Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Сабыканов, Й. Микеш, П. Пешка, Симметрические, полусимметрические и рекуррентные проективно евклидовы пространства, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 60–66

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-60-66>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:36:17

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 179 (2020). С. 60–66
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-179-60-66

УДК 514.76

СИММЕТРИЧЕСКИЕ, ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИЕ И РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРОЕКТИВНО ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

© 2020 г. А. С. САБЫКАНОВ, Й. МИКЕШ, П. ПЕШКА

Посвящается профессору В. Т. Базылеву

Аннотация. В настоящей статье изложены некоторые результаты, полученные для симметрических, полусимметрических и полусимметрических рекуррентных проективно-евклидовых пространств. Найдены компоненты объектов аффинной связности изучаемых пространств.

Ключевые слова: симметрическое пространство, полусимметрическое пространство, рекуррентное пространство, эквиаффинное пространство, проективно-евклидово пространство.

SYMMETRIC, SEMISYMMETRIC, AND RECURRENT PROJECTIVELY EUCLIDEAN SPACES

© 2020 А. S. SABYKANOV, J. MIKEŠ, P. PEŠKA

ABSTRACT. In this paper, we present some results obtained for symmetric, semisymmetric, and semisymmetric recurrent projectively-Euclidean spaces. Components of objects of affine connections of these spaces are found.

Keywords and phrases: symmetric space, semisymmetric space, recurrent space, equiaffine space, projective-Euclidean space.

AMS Subject Classification: 53B05, 53B20, 53B22, 11Y11

1. Введение. Как известно (см. [9]), пространство аффинной связности A_n называется проективно-евклидовым, если любая геодезическая линия этого пространства отображается на прямую линию евклидова пространства E_n . В работе изложены результаты исследований симметрических, рекуррентных и полусимметрических пространств, которые являются одновременно проективно-евклидовыми.

Симметрические пространства впервые ввел в рассмотрение в 1925 г. П. А. Широков (см. [15, 16]), затем они исследовались многими авторами, например, Э. Картаном (см. [19]), А. Лихнеровичем (см. [28]). Симметрические проективно-евклидовы пространства изучал П. А. Широков (см. [15, 16]). Геодезические отображения симметрических, полусимметрических и полусимметрических рекуррентных пространств изучали Н. С. Синюков (см. [12]), Й. Микеш (см. [6, 7]) И. Гинтерлейтнер и Й. Микеш (см. [21], а также [13, 14, 29, 32, 33]).

Специальные отображения симметрических пространств и им близкие проблемы изучались, например, в [1, 2, 17, 29, 30, 34, 39, 40].

В работах И. Гинтерлейтнер и Й. Микеша [22–26] исследуются общие закономерности геодезических отображений, в частности, доказано, что геодезические отображения сохраняют класс

Работа выполнена при поддержке гранта Университета им. Ф. Палацкого (Оломоуц, Чехия) «Алгебраические и геометрические структуры», IGA PrF 2019015.

гладкости метрик (псевдо-) римановых многообразий. Это свойство естественным образом обобщается для более общего случая (см. [27]).

2. Проективно-евклидовы пространства. Приведем основные понятия теории геодезических отображений пространств аффинной связности (см. например, [10, 13, 20, 33]).

В пространстве аффинной связности без кручения A_n , отнесенном к локальной системе координат $x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)$, при помощи объекта аффинной связности $\Gamma_{ij}^h(x)$, $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$, определяют тензоры Римана, Риччи и проективной кривизны Вейля:

$$R_{ijk}^h = \partial_i \Gamma_{kj}^h + \Gamma_{ki}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h - \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h, \quad R_{ij} = R_{ij}^\alpha, \\ W_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} \left(\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik} \right) + \frac{1}{n+1} \left(\delta_i^h R_{[jk]} + \frac{1}{n+1} \left(\delta_k^h R_{[ij]} - \delta_j^h R_{[ik]} \right) \right),$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$, δ_i^h — символы Кронекера, $[ij]$ — альтернирование без деления.

Пространство A_n принадлежит классу гладкости C^r ($A_n \in C^r$), если $\Gamma_{ij}^h(x) \in C^r$. Эквивалентным пространством называется пространство A_n , в котором тензор Риччи симметричен ($R_{ij} = R_{ji}$). В эквивалентном пространстве тензор проективной кривизны упрощается следующим образом:

$$W_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} \left(\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik} \right).$$

Пространство A_n называется *плоским* (или *аффинным*), если в нем существует система координат x , в которой $\Gamma_{ij}^h(x) = 0$. Тензорным признаком плоских пространств является равенство нулю тензора Римана. В плоском пространстве можно естественным образом ввести евклидову метрику, поэтому их называют евклидовыми и обозначают E_n .

