Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Степанова, Суботношение Штейнера римановых многообразий, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 67–72

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-67-72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:55:45

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 179 (2020). С. 67–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-179-67-72

УДК 514.74; 515.124.4; 519.176

СУБОТНОШЕНИЕ ШТЕЙНЕРА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2020 г. Е. И. СТЕПАНОВА

Аннотация. Суботношение Штейнера — одно из отношений типа Штейнера, показывающих, насколько сильно могут отличаться веса оптимальных соединяющих графов в метрическом пространстве. В статье получена верхняя оценка суботношения Штейнера римановых многообразий.

Ключевые слова: минимальная сеть Штейнера, минимальное заполнение, суботношение Штейнера.

STEINER SUBRATIO OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

© 2020 Е. I. STEPANOVA

ABSTRACT. The Steiner subratio is one of the Steiner-type relations that show how much the weights of optimal connecting graphs in a metric space can differ. In this paper, an upper estimate for the Steiner subratio of Riemannian manifolds is obtained.

Keywords and phrases: minimal Steiner net, minimal filling, Steiner subratio.

AMS Subject Classification: 05C05, 05C22, 05C35, 53C23

1. Введение. Суботношение Штейнера — одно из трех отношений типа Штейнера, характеристик метрических пространств, которые показывают, насколько сильно в метрическом пространстве могут отличаться веса трех видов оптимальных соединяющих графов. Под *графом* G мы понимаем пару (V, E) , где V — конечное множество, называемое множеством *вершин* графа G , а E — множество некоторых пар элементов из V , называемое множеством *ребер* графа G . Все необходимые определения теории графов, например, понятия степени вершины, смежных ребер, инцидентности и др., можно найти в [1].

Пусть N — произвольное конечное множество и G — связный граф, для которого $V(G) \supset N$. Тогда будем говорить, что *граф* G *соединяет* N . Множество графов, соединяющих N , обозначим через $\mathcal{G}(N)$.

Определение 1. Множество N назовем множеством *граничных вершин* (*границей*) графа G , а множество $V(G) \setminus N$ — множеством его *внутренних вершин*.

Замечание 1. Далее будем считать, что у всех графов имеется граница, возможно, пустая.

Ребра, инцидентные хотя бы одной граничной вершине, также будем называть *граничными*; остальные ребра назовем *внутренними*. Путь, соединяющий граничные вершины графа G , будем называть *граничным*.

Автор выражает благодарность А. О. Иванову и А. А. Тужилину за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ для ведущих научных школ России (проект НШ-6399.2018.1, соглашение 075-02-2018-867) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00378-а).

Определение 2. Граф G называется *взвешенным*, если на множестве его ребер E задана *весовая функция* $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$, которая ставит в соответствие каждому ребру $e \in E$ его *вес* $\omega(e)$. Сумма весов всех ребер графа G называется *весом графа* G и обозначается через $\omega(G)$.

Существует несколько подходов к оптимальному соединению множества точек N , лежащего в метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Несмотря на то, что понятие заполнения было введено позже понятия сети, для единообразия нам будет удобно начать именно с определения заполнения множества точек в метрическом пространстве. Оно было предложено А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [2]. В общем случае заполнение не предполагает, что внутренние вершины лежат в $\mathbb{X}$. Ограничение на весовую функцию здесь возникает по аналогии с ограничением на вес минимального заполнения в задаче М. Громова (см. [8]).

Определение 3. Пара (G, ω) называется *заполнением подмножества* N метрического пространства $\mathbb{X}$, если G — граф, соединяющий N , а ω — неотрицательная весовая функция такая, что вес любого пути, соединяющего любую пару граничных вершин, не меньше расстояния между ними в метрике ρ пространства $\mathbb{X}$. При этом граф G называется *параметризующим графом* заполнения (G, ω) .

Семейство всех заполнений множества N будем обозначать через $\mathfrak{G}(N)$.

