Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Тимофеева, О доказательстве свойств полурекурсивных множеств, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 73–77

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-73-77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 06:35:16

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ СВОЙСТВ ПОЛУРЕКУРСИВНЫХ МНОЖЕСТВ

© 2020 г. И. Л. ТИМОФЕЕВА

Аннотация. В статье изложены доказательства свойств полурекурсивных множеств, основанные непосредственно на определении этих множеств и на рекурсивности предикатов Клини. Эти доказательства являются более короткими и интуитивно ясными, чем традиционные доказательства аналогичных утверждений для рекурсивно перечислимых множеств.

Ключевые слова: полурекурсивное множество, полухарактеристическая функция, рекурсивно перечислимое множество, частично рекурсивная функция, рекурсивная функция, предикат Клини.

ON PROOFS OF PROPERTIES OF SEMIRECURSIVE SETS

© 2020 I. L. TIMOFEEVA

ABSTRACT. In this paper, we present proofs of properties of semirecursive sets based directly on the definition of these sets and on the recursiveness of Kleene predicates. These proofs are shorter and clearer than traditional proofs of similar statements for recursively enumerable sets.

Keywords and phrases: semirecursive set, semicharacteristic function, recursively enumerable set, partially recursive function, recursive function, Kleene predicate.

AMS Subject Classification: 03D25

В алгоритмической теории множеств важную роль играют рекурсивно перечислимые множества. Понятие полурекурсивного множества обычно появляется далеко не в первую очередь, а его равнообъемность понятию рекурсивно перечислимого множества доказывается с помощью ряда других утверждений о рекурсивно перечислимых множествах. Нередко все рассуждения проводятся только на неформальном (интуитивном) уровне (см., например, [4]).

Докажем основные утверждения о полурекурсивных множествах напрямую, непосредственно основываясь на определении полурекурсивного множества и на теореме о рекурсивности предикатов Клини.

Будем рассматривать множества, являющиеся подмножествами множества $\mathbb{N}^n$, где $n \geq 1$. При этом, если $n = 1$, множество будем называть *линейным*; если $n > 1$, множество будем называть *нелинейным*.

Будем использовать следующие обозначения: χ_E — характеристическая функция множества E ; χ_E^* — полухарактеристическая функция множества E ; $D\varphi$ — область определения функции φ ; $\text{Val } \varphi$ — множество значений функции φ ; $\hat{X}Q(X)$ — множество истинности предиката $Q(X)$, где X — обозначение кортежа $(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого натурального n ($n \geq 1$). Будем также использовать символ условного равенства $\simeq$ и писать $\varphi(X) \simeq \psi(X)$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

- (1) $D\varphi = D\psi$;
- (2) если $X \in D\varphi$, то $\varphi(X) = \psi(X)$.

Будем ориентироваться на следующие достаточно известные определения.

Определение 1. Множество E ($E \subseteq \mathbb{N}^n$) называют *рекурсивным* множеством, если его характеристическая функция χ_E является рекурсивной функцией (рф):

$$\chi_E(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \in E, \\ 0, & \text{если } X \notin E. \end{cases}$$

Определение 2. Множество E ($E \subseteq \mathbb{N}^n$) будем называть *полурекурсивным*, если его полухарактеристическая функция χ_E^* является частично рекурсивной функцией (чрф):

$$\chi_E^*(X) \simeq \begin{cases} 1, & \text{если } X \in E, \\ \text{не определена,} & \text{если } X \notin E. \end{cases}$$

Определение 3. Множество E ($E \subseteq \mathbb{N}$) называют *рекурсивно перечислимым* множеством (рпм), если множество E — пустое или совпадает с множеством значений некоторой одноместной рекурсивной функции (рф).

Определение 4. Предикат с натуральными переменными называют *рекурсивным* предикатом (рп), если его множество истинности является рекурсивным.

Теорема 1. Всякое рекурсивное множество является полурекурсивным.

Доказательство. Пусть E — рекурсивное множество, т.е. χ_E — рекурсивная функция. Тогда

$$\chi_E^*(X) \simeq \mu t [\chi_E(X) = 1 \wedge t = 1],$$

где μ — оператор минимизации. Поскольку предикат $\chi_E(X) = 1 \wedge t = 1$ является рекурсивным, то χ_E^* — чрф, а множество E полурекурсивно. $\square$

Пусть зафиксирована какая-нибудь эффективная биективная нумерация класса всех машин Тьюринга с алфавитом 01 всеми натуральными числами (см., например, [2]); M_k — обозначение машины с номером k при этой нумерации. Для каждого натурального n ($n \geq 1$) эта нумерация порождает нумерацию класса всех n -местных частично рекурсивных функций. Номером n -местной чрф считают номер всякой машины Тьюринга, вычисляющей эту чрф.

