -G_{AC}^* G^{IJ} t_{I[K}^{n+C} t_{L]J}^{n+B}$. В силу теоремы Картана—Лаптева на указанных расслоениях реперов определены две связности:

- (а) первая — с формами Ω_I^J и тензором кривизны $\tilde{R}_{IKL}^J$, так называемая *индуцированная связность Леви-Чивиты* на графике $G \subset M \times M^*$;
- (б) вторая — *нормальная связность* (см., например, [12, т. II, с. 23]) графика G с формами Ω_{n+A}^{n+B} и тензором кривизны $\tilde{R}_{AKL}^B$.

4. Конструктивный график отображения евклидовых пространств. Пусть $M = E^n$, $M^* = \overline{E}^m$ — два евклидовых пространства; $f: E^n \rightarrow \overline{E}^m$ — гладкое отображение, определенное на некоторой области $\Omega \subset E^n$ так, что $\forall x \in \Omega : f(x) = y \in \overline{E}^m$, и имеющее постоянный ранг r . Следуя В. Т. Базылеву (см. [2]), вложим пространства E^n и $\overline{E}^m$ как вполне ортогональные плоскости с общей точкой O в евклидово пространство E^{n+m} . В этом объемлющем пространстве гладкому отображению f соответствует n -мерная поверхность

$$G = \{z \in E^{n+m} \mid \vec{Oz} = \vec{Ox} + \vec{Oy}; x \in \Omega; f(x) = y \in \overline{E}^m\},$$

называемая конструктивным графиком отображения f (см. также [1]).

Слои отображения, т. е. максимальные интегральные многообразия распределения ядра $\text{Ker } f_*$, в этом случае принято называть *горизонталями отображения f* (см. [2]). Если F_x — горизонталь отображения, проходящая через точку x , то $f(F_x) = y$. Проведем через точку y плоскость $E^n(y)$, параллельную E^n , тогда $(n-r)$ -мерная поверхность $F'_z = G \cap E^n(y)$ проектируется вдоль плоскости $\overline{E}^m$ в горизонталь F_x и называется *горизонтальным сечением графика отображения f* в точке z . Поскольку присоединенное отображение $f': E^n \rightarrow G$ сводится к параллельному переносу, и $F'_z \cong F_x$, то график G частично параллелен плоскости E^n с индексом $1 - \frac{r}{n}$. Итак, график $G \subset E^{n+m}$ отображения $f: E^n \rightarrow \overline{E}^m$ евклидовых пространств ранга r расслаивается на r -параметрическое семейство горизонтальных сечений, каждое из которых проектируется вдоль плоскости $\overline{E}^m$ в соответствующую горизонталь отображения f . Деривационные формулы репера в точке $z \in G$ графика могут быть записаны следующим образом:

$$d\vec{z} = \omega^i \vec{e}_i + \omega^\alpha \vec{e}_\alpha; \quad d\vec{e}_I = \Omega_I^J \vec{e}_J + \Omega_I^{n+A} \vec{e}_A^*; \quad d\vec{e}_A^* = \Omega_{n+A}^J \vec{e}_J + \Omega_{n+A}^{n+B} \vec{e}_B^*. \quad (18)$$

Заметим, что в каждой точке графика векторы $\vec{e}_A^*$ репера инвариантно определяют две ортогонально дополнительные плоскости: одну из них $[z, \vec{e}_i^*]$ назовем ранговой нормалью, а другую $[z, \vec{e}_\alpha^*]$ — перенесенной нормалью.

Компоненты второго тензора графика G выражаются через координаты h_{IJ}^A второго тензора отображения f следующим образом:

$$t_{IJ}^{n+l} = -G^{lk} g_{kj}^* h_{IJ}^j, \quad t_{ij}^{n+a} = h_{ij}^a, \quad t_{i\beta}^{n+a} = t_{\alpha\beta}^{n+a} = 0. \quad (19)$$

Получение характеристик графика G отображения евклидовых пространств будем рассматривать для таких отображений f ранга $r > 1$, у которых присоединенное отображение $f': E^n \rightarrow G \subset E^{n+m}$ является *простым* (см. [19]). Это означает, что интегральные кривые полей главных направлений эллипсоидов деформации отображения f' однозначно определяют на области $\Omega \subset E^n$ ортогональную сеть σ^n , называемую *основанием отображения*; при этом сеть $\sigma^n = f'(\sigma^n)$ на графике G также ортогональна.

Теорема 2. Пусть гладкое отображение евклидовых пространств $f: E^n \rightarrow \overline{E}^m$, заданное на некоторой области $\Omega \subset E^n$, с графиком $G \subset E^{n+m}$ имеет постоянный ранг r . Справедливы следующие утверждения.