Определение 4. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathfrak{G}(N)$ — некоторый класс заполнений, то есть заполнения, обладающие определенным свойством. Число

$$\text{mf}(N, \mathcal{K}) = \inf_{(G, \omega) \in \mathfrak{G}(N)} \{\omega(G) \mid (G, \omega) \in \mathcal{K}\}$$

будем называть *весом минимального заполнения множества* N в классе $\mathcal{K}$, а каждое заполнение из $\mathcal{K}$, имеющее вес $\text{mf}(N, \mathcal{K})$, называется *минимальным заполнением множества* N в классе $\mathcal{K}$. Минимальное заполнение N в произвольном классе $\mathcal{K}$ будем называть *оптимальным соединяющим графом с границей* N в смысле $\mathcal{K}$ или *оптимальным заполнением в классе* $\mathcal{K}$.

Тривиальный класс — это все заполнения множества, без каких-либо ограничений.

Определение 5. Оптимальный соединяющий граф множества N в классе всех заполнений называется *минимальным заполнением множества* N . Вес минимального заполнения множества N обозначим через $\text{mf}(N)$ или $\text{mf}(N, \rho)$, если нам важно обозначить метрику пространства $\mathbb{X}$.

Естественный способ задать нетривиальный класс — поместить все внутренние вершины заполнения в $\mathbb{X}$ и положить вес каждого ребра равным расстоянию между его концами. Тогда веса ребер будут зависеть от положения внутренних вершин. Так получается одна из самых известных задач об оптимальном соединении точек — задача Штейнера. В ней требуется соединить M графом наименьшего возможного веса так, что все его внутренние вершины лежат в $\mathbb{X}$, а вес каждого ребра равен расстоянию между концами этого ребра.

Определение 6. *Сетью с границей* N называется заполнение N , для которого определено отображение $\phi: V(G) \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что элементы N переходят в себя, а вес каждого ребра сети равен расстоянию между точками в $\mathbb{X}$, соответствующими его концам. Весовую функцию сети назовем *длиной* и обозначим через ρ .

Множество сетей с границей N обозначим через $\Gamma(N)$.

Определение 7. Оптимальный соединяющий граф в классе сетей называется *минимальной сетью Штейнера*. Другими словами, число

$$\text{smn}(N) = \inf_G \{\rho(G) \mid G \in \Gamma(N)\}$$

называется *длиной минимальной сети Штейнера*, а каждая сеть, имеющая длину $\text{smn}(N)$, называется *минимальной сетью Штейнера*. Если мы акцентируем внимание на том, что N лежит в пространстве с метрикой ρ , то для минимальной сети Штейнера для N будем использовать обозначение $\text{smn}(N, \rho)$.

Еще один подход к заданию класса — вообще запретить добавление внутренних точек. Он ведет к задаче о поиске оптимального взвешенного графа в классе заполнений без внутренних вершин. Очевидно, наиболее выгодная весовая функция в этом случае также будет длиной. Искомый граф в этом случае — хорошо известное минимальное остовное дерево. Длина минимального остовного дерева, соединяющего множество N , обозначается через $\text{mst}(N)$.

Далее через $\#N$ будем обозначать количество элементов в множестве N .

Отношения типа Штейнера показывают, насколько сильно отличаются веса оптимальных заполнений в разных классах. В 1968 году Гильберт и Поллак в [7] предложили взять отношение длины минимальной сети Штейнера к длине минимального остовного дерева. Точная нижняя грань таких отношений, взятая по всем n -точечным подмножествам пространства $\mathbb{X}$, называется *отношением Штейнера степени n пространства $\mathbb{X}$* и обозначается через $\text{sr}_n(\mathbb{X})$. Инфимум этих отношений, взятый по всем конечным неодноточечным подмножествам $\mathbb{X}$, был назван *отношением Штейнера пространства $\mathbb{X}$* . Эта величина обозначается через $\text{sr}(\mathbb{X})$.

Введя понятие минимального заполнения конечных метрических пространств, А. О. Иванов и А. А. Тужилин предложили рассмотреть еще два отношения. Близость минимального заполнения и минимального остовного дерева показывает отношение Штейнера—Громова.

Третье отношение называется суботношением Штейнера. Приведем его определение.