Диффеоморфизм $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ называют *геодезическим отображением*, если в результате f все геодезические линии A_n переходят в геодезические линии $\bar{A}_n$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ было геодезическим, является выполнение в общей по отображению f системе координат x следующих условий:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i, \quad (1)$$

где Γ_{ij}^h и $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ — объекты аффинной связности пространств A_n и $\bar{A}_n$, $\psi(x)$ — некоторый ковектор.

Тензоры Римана, Риччи и проективной связности Вейля пространств A_n и $\bar{A}_n$ при геодезическом соответствии связаны следующими условиями:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_i^h \psi_{[kj]} + \delta_k^h \psi_{ij} - \delta_j^h \psi_{ik}, \\ \bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1)\psi_{ij} + \psi_{[ij]}, \\ \bar{W}_{ijk}^h = W_{ijk}^h,$$

где

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j. \quad (2)$$

Здесь и далее запятой обозначаем ковариантную производную по связности пространства A_n , объекты пространства $\bar{A}_n$ отмечены чертой, например, $\bar{R}_{ijk}^h$ — тензор Римана пространства $\bar{A}_n$.

Пространство аффинной связности A_n называется *проективно-евклидовым пространством*, если оно допускает геодезическое отображение на евклидово пространство. Известно, что A_n ($n > 2$) является проективно-евклидовым тогда и только тогда, когда $W_{ijk}^h = 0$. Пространство A_n является проективно-евклидовым тогда и только тогда, когда тензор Римана имеет следующее представление:

$$R_{ijk}^h = \delta_i^h \psi_{[jk]} + \delta_j^h \psi_{ik} - \delta_k^h \psi_{ij}, \quad (3)$$

где ψ_{ij} — некоторый тензор, необходимо удовлетворяющий условию

$$\psi_{ij,k} = \psi_{ik,j};$$

учитывая формулы (1), заключаем, что этот тензор необходимо имеет строение (2).

Тензор Риччи проективно-евклидова пространства имеет вид

$$R_{ij} = (n-1)\psi_{ij} - \psi_{[ij]}.$$

Проективно-евклидово пространство является эквиаффинным тогда и только тогда, когда

$$\psi_{ij} = \psi_{ji}.$$

3. Аффинные отображения. С точки зрения пространств аффинной связности имеют большее значение аффинные отображения (см. [13, 20, 33]).

Отображение $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ называется *аффинным*, если оно является геодезическим, и при этом канонический параметр геодезической линии прообраза является каноническим параметром образа (см. [33]).

Отображение $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ является аффинным тогда и только тогда, когда в общей по отображению системе координат x выполняются условия $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x)$, т.е. аффинные связности тождественны и пространства A_n и $\bar{A}_n$ совпадают.

Пусть пространства A_n и $\bar{A}_n$ отнесены к системам координат x и $\bar{x}$. Отображение

$$f: \bar{x}^h = \bar{x}^h(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (4)$$

является аффинным тогда и только тогда, когда выполняются уравнения

$$\begin{aligned} \partial_i \bar{x}^h &= \bar{x}_i^h \\ \partial_j \bar{x}_i^h &= \Gamma_{ij}^\alpha(x) \bar{x}_\alpha^h - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^h(\bar{x}(x)) \bar{x}_i^\alpha \bar{x}_j^\beta \end{aligned} \quad (5)$$

при условии $|\bar{x}_i^h| \neq 0$.

С другой стороны, если для заданных пространств A_n и $\bar{A}_n$ найдено решение системы уравнений (5) относительно неизвестных функций $\bar{x}^h(x)$ и $\bar{x}_i^h(x)$, то тем самым построено аффинное соответствие (4) между A_n и $\bar{A}_n$. В этом случае уравнения (5) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных типа Коши относительно неизвестных функций $\bar{x}^h(x)$ и $\bar{x}_i^h(x)$. Условие интегрируемости уравнений (4) имеет вид

$$\bar{x}_\alpha^h R_{ijk}^h = \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^h \bar{x}_i^\alpha \bar{x}_j^\beta \bar{x}_k^\gamma.$$

4. Симметрические проективно-евклидовы пространства. П. А. Широков изучал (см. [15, 16]) симметрические проективно-евклидовы пространства и нашел в некоторой системе координат все связности таких пространств. Однако, как покажем ниже, дополнительным исследованием устанавливаем, что каноническую форму таких пространств, полученную П. А. Широковым, можно значительно упростить.