Для каждого $n \geq 1$ ($n+2$)-местный предикат T_n (*предикат Клини*) определяют следующим образом. Каковы бы ни были натуральное число k , набор натуральных чисел X длины n и натуральное число z , полагают $T_n(k, X, z) = \text{И}$ тогда и только тогда, когда M_k , начав работу над набором X в стандартной начальной конфигурации, остановится результативно *точно* через z шагов. Известна следующая теорема: каждый предикат Клини рекурсивен (см., например, [2]).

Докажем ряд критериев полурекурсивности множества и свойства операций над полурекурсивными множествами, пользуясь рекурсивностью предикатов Клини.

Теорема 2. Множество E ($E \subseteq \mathbb{N}^n$) полурекурсивно тогда и только тогда, когда существует натуральное число k , такое, что E совпадает с множеством истинности предиката $\exists z T_n(k, X, z)$:

$$E = \hat{X} \exists z T_n(k, X, z).$$

Доказательство. *Доказательство.* $\Rightarrow$: Допустим, что E полурекурсивно, т.е. χ_E^* — чрф. Пусть $\mathbf{k}$ — какой-либо номер чрф χ_E^* . Поскольку $E = D_{\chi_E^*}$, то $X \in E$ тогда и только тогда, когда $\exists z T_n(\mathbf{k}, X, z) = \text{И}$. Следовательно, $E = \hat{X} \exists z T_n(\mathbf{k}, X, z)$.

$\Leftarrow$: Пусть $\mathbf{k}$ — такое натуральное число, что $E = \hat{X} \exists z T_n(\mathbf{k}, X, z)$. Тогда

$$\chi_E^*(X) \simeq sg(\mu z [T_n(\mathbf{k}, X, z) = \text{И}] + 1).$$

Поскольку предикат $T_n(\mathbf{k}, X, z)$ рекурсивен, χ_E^* является чрф, а значит, множество E полурекурсивно. $\square$

Теперь докажем свойства операций над полурекурсивными множествами.

Теорема 3. Пусть $E_1 \subseteq \mathbb{N}^n$ и $E_2 \subseteq \mathbb{N}^n$. Если множества E_1 , E_2 — полурекурсивны, то множества $E_1 \cap E_2$ и $E_1 \cup E_2$ также полурекурсивны.

Доказательство. Допустим, что E_1, E_2 — полурекурсивны, т. е. $\chi_{E_1}^*$ и $\chi_{E_2}^*$ — чрфф.

1. Докажем, что множество $E_1 \cap E_2$ полурекурсивно. Поскольку справедливо условное равенство

$$\chi_{E_1 \cap E_2}^*(X) \simeq \chi_{E_1}^*(X) \cdot \chi_{E_2}^*(X),$$

то $\chi_{E_1 \cap E_2}^*$ — чрф, а значит, множество $E_1 \cap E_2$ полурекурсивно.

2. Докажем, что множество $E_1 \cup E_2$ полурекурсивно. Пусть k_1 и k_2 — номера функций $\chi_{E_1}^*$ и $\chi_{E_2}^*$ соответственно. Согласно теореме 2

$$X \in E_1 \iff \exists z T_n(k_1, X, z), \quad X \in E_2 \iff \exists z T_n(k_2, X, z).$$

Тогда равносильны следующие три предиката (предложения с переменными):

$$X \in E_1 \vee X \in E_2 \iff \exists z T_n(k_1, X, z) \vee \exists z T_n(k_2, X, z) \iff \exists z (T_n(k_1, X, z) \vee T_n(k_2, X, z)).$$

Отсюда получаем, что

$$\chi_{E_1 \cup E_2}^*(X) \simeq sg(\mu z [T_n(k_1, X, z) \vee T_n(k_2, X, z) = \text{И}] + 1).$$

Функция ψ , для которой

$$\psi(X) \simeq \mu z [T_n(k_1, X, z) \vee T_n(k_2, X, z) = \text{И}],$$

является чрф, поскольку предикат $T_n(k_1, X, z) \vee T_n(k_2, X, z)$ является рекурсивным. Следовательно, $\chi_{E_1 \cup E_2}^*$ также является чрф, а значит, множество $E_1 \cup E_2$ полурекурсивно. $\square$

Теорема 4. *Множество E ($E \subseteq \mathbb{N}^n$) рекурсивно тогда и только тогда, когда множества E и $\mathbf{C}E$ полурекурсивны.*

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть E — рекурсивное множество. Тогда $\mathbf{C}E$ также рекурсивно. Отсюда по теореме 1 получаем, что E и $\mathbf{C}E$ — полурекурсивные множества.