Определение 8. Величина

$$\text{ssr}(N) = \frac{\text{mf}(N)}{\text{mst}(N)}$$

называется *суботношением Штейнера множества N* . Если необходимо указать метрику ρ пространства $\mathbb{X}$, то будем обозначать суботношение Штейнера множества N через $\text{sgr}(N, \rho)$. Число

$$\text{ssr}_n(\mathbb{X}) = \inf_{N \subset \mathbb{X}} \{\text{ssr}(N) \mid 1 < \#N \leq n\}$$

называется *суботношением Штейнера степени n пространства $\mathbb{X}$* . Величина

$$\text{ssr}(\mathbb{X}) = \inf_{n > 1} \text{ssr}_n(\mathbb{X})$$

называется *суботношением Штейнера пространства $\mathbb{X}$* .

Заметим, что каждое отношение типа Штейнера степени 2 равно 1 для любого метрического пространства. А. О. Иванов и А. А. Тужилин в [2] показали, что суботношение Штейнера степени 3 евклидова пространства равно $\sqrt{3}/2$, то есть равно отношению Штейнера степени 3 евклидовой плоскости. В [7] была выдвинута гипотеза, что отношение Штейнера евклидовой плоскости равно тому же числу, однако она до сих пор остается недоказанной (см. [9]). Возникло предположение, что суботношение евклидовой плоскости равно тому же числу. Однако оказалось, что максимальное число n , для которого суботношение плоскости степени n равно $\sqrt{3}/2$, это 4 ($\text{ssr}_4(\mathbb{R}^2)$) вычислено в [6]). З. Н. Овсянников в [5] показал, что в классе выпуклых пятиугольников суботношение Штейнера все еще совпадает с четырехточечным, но $\text{ssr}_5(\mathbb{R}^2) < \sqrt{3}/2$. Там же было установлено, что $\text{ssr}_4(\mathbb{R}^3) < \sqrt{3}/2$.

В [3] А. О. Иванов и А. А. Тужилин показали, что отношение Штейнера любого связного риманова многообразия не больше, чем отношение плоскости. В [4] В. А. Мищенко доказала аналогичный результат для отношения Штейнера—Громова. В настоящей работе, используя аналогичную технику, мы покажем, что для любого связного риманова многообразия суботношение Штейнера не больше, чем суботношение плоскости, а значит, с учетом приведенных выше результатов, оно меньше $\sqrt{3}/2$.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Суботношение Штейнера произвольного связного риманова многообразия размерности n не превосходит суботношения Штейнера евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.*

Сначала докажем несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. Пусть X — множество, а ρ_1 и ρ_2 — метрики на нем. Предположим, что для некоторых чисел $c_2 \geq c_1 > 0$ неравенства $c_1 \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq c_2 \rho_2(x, y)$ выполнены для любых точек x и y из X . Тогда

$$\frac{c_1}{c_2} \text{ssr}(X, \rho_2) \leq \text{ssr}(X, \rho_1) \leq \frac{c_2}{c_1} \text{ssr}(X, \rho_2).$$

Доказательство. Если G — минимальная сеть Штейнера с границей $N \subset X$ в метрике ρ_1 , то G является соединяющей N сетью в любой другой метрике, поэтому

$$\text{smn}(N, \rho_1) = \rho_1(G) \geq c_1 \rho_2(G) \geq c_1 \text{smn}(N, \rho_2).$$

Аналогично

$$\text{smn}(N, \rho_2) \geq \frac{1}{c_2} \text{smn}(N, \rho_1) \iff \text{smn}(N, \rho_1) \leq c_2 \text{smn}(N, \rho_2).$$

В [4] было показано, что $\text{mf}(N, \rho_1) \geq c_1 \text{mf}(N, \rho_2)$ и $\text{mf}(N, \rho_1) \leq c_2 \text{mf}(N, \rho_2)$. Поэтому для любого конечного неодноточечного множества N , для которого существует минимальная сеть Штейнера (минимальное заполнение существует всегда; см. [2]),

$$\text{ssr}(N, \rho_1) = \frac{\text{mf}(N, \rho_1)}{\text{smn}(N, \rho_1)} \leq \frac{c_2 \text{mf}(N, \rho_2)}{c_1 \text{smn}(N, \rho_2)} = \frac{c_2}{c_1} \text{ssr}(N, \rho_2).$$