1. Если f является относительно аффинным, то его график лежит на цилиндрической поверхности, образующими которой служат $(n-r)$ -мерные плоские горизонтальные сечения, а направляющая, проходящая через точку $z \in G$, имеет m -мерную соприкасающуюся плоскость; обратное также верно.
2. Если f является проективным, то его график расслаивается на два семейства поверхностей: $(n-r)$ -мерных плоских горизонтальных сечений и перпендикулярных им r -ортогональных систем.
3. Если f является g -омбилическим, то его график расслаивается на два семейства поверхностей: $(n-r)$ -мерные горизонтальные сечения являются омбилическими подмногообразиями пространства E^{n+m} , а ортогональные им поверхности другого семейства несут голономную сеть линий кривизны.
4. Если f является g^* -омбилическим, то его график лежит на цилиндрической поверхности, образующими которой служат $(n-r)$ -мерные плоские горизонтальные сечения, а направляющие суть r -мерные поверхности, несущие голономную сеть линий кривизны.

Доказательство. Пусть отображение евклидовых пространств $f: E^n \rightarrow \overline{E}^m$ на области $\Omega \subset E^n$ имеет постоянный ранг r .

1. Если f — относительно аффинное, то согласно условию (14) и в силу соотношений (19) имеем

$$\begin{aligned}\Omega_i^\alpha &= h_{i\alpha J} \omega^J = 0; & \Omega_i^{n+k} &= t_{iJ}^{n+k} \omega^J = 0; \\ \Omega_\alpha^j &= g_{kl} g^{*lj} \Omega_\alpha^{n+k} = 0; & \Omega_\alpha^{n+a} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, в формулах (18) $d\bar{e}_i = \Omega_i^j \bar{e}_j + h_{ij}^a \omega^j \bar{e}_a^*$; $d\bar{e}_\alpha = \Omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta$.

Следовательно, график G отображения локально представляет собой цилиндрическую поверхность, $(n-r)$ -мерными плоскими образующими которой являются горизонтальные сечения. Направляющей этой поверхности служит r -мерное подмногообразие $F_z'^\perp$ — образ максимального вполне геодезического интегрального многообразия $F_x^\perp$ распределения Δ в присоединенном отображении $f': E^n \rightarrow G$. При этом соприкасающаяся плоскость указанной направляющей в точке $z \in G$

$$\Pi_z(F_z'^\perp) = [z, d\bar{z}, d^2\bar{z}] = [z, \omega^i \bar{e}_i, (d\omega^i + \omega^j \Omega_j^i) \bar{e}_i + h_{ij}^a \omega^i \omega^j \bar{e}_a^*]$$

является m -мерной, а главная нормаль подмногообразия $F_z'^\perp$ в точке графика совпадает с перенесенной нормалью $[z, \bar{e}_a^*]$.

Отметим важный частный случай: график аффинного отображения $f: E^n \rightarrow \overline{E}^m$ лежит на n -мерной плоскости (верно и обратное). Для обоснования утверждений 2—4 уточним канонизацию репера $(\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha)_x$ на области $\Omega \subset E^n$, расположив его векторы на касательных к линиям σ^n основания присоединенного отображения. Интегральные кривые полей векторов $(\bar{e}_i)$ образуют на области $\Omega \subset E^n$ r -мерную ортогональную подсеть $\sigma^r \subset \sigma^n$, которой на графике G соответствует ортогональная подсеть $f'(\sigma^r) = \sigma'^r \subset \sigma'^n = f'(\sigma^n)$. Условие голономности (см. [1]) указанных выше подсетей σ^r и σ'^r означает равенство нулю координат $h_{ij}^k = 0$ для различных значений i, j, k .

2. Если f — проективное, то согласно условию (12) и в силу соотношений (19) имеем

$$h_{ik}^j = 0 \ (j \neq i, k); \quad h_{i\alpha}^j = 0; \quad \Omega_i^{n+a} = 0; \quad \Omega_\alpha^j = 0; \quad \Omega_\alpha^{n+A} = 0.$$

Таким образом, в формулах (18) $d\bar{e}_\alpha = \Omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta$. Следовательно, график G отображения расслаивается на два семейства ортогональных поверхностей: $(n-r)$ -мерных плоских горизонтальных сечений и r -мерных поверхностей, несущих ортогональную голономную сеть (т. е. так называемых r -ортогональных систем).