Симметрические пространства A_n характеризуются условием

$$R_{ijk,l}^h = 0 \quad (6)$$

на тензор Римана. П. А. Широков установил, что в любом не плоском симметрическом пространстве A_n существует проективная система координат x , в которой объект связности имеет представление

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \delta_i^h \partial_j \Psi + \delta_j^h \partial_i \Psi, \quad (7)$$

где

$$\Psi \equiv -\ln \sqrt{\varphi}, \quad \varphi \equiv a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + b_\alpha x^\alpha + c,$$

a_{ij} , b_i , c — некоторые постоянные, $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$.

Учитывая строение функции φ , кажется, что семейство всех симметрических проективно-евклидовых пространств зависит от $(n+1)(n+2)/2$ параметров. Однако все эти параметры фактически не существенны. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (см. [11]). *В любом не плоском симметрическом проективно-евклидовом пространстве A_n существует проективная система координат x , в которой объект аффинной связности имеет представление*

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \delta_i^h \partial_j \Psi + \delta_j^h \partial_i \Psi, \quad (8)$$

где

$$\Psi = -\ln \sqrt{\varphi}, \quad \varphi = e_1 x^{1^2} + e_2 x^{2^2} + \dots + e_k x^{k^2} + 1, \quad e_\tau = \pm 1, \quad \tau = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из того, что легко построить линейное преобразование координат $\bar{x}^h = A_\alpha^h x^\alpha + B^h$, где A_i^h , B^h — постоянные, и $\det A_i^h \neq 0$, при котором аффинная связность (7) примет вид (8). Это преобразование координат является аффинным. $\square$

Оказывается, что в указанном пространстве тензор ψ_{ij} ковариантно постоянный и, как показали А. П. Широков, единственный, с точностью до постоянного множителя, симметричный ковариантно постоянный тензор. Этот тензор в системе координат (8) в некоторой начальной точке x_0 имеет вид

$$\psi_{ij}(x_0) = \text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_k, 0, \dots, 0).$$

Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Симметрическое проективно-евклидово пространство A_n однозначно определяется сигнатурой симметрического ковариантно постоянного тензорного поля этого пространства.*

5. Полусимметрические проективно-евклидовы пространства. Условия интегрируемости соотношений (6) имеют вид

$$R_{ijk,lm}^h - R_{ijk,ml}^h = 0. \quad (9)$$

На основании тождеств Риччи условия (9) запишутся в следующей форме:

$$R_{\alpha jk}^h R_{ilm}^\alpha + R_{i\alpha k}^h R_{jlm}^\alpha + R_{ij\alpha}^h R_{klm}^\alpha - R_{ijk}^\alpha R_{alm}^h = 0.$$

Эти условия в неявном виде встречаются в работах П. А. Широкова (см. [15, 16]) и Э. Картана (см. [19]) при изучении симметрических пространств. Затем эти условия встречаются в работах А. Г. Волкера (см. [44]) и Н. С. Синюкова (см. [12, 13]). Пространства, в которых выполняются условия (9), Н. С. Синюков назвал *полусимметрическими*.

Изучению указанных пространств посвящено много исследований, например, [3–6, 8]. Особый интерес к полусимметрическим пространствам вызвала гипотеза К. Номидзу (см. [35]), которая была затем отвергнута (см. [38, 43]). Римановы и псевдоримановы пространства классифицировал З. Сабо (см. [41, 42]).

Геометрические отображения полусимметрических римановых пространств изучались в работах Н. С. Синюкова (см. [12]) и Й. Микеша (см. [6, 7], а также [13, 14, 29, 32, 33]).

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 3 (см. [11]). *Проективно-евклидово пространство A_n является полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно является эквиаффинным.*

Кроме того, установлено, что связность полусимметрического проективно-евклидова пространства имеет в проективной системе координат следующее представление:

$$\Gamma_{ij}^h = \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i,$$

где $\psi = \partial_i \Psi$, Ψ — некоторая функция класса C^2 .