Значит,

$$\text{ssr}(X, \rho_1) = \inf_N \text{ssr}(N, \rho_1) \leq \frac{c_2}{c_1} \inf_N \text{ssr}(N, \rho_2) = \frac{c_2}{c_1} \text{ssr}(X, \rho_2).$$

Аналогично получается второе неравенство из утверждения леммы. $\square$

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и (X', ρ') — его подпространство, т. е. $X' \subset X$ и для любых точек $u, v \in X'$ выполнено $\rho'(u, v) = \rho(u, v)$. Так как каждое конечное подмножество подпространства X' является также конечным подмножеством всего пространства X , справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, (X', ρ') — его подпространство. Тогда $\text{ssr}(X', \rho') \geq \text{ssr}(X, \rho)$.

Следующая лемма основана на том, что оптимальный соединяющий граф останется соединяющим при отображении, не увеличивающем расстояния. Доказательство можно найти в [3, 4].

Лемма 3. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) , не увеличивающее расстояний, то есть $\rho_X(x, y) \geq \rho_Y(f(x), f(y))$ для любых точек x и y из X . Тогда для любого конечного подмножества $N \subset X$ выполняется:

$$\text{mf}(N) \geq \text{mf}(f(N)), \quad \text{smn}(N) \geq \text{smn}(f(N)).$$

Пусть M — связное n -мерное риманово многообразие. Для любой кусочно-гладкой кривой γ ее длину по отношению к римановой метрике обозначим через $\text{len}(\gamma)$. Тогда внутренняя метрика ρ , порожденная римановой метрикой, — это точная нижняя грань длин всех таких кривых, соединяющих точки, то есть $\rho(x, y) = \inf_{\gamma} \text{len}(\gamma(x, y))$, где $\gamma(x, y)$ — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки x и y на M .

Пусть P — точка многообразия M . Рассмотрим нормальные координаты $x_1, \dots, x_n$ с центром в точке P , для которых риманова метрика g_{ij} , вычисленная в точке P , совпадает с δ_{ij} . Возьмем выпуклый открытый шар $U(\delta)$ с центром в точке P радиуса δ , для которого каждая пара его точек x и y соединяется единственной кратчайшей геодезической γ , лежащей в $U(\delta)$. Тогда $\rho(x, y) = \text{len}(\gamma)$. Таким образом, $U(\delta)$ является метрическим пространством с внутренней метрикой.

В координатах $x_1, \dots, x_n$ шар $U(\delta)$ задается так: $U(\delta) = \{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < \delta^2\}$, поэтому если на $U(\delta)$ задать евклидово расстояние ρ_e (по отношению к нормальным координатам x_i), то метрическое пространство $(U(\delta), \rho_e)$ также будет пространством с внутренней метрикой, порожденной евклидовой метрикой δ_{ij} .

В силу гладкой зависимости метрики $g_{ij}(x)$ от точки x в шаре $U(\delta)$, для любого положительного числа $\varepsilon < \frac{1}{n^2}$ существует такое положительное число δ , что для всех точек x из $U(\delta)$ выполнено:

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \varepsilon. \quad (1)$$

Отсюда вытекает следующая лемма, доказательство которой приведено в [3].

Лемма 4. Пусть $\|v\|_g$ обозначает длину касательного вектора $v \in T_x M$ в метрике g_{ij} , а $\|v\|_e$ — длину этого вектора в евклидовой метрике δ_{ij} . Если для любых i и j выполняется неравенство (1), то

$$\sqrt{1 - n^2 \varepsilon} \|v\|_e \leq \|v\|_g \leq \sqrt{1 + n^2 \varepsilon} \|v\|_e.$$

Опираясь на определение расстояния между точками связного риманова многообразия, сразу же получаем следующий результат.

Следствие 1. Пусть M — произвольное связное риманово многообразие, $U(\delta)$ — открытый шар радиуса δ , ρ — внутренняя метрика, порожденная римановой метрикой на нем, ρ_e — внутренняя метрика, порожденная евклидовой метрикой на нем. Тогда для любого положительного $\varepsilon < \frac{1}{n^2}$ существует положительное δ такое, что для всех точек $x, y \in U(\delta)$ выполняется

$$\sqrt{1 - n^2 \varepsilon} \rho_e(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \sqrt{1 + n^2 \varepsilon} \rho_e(x, y).$$

Лемма 5. Пусть U — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой метрикой. Тогда $\text{ssr}(\mathbb{R}^n) = \text{ssr}(U)$.