3. Если f — g -омбилическое, то согласно условию (16) и в силу соотношений (19) имеем

$$\begin{aligned}h_{ij}^k &= 0, \quad h_{ij}^a = 0 \ (i \neq j); \\ \Omega_\alpha^k &= \frac{1}{g_{kk}^*} \Omega_\alpha^{n+k} = -\frac{1}{1 + g_{kk}^*} \xi^k \omega^\alpha, \text{ по } k \text{ нет суммирования.}\end{aligned}$$

Таким образом, график G отображения расслаивается на два семейства ортогональных поверхностей: $(n-r)$ -мерных горизонтальных сечений, которые являются омбилическими подмногообразиями (см. [24]) пространства E^{n+m} , и r -мерных поверхностей, несущих ортогональную голономную сеть $\sigma'^r \subset \sigma'^n$. Более того, условия

$$t_{ij}^{n+k} = t_{ij}^{n+a} = 0 \ (i \neq j); \quad h_{ij\alpha} = 0$$

имеют следствием сопряженность указанной сети. Значит, σ'^r — голономная сеть линий кривизны.

4. Если f — g^* -омбилическое, то в силу соотношений (19) имеем

$$\begin{aligned}h_{ij}^k &= 0, \quad h_{ij}^a = 0 \ (i \neq j); \\ \Omega_i^\alpha &= h_{i\alpha J} \omega^J = 0; \quad \Omega_i^{n+k} = -\frac{g_{kk}^*}{1 + g_{kk}^*} \eta^k \omega^i, \text{ по } k \text{ нет суммирования;} \\ \Omega_\alpha^j &= 0; \quad \Omega_\alpha^{n+A} = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, в формулах (18) $d\bar{e}_i = \Omega_i^j \bar{e}_j + \eta^a \omega^i \bar{e}_a^*$; $d\bar{e}_\alpha = \Omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta$.

Поэтому график G отображения локально представляет собой цилиндрическую поверхность, $(n-r)$ -мерными плоскими образующими которой являются горизонтальные сечения, а направляющей этой поверхности служит r -мерное подмногообразие $F_z'^{\perp}$, по аналогии со случаем 3 несущее голономную сеть линий кривизны. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базылев В. Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств// Уч. зап. МПГУ им. В. И. Ленина. — 1970. — № 374. — С. 41–51.
2. Базылев В. Т. О частичных отображениях евклидовых пространств// Тр. Мат. ин-та им. А. Размадзе АН ГрузССР. — 1980. — 64. — С. 19–27.
3. Болодурин В. С. О свойствах точечных соответствий между тремя многомерными поверхностями проективных пространств// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 9. — С. 3–15.
4. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. — М.: Мир, 1975.
5. Грачева В. И. О геометрии точечного соответствия евклидовых пространств при использовании графика дифференцируемого отображения// в кн.: Математический вестник педагогических вузов и университетов Волго-Вятского региона. — Киров: Радуга-ПРЕСС, 2012. — С. 90–97.
6. Драгнев М. В., Павлюченко Ю. В., Рыжков В. В. Избранные главы дифференциальной геометрии точечных отображений. — М.: РУДН, 1994.
7. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1979. — 9. — С. 3–247.
8. Казнина О. В. О графике некоторого отображения в конструкции Фубини—Чеха// в кн.: Математика в образовании. — Чебоксары, 2011. — С. 176–180.
9. Казнина О. В. Типы отображения в конструкции Фубини—Чеха// в кн.: Математический вестник педагогических вузов и университетов Волго-Вятского региона. — Киров: Радуга-ПРЕСС, 2013. — С. 86–91.
10. Карманова М. Б. Поверхности-графики над трехмерными пространствами Карно—Каратеодори// Докл. РАН — 2015. — 463, № 3. — С. 265–268.
11. Карманова М. Б. Максимальные поверхности-графики на 4-мерных 2-ступенчатых сублоренцевых структурах// Сиб. мат. ж. — 2016. — 57, № 2. — С. 350–362.
12. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981.
13. Лаптев Г. Ф. К инвариантной аналитической теории дифференцируемых отображений// Тр. геом. семина. ВИНТИ — 1974. — 6. — С. 37–42.
14. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства. — Ош, 2003.
15. Матиева Г., Ташпулатов А. Б. Двойные линии вырожденного частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе// Вестн. Кыргыз.-Росс. славянск. ун-та. — 2010. — 10, № 9. — С. 20–23.
16. Матиева Г., Мустапакулова Ч. А., Папиева Т. М. О двойных линиях одного вырожденного частичного отображения евклидова пространства// в кн.: Перспективы развития фундаментальных наук (Вайтулевич Е. А., ред.). — Томск, 2014. — С. 633–635.
17. Матиева Г., Абдуллаева Ч. Х., Курбанбаева Н. Н. О квазидвойных линиях одного частичного отображения, порождаемого заданным семейством гладких линий// Ceteric Paribus. — 2016. — № 4. — С. 6–13.
18. Матиева Г., Абдуллаева Ч. Х., Папиева Т. М. О неподвижных прямых одного частичного отображения евклидова пространства E_5 // в кн.: Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. — Бишкек, 2017. — С. 148–151.
19. Рыжков В. В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами// в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: Ин-т научн. и техн. информ. АН СССР, 1970. — С. 153–174.
20. Рылов А. А. К геометрии отображения римановых многообразий пониженного ранга// Диффер. геом. многообр. фигур. — 1990. — 21. — С. 90–93.
21. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1970.
22. Степанов С. Е. О геометрии проективных субмерсий римановых многообразий// Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 9. — С. 48–54.