$\Leftarrow$: Пусть E и $\mathbf{C}E$ — полурекурсивны, т. е. χ_E^* и $\chi_{\mathbf{C}E}^*$ — частично рекурсивны. Пусть k_1 и k_2 — номера функций χ_E^* и $\chi_{\mathbf{C}E}^*$ соответственно. Согласно теореме 2 имеем

$$X \in E \iff \exists z T_n(k_1, X, z), \quad X \in \mathbf{C}E \iff \exists z T_n(k_2, X, z).$$

Отсюда получаем цепочку:

$$X \in E \vee X \in \mathbf{C}E \iff \exists z T_n(k_1, X, z) \vee \exists z T_n(k_2, X, z) \iff \exists z (T_n(k_1, X, z) \vee T_n(k_2, X, z)).$$

Поскольку предикат $X \in E \vee X \in \mathbf{C}E$ — тождественно истинный, то для любого X существует такое натуральное число z , что $T_n(k_1, X, z) \vee T_n(k_2, X, z) = \text{И}$. Тогда является всюду определенной функция φ , заданная следующим образом:

$$\varphi(X) \simeq \mu z [T_n(k_1, X, z) \vee T_n(k_2, X, z) = \text{И}].$$

Функция φ является чрф, поскольку предикат $T_n(k_1, X, z) \vee T_n(k_2, X, z)$ рекурсивен. Таким образом, φ — рф.

Согласно определению предиката Клини и заданию функции φ имеем: $X \in E$ тогда и только тогда, когда $T_n(k_1, X, \varphi(X)) = \text{И}$. Значит, $E = \dot{X}T_n(k_1, X, \varphi(X))$. Поскольку T_n — рп, а φ — рф, то предикат $T_n(k_1, X, \varphi(X))$ рекурсивен, а значит, E — рекурсивное множество. $\square$

Замечание. Аналогичная теорема о рекурсивно перечисливых множествах носит имя Э. Поста: множество E рекурсивно тогда и только тогда, когда множества E и $\mathbf{C}E$ рекурсивно перечислимы.

Теорема 5. *Множество E ($E \subseteq \mathbb{N}^n$) полурекурсивно тогда и только тогда, когда E совпадает с множеством истинности предиката $\exists y R(X, y)$ для некоторого $(n+1)$ -местного рекурсивного предиката $R(X, y)$.*

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть $E \subseteq \mathbb{N}^n$ и E — полурекурсивно, а значит, χ_E^* — чрф. Пусть $\mathbf{k}$ — какой-то ее номер. Тогда, согласно теореме 2, $E = \hat{X} \exists z T_n(\mathbf{k}, X, z)$, причем $T_n(\mathbf{k}, X, z)$ — $(n+1)$ -местный рекурсивный предикат.

$\Leftarrow$: Пусть $R(X, y)$ — $(n+1)$ -местный рекурсивный предикат и $E = \hat{X} \exists y R(X, y)$. Тогда

$$\chi_E^*(X) \simeq sg(\mu y [R(X, y) = \text{И}] + 1).$$

Следовательно, χ_E^* — чрф, т. е. E — полурекурсивное множество. $\square$

Теорема 6. *Множество E ($E \subseteq \mathbb{N}^n$) — полурекурсивно тогда и только тогда, когда E совпадает с областью определения некоторой n -местной чрф.*

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть E полурекурсивно. Тогда χ_E^* — чрф и $E = D\chi_E^*$.

$\Leftarrow$: Пусть ψ — n -местная чрф и $E = D\psi$. Тогда

$$\chi_E^*(X) \simeq sg(\psi(X) + 1),$$

а значит, χ_E^* является чрф, т. е. E — полурекурсивно. $\square$

Теорема 7. *Пусть $E \subseteq \mathbb{N}$. Множество E полурекурсивно тогда и только тогда, когда E — рекурсивно перечислимое множество.*

Доказательство. $\Leftarrow$: Если $E = \emptyset$, то функция χ_E^* нигде не определена, а значит, она — чрф.

Допустим, что E — рпм, причем $E \neq \emptyset$. Пусть φ — 1-местная рф, такая, что $E = \text{Val}_\varphi$. Тогда

$$\chi_E^*(x) \simeq sg(\mu t [\varphi(t) = x] + 1),$$

а значит, χ_E^* — чрф, т. е. множество E полурекурсивно.

$\Rightarrow$: Если $E = \emptyset$, то оно рпм по определению. Допустим, что $E \neq \emptyset$ и E является полурекурсивным, т. е. χ_E^* — чрф. Пусть $\mathbf{k}$ — какой-то ее номер. Тогда по теореме 2 $E = \hat{x} \exists z T_1(\mathbf{k}, x, z)$.