Доказательство. Любое конечное множество N можно сжатием и сдвигом поместить в шар U , при этом все расстояния умножаются на одно и то же число λ . Поэтому и вес каждого оптимального соединяющего графа умножится на λ , а значит, все отношения типа Штейнера сохранятся, откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Из всего сказанного вытекает следующий результат.

Следствие 2. Пусть M — произвольное связное риманово многообразие размерности n и $U(\delta)$ — открытый шар радиуса δ с центром в некоторой точке $P \in M$. Обозначим через ρ внутреннюю метрику на M , порожденную римановой метрикой. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon < \frac{1}{n^2}$ существует положительное δ такое, что для всех точек x и y из $U(\delta)$ верно:

$$\sqrt{\frac{1 - n^2 \varepsilon}{1 + n^2 \varepsilon}} \text{ssr}(\mathbb{R}^n) \leq \text{ssr}(U(\varepsilon), \rho) \leq \sqrt{\frac{1 + n^2 \varepsilon}{1 - n^2 \varepsilon}} \text{ssr}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство теоремы 1. Пусть M — связное риманово n -мерное многообразие, ρ — внутренняя метрика на нем, порожденная римановой метрикой. Пусть P — произвольная точка из M и $U(\delta)$ — открытый шар радиуса δ с центром в этой точке. Введем в $U(\delta)$ нормальные координаты x_i , и пусть ρ_e — внутренняя метрика на $U(\delta)$, порожденная евклидовой метрикой δ_{ij} . Здесь δ такое же, как в следствии 2.

Пусть $\{\varepsilon_i\}$ — некоторая убывающая последовательность положительных чисел такая, что $\varepsilon_i < \delta$ для любого i и $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Рассмотрим семейство вложенных множеств $X_i = U(\varepsilon_i)$. Из леммы 5 получаем, что $\text{ssr}(U(\varepsilon_i), \rho_e) = \text{ssr}(\mathbb{R}^n)$.

В силу выпуклости шаров $U(\varepsilon_i)$, внутренняя метрика на них, порожденная римановой метрикой многообразия M , совпадает с ограничением метрики ρ . По следствию 2,

$$\text{ssr}(X_i) \leq \sqrt{\frac{1 + n^2 \varepsilon_i}{1 - n^2 \varepsilon_i}} \text{ssr}(\mathbb{R}^n).$$

Так как подкоренное выражение стремится к 1 при $i \rightarrow \infty$, то $\inf_i \text{ssr}(X_i, \rho) \leq \text{ssr}(\mathbb{R}^n)$, но по лемме 2 $\text{ssr}(M, \rho) \leq \inf_i \text{ssr}(X_i, \rho)$.

Доказательство окончено. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
2. Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Мат. сб. — 2012. — 203, № 5. — С. 65–118.

3. *Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д.* Отношение Штейнера для многообразий// Мат. заметки. — 2003. — 74, № 3. — С. 387–395.
4. *Мищенко В. А.* Оценки отношения Штейнера–Громова римановых многообразий// Фундам. прикл. мат. — 2013. — 18, № 2. — С. 119–124.
5. *Овсянников З. Н.* Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости и четырех точек в пространстве// Фундам. прикл. мат. — 2013. — 18, № 2. — С. 167–179.
6. *Степанова Е. И.* Бифуркации минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ и суботношение Штейнера евклидовой плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2016. — № 2. — С. 48–51.
7. *Gilbert E. N., Pollak H. O.* Steiner minimal trees// SIAM J. Appl. Math. — 1968. — 16, № 1. — P. 1–29.
8. *Gromov M.* Filling Riemannian manifolds// J. Differ. Geom. — 1983. — 18, № 1. — P. 1–147.
9. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* The Steiner ratio Gilbert–Pollak conjecture is still open// Algorithmica. — 2012. — 62, № 1. — P. 630–632.

Степанова Екатерина Ивановна

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: ekfila@gmail.com