23. Abe N., Hasegawa K. An affine submersion with horizontal distribution and its applications// Differ. Geom. Appl. — 2001. — 14, № 3. — P. 235–250.
24. Chen B. Y. Geometry of Submanifolds. — New York: Marcel Dekker, 1973.
25. Chiang Y. J. f -Biharmonic maps between Riemannian manifolds// J. Geom. Symmetry Phys. — 2012. — 27. — P. 45–58.
26. Craveiro de Carvalho F. J., Robertson S. A. Graphs and their parallel groups// Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. — 1999. — 48, № 1. — P. 65–70.
27. Mikeš J. et al. Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ., 2015.
28. Dillen F., Verbovwe G., Vrancken L. Cubic form geometry for immersions in centro-affine and graph hypersurfaces// Res. Math. — 2003. — 43, № 1–2. — P. 88–95.
29. Eells J. Minimal graphs// Manuscr. Maths — 1979. — 28, № 1–3. — P. 101–108.
30. Falcitelli M., Ianus S., Pastore A. M. Riemannian Submersions and Related Topics. — Singapore: World Scientific, 2004.
31. Garcia-Rio E., Kupeli D. N. Semi-Riemannian Maps and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
32. Lee K. W., Lee Y. I. Mean curvature flow of the graphs of maps between compact manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — 363, № 11. — P. 5745–5759.
33. Lu W. J. On f -bi-harmonic maps and bi- f -harmonic maps between Riemannian manifolds// Sci. China Math. — 2015. — 58, № 7. — P. 1483–1498.
34. Nakauchi N., Urakawa H., Gudmundsson S. Biharmonic maps into a Riemannian manifold of non-positive curvature// Geom. Dedic. — 2014. — 169. — P. 263–272.
35. Nore T. Second fundamental form of a map// Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — 4, № 146. — P. 281–310.
36. Ou Y. L., Lu S. Biharmonic maps in two dimensions// Ann. Mat. Pura Appl. — 2013. — 192, № 1. — P. 127–144.
37. Ou Y. L. f -Harmonic morphisms between Riemannian manifolds// Chin. Ann. Math. D. — 2014. — 35, № 2. — P. 225–236.
38. Pipoli G. Mean curvature flow and Riemannian submersion// Geom. Dedic. — 2016. — 184, № 1. — P. 67–81.
39. Savas-Halilaj A., Smoczyk K. Homotopy of area decreasing maps by mean curvature flow// Adv. Math. — 2014. — 255. — P. 455–473.
40. Stepanov S. E. On the global theory of some classes of mappings// Ann. Glob. Anal. Geom. — 1995. — 13, № 3. — P. 239–249.
41. Stepanov S., Tsyganok I. Vanishing theorems for harmonic mappings into non-negatively curved manifolds and their applications// Manuscr. Math. — 2017. — 154, № 1–2. — P. 79–90.
42. Toth G. Harmonic and Minimal Maps. — Ellis Horwood, 1984.
43. Urakawa H. The geometry of biharmonic maps// Proc. Int. Conf. “Harmonic Maps and Differential Geometry” (Cagliari, Sept. 7–10, 2009). — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2011. — P. 159–175.
44. Urakawa H. Biharmonic maps into symmetric spaces and integrable systems// Hokkaido Math. J. — 2014. — 43, № 1. — P. 105–136.
45. Vilms J. Totally geodesic maps// J. Differ. Geom. — 1970. — 4, № 1. — P. 73–79.
46. Wan T. Y. H. Stability of minimal graphs in product of surfaces// Proc. Pacific Rim. Geom. Conf. “Geometry from the Pacific Rim” (Singapore, December 12–17, 1994). — Berlin–New York: de Gruyter, 1997. — P. 395–401.
47. Yano K., Ishihara S. Harmonic and relatively affine mappings// J. Differ. Geom. — 1975. — 10. — P. 501–509.

Рылов Александр Аркадьевич

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

E-mail: alexander_rylov@mail.ru