6. Полусимметрические рекуррентные проективно-евклидовы пространства. Пространства аффинной связности A_n , в которых тензор Римана абсолютно рекуррентен, Г. С. Руз назвал *рекуррентными* (см. [36]). Рекуррентные пространства характеризуются следующими условиями:

$$R_{ijk,l}^h = \varphi_l R_{ijk}^h, \quad (10)$$

где φ_l — некоторый ковектор. Будем считать, что этот вектор ненулевой; в противном случае бы пространство было симметрическое. Отметим, что А. Г. Волкер доказал (см. [44]), что все рекуррентные римановы пространства являются полусимметрическими.

Непосредственным образом можно показать справедливость следующей теоремы.

Теорема 4 (см. [37]). *В рекуррентном проективно-евклидовом пространстве A_n тензор ψ_{ij} , участвующий в условиях (3), удовлетворяет условиям*

$$\psi_{ij,k} = \psi_{ij} \varphi_k, \quad \psi_{ij} = \varkappa_i \varphi_j,$$

где $\varkappa$ — некоторый ненулевой вектор.

Детальным анализом уравнений (3) была установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 5 (см. [37]). *Пространство аффинной связности A_n является полусимметрическим рекуррентным проективно-евклидовым пространством тогда и только тогда, когда его тензор Римана имеет вид (3), и при этом имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}\psi_{ij} &= \varkappa \varphi_i \varphi_j, \\ \varphi_{i,j} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varkappa'}{\varkappa} \right) \varphi_i \varphi_j,\end{aligned}$$

где $\varkappa$ — некоторая функция аргумента φ .

Изучая аффинные трансформации координат (4), мы установили следующий факт.

Теорема 6. *В любом неплоском полусимметрическом рекуррентном пространстве аффинной связности A_n существует проективная система координат x , в которой объект аффинной связности имеет следующее представление:*

$$\Gamma_{ij}^h = s(x^1) \cdot \left(\delta_i^h \delta_j^1 + \delta_j^h \delta_i^1 \right), \quad (11)$$

где $s(x^1) \in C^2$ — функция, для которой выполняется условие

$$(\ln(s' - s^2))' \neq 4s.$$

7. Пример компактного полусимметрического рекуррентного пространства аффинной связности, которое является проективно евклидовым. Построим компактное полусимметрическое рекуррентное пространство аффинной связности A_n , которое является гомеоморфным n -мерному тору.

Пусть $A_n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ и $x^1, x^2, \dots, x^n$ — соответствующие углы окружностей S^1 . Имеем векторные поля $X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2, \dots, X_n = \partial_n$, построенные «в целом». Построим аффинную связность «в целом», для которой

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k \cdot X_k = s(x^1) \cdot (\delta_i^1 X_j + \delta_j^1 X_i),$$

где $s(x^1)$ — дифференцируемая функция, определенная на S^1 .

В силу строения коэффициентов аффинной связности (11) пространство является полусимметрическим рекуррентным пространством аффинной связности, которое проективно евклидово, а в силу глобального построения многообразия — компактно.

Этот пример построен подобным образом, как в [31] построены компактные пространства, содержащие конциркулярные векторные поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березовский В. Е., Гусева Н. И., Микеш Й. О частном случае почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при котором сохраняется некоторый тензор // Мат. заметки. — 2015. — 98, № 3. — С. 463–466.
2. Березовский В. Е., Ковалев Л. Е., Микеш Й. О сохранении тензора Римана относительно некоторых отображений пространств аффинной связности // Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 9. — С. 3–10.
3. Кайгородов В. Р. Структура кривизны пространства-времени // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1983. — 14. — С. 177–204.
4. Ковалев Л. И. Тройные системы Ли и пространства аффинной связности // Мат. заметки. — 1973. — 14, № 1. — С. 107–112.
5. Лумисте Ю. Г. Полусимметрические подмногообразия // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1991. — 23. — С. 3–28.
6. Микеш Й. Геодезические отображения полусимметрических пространств // Деп. в ВИНТИ. — 1976. — № 3924-76Деп..
7. Микеш Й. Геодезические отображения на полусимметрические пространства // Изв. вузов. Мат. — 1994. — № 2. — С. 37–43.
8. Мирзоян В. А. Классификация Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах // Мат. сб. — 2000. — 191, № 9. — С. 65–80.

9. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
10. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966.
11. Сабыканов А. А., Микеш Й., Пешка П. О полусимметрических проективно евклидовых пространствах// Сб. тр. Междунар. молодежн. шк.-семина и Междунар. науч. конф. «Современная геометрия и ее приложения» (Казань, 27 ноября–3 декабря 2017 г.). — Казань: КФУ, 2017. — С. 123–125.
12. Синюков Н. С. О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — 98, № 1. — С. 21–23.
13. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
14. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств// Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1982. — 13. — С. 3–26.
15. Широков П. А. Постоянные поля векторов и тензоров в римановых пространствах// Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва. — 1925. — № 25. — С. 86–114.
16. Широков П. А. Избранные работы по геометрии. — Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1966.
17. Berezovskii V., Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings of manifolds with affine connection onto the Ricci symmetric manifolds// Filomat. — 2018. — 32, № 2. — P. 379–385.
18. Cartan É. Sur les variétés à connexion projective// Bull. Soc. Math. Fr. — 1924. — 52. — P. 205–241.
19. Cartan É. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, II// Bull. Soc. Math. Fr. — 1927. — 55. — P. 114–134.
20. Eisenhart L. P. Non-Riemannian geometry. — Princeton Univ. Press, 1926.
21. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings onto Weyl manifolds// J. Appl. Math. — 2009. — 2, № 1. — P. 125–133.
22. Hinterleitner I., Mikeš J. Fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2011. — 174. — P. 537–554.
23. Hinterleitner I., Mikeš J. Projective equivalence and spaces with equi-affine connection// J. Math. Sci. — 2011. — 177. — P. 546–550.
24. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings and Einstein spaces// in: Geometric Methods in Physics. — Basel: Birkhäuser, 2013. — P. 331–335.
25. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic Mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds preserve class of differentiability// Miskolc. Math. Notes. — 2013. — 14. — P. 89–96.
26. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings and differentiability of metrics, affine and projective connections// Filomat. — 2015. — 29. — P. 1245–1249.
27. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings onto Riemannian manifolds and differentiability// in: Geometry, Integrability and Quantization. — Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 2017. — Vol. 18. — P. 183–190.
28. Lichnerowicz A. Courbure, nombres de Betti, et espaces symétriques// Proc. Int. Congr. Math. (Cambridge, Massachusetts, August 30–September 6, 1950). — Am. Math. Soc., 1952. — P. 216–223.
29. Mikeš J. Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces// J. Math. Sci. — 1996. — 78. — P. 311–333.
30. Mikeš J., Berezovski V. E., Stepanova E., Chudá H. Geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2016. — 217. — P. 607–623.
31. Mikeš J., Chodorová M. On concircular and torse-forming vector fields on compact manifolds// Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. — 2010. — 26. — P. 329–335.
32. Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. Geodesic mappings and some generalizations. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009.
33. Mikeš J. et al. Differential geometry of special mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.
34. Najdanović M., Zlatanović M., Hinterleitner I. Conformal and geodesic mappings of generalized equidistant spaces// Publ. Inst. Math. Beograd. — 2015. — 98 (112). — P. 71–84.
35. Nomizu K. On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor// Tôhoku Math. J. — 1968. — 20. — P. 46–59.
36. Ruse H. S. On simply harmonic spaces// J. London Math. Soc. — 1947. — 21. — P. 243–247.
37. Sabykanov A., Mikeš J., Peška P. Recurrent equiaffine projective-Euclidean spaces// Filomat. — 2019. — 33, № 4.
38. Sekigawa K. On some hypersurfaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$ // Tensor. — 1972. — 25. — P. 133–136.
39. Stanković M., Mincić S., Velimirović Lj., Zlatanović M. On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 2010. — 124. — P. 77–90.

40. *Stepanov S., Shandra I., Mikeš J.* Harmonic and projective diffeomorphisms// J. Math. Sci. — 2015. — 207. — P. 658–668.
41. *Szabó Z. I.* Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. I. The local version// J. Differ. Geom. — 1983. — 17. — P. 531–582.
42. *Szabó Z. I.* Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. II. Global versions// Geom. Dedic. — 1985. — 19. — P. 65–108.
43. *Takagi H.* An example of Riemannian manifolds satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$ but not $\nabla R = 0$ // Tôhoku Math. J. — 1972. — 24. — P. 105–108.
44. *Walker A. G.* On Ruse's spaces of recurrent curvature// Proc. London Math. Soc. — 1950. — 52. — P. 36–64.

Сабыканов Алмаз Асанович

Киргизский национальный университет, Бишкек, Киргизская Республика

E-mail: almazbek.asanovich@mail.ru

Микеш Йозеф

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: josef.mikes@upol.cz

Пешка Патрик

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: patrik.peska@upol.cz