Пусть фиксирована какая-то биективная нумерация множества $\mathbb{N}^2$ с помощью примитивно рекурсивных функций. Обозначим через $(t)_1$ и $(t)_2$ компоненты пары с номером t (рекурсивные функции от t).

Пусть $t^* \simeq \mu t [T_1(\mathbf{k}, (t)_1, (t)_2) = \text{И}]$, а $(t^*)_1, (t^*)_2$ — компоненты пары с номером t^* . Такое число t^* обязательно существует, поскольку $E \neq \emptyset$. Отметим, что $T_1(\mathbf{k}, (t^*)_1, (t^*)_2) = \text{И}$.

Зададим 1-местную функцию

$$\varphi(X) = \begin{cases} (t)_1, & \text{если } T_1(\mathbf{k}, (t)_1, (t)_2) = \text{И}, \\ (t^*)_1, & \text{если } T_1(\mathbf{k}, (t)_1, (t)_2) = \text{Л}. \end{cases}$$

Функция φ является рекуррентной, поскольку задана с помощью взаимно исключающих рекурсивных предикатов и рекурсивных функций. Докажем, что $E = \text{Val}_\varphi$.

Допустим, что $x \in E$. Тогда $\exists z T_1(\mathbf{k}, x, z) = \text{И}$. Пусть $\mathbf{k}$ и $\mathbf{z}$ такие, что $T_1(\mathbf{k}, x, \mathbf{z}) = \text{И}$ и $\mathbf{t}$ — номер пары $(x, \mathbf{z})$. Тогда $\varphi(\mathbf{t}) = x$, а значит, $x \in \text{Val}_\varphi$.

Теперь допустим, что $x \in \text{Val}_\varphi$. Пусть $\mathbf{t}$ такое натуральное число, что $\varphi(\mathbf{t}) = x$ и $\mathbf{t}$ — номер пары $((t)_1, (t)_2)$. Тогда либо $x = (t)_1$ и $T_1(\mathbf{k}, (t)_1, (t)_2) = \text{И}$, либо $x = (t^*)_1$ и $T_1(\mathbf{k}, (t)_1, (t)_2) = \text{Л}$, но заметим, что при этом $T_1(\mathbf{k}, (t^*)_1, (t^*)_2) = \text{И}$.

В обоих случаях $\exists z T_1(\mathbf{k}, x, z) = \text{И}$, а значит, $x \in E$. $\square$

Замечание. Можно доказать аналогичное утверждение и для нелинейных множеств, расширив традиционным образом понятие рпм для подмножеств $\mathbb{N}^n$.

Теорема 8. *Множество E ($E \subseteq \mathbb{N}$) полурекурсивно тогда и только тогда, когда E совпадает с областью значений некоторой частично рекурсивной функции.*

Доказательство. $\Rightarrow$: Допустим, что E — линейное полурекурсивное множество, т. е. χ_E^* — чрф. Положим $\psi(x) \simeq x \cdot \chi_E^*(x)$. Функция ψ является чрф и $E = \text{Val}_\psi$.

$\Leftarrow$: Пусть ψ — 1-местная чрф, $E = \text{Val}_\psi$ и $\text{Val}_\psi \neq \emptyset$. Тогда по теореме 6 множество D_ψ — полурекурсивное и непустое, а значит, согласно теореме 7 $D_\psi = \text{Val}_\varphi$ для некоторой рф φ .

Зададим функцию θ : $\theta(x) \simeq \psi(\varphi(x))$. Она является рф и $\text{Val}_\theta = \text{Val}_\psi = E$. Таким образом, E — рпм, а значит, по теореме 7 E полурекурсивно. В случае, когда $E = \text{Val}_\psi = \emptyset$, функция χ_E^* нигде не определена, следовательно, она — чрф. $\square$

В качестве следствия теоремы 2 и теорем 5—8 получаем следующие критерии полурекурсивности линейного множества.

Следствие. Пусть $E \subseteq \mathbb{N}$. Следующие условия эквивалентны:

- (1) E — полурекурсивное множество (χ_E^* — чрф).
- (2) E — рекурсивно перечислимое множество.
- (3) E совпадает с областью определения некоторой одноместной чрф.
- (4) E совпадает с множеством истинности предиката $\exists z T_1(k, x, z)$ для некоторого натурального k .
- (5) E совпадает с множеством истинности предиката $\exists y R(x, y)$ для некоторого рекурсивного предиката $R(x, y)$.
- (6) E совпадает с областью значений некоторой одноместной чрф.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. — М.: Мир, 1983.
2. Клини С. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957.
3. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1986.
4. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.

Тимофеева Ирина Леонидовна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: iltimofeeva@mail.ru