Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Тимошенко, К сходимости в смысле Чезаро числовых рядов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 78–80

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-78-80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:21:28

К СХОДИМОСТИ В СМЫСЛЕ ЧЕЗАРО ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

© 2020 г. В. В. ТИМОШЕНКО

Аннотация. Переход от заданного числового ряда к ряду усредненных сумм его членов называется процедурой Чезаро. В данной работе рассматривается ряд, для которого n -кратное применение процедуры Чезаро дает расходящиеся ряды, а $(n + 1)$ -кратное приводит к сходящемуся ряду.

Ключевые слова: числовой ряд, сходимость ряда, сходимость ряда в смысле Чезаро.

ON THE CESÀRO CONVERGENCE OF NUMERICAL SERIES

© 2020 V. V. TIMOSCHENKO

ABSTRACT. The transition from a given series to the series of averaged sums of its terms is called the Cesàro procedure. In this paper, we construct a series for which n -multiple application of the Cesàro procedure gives divergent series whereas the $(n + 1)$ -multiple leads to a convergent series.

Keywords and phrases: series, convergence, Cesàro convergence.

AMS Subject Classification: 40A05, 40B05, 40F05, 40G05

Дан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (1)$$

составленный из действительных или комплексных чисел. Будем называть переходом $C(1)$ переход от этого ряда к ряду, n -й член которого ($n = 1, 2, 3, \dots$) равен среднему арифметическому n первых членов исходного числового ряда:

$$a_n^1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad (2)$$

Для ряда

$$a_1^1 + a_2^1 + \dots + a_n^1 + \dots \quad (3)$$

аналогичную процедуру назовем переходом $C(2)$, она приводит нас к ряду

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots, \quad (4)$$

составленному из средних арифметических первых n членов ряда (1), и т. д. Аналогично, переходом $C(k)$ назовем переход от ряда $(k - 1)$

$$a_1^{(k-1)} + a_2^{(k-1)} + \dots + a_n^{(k-1)} + \dots \quad (5)$$

к ряду (k) , n -й член которого ($n = 1, 2, 3, \dots$) равен среднему арифметическому n первых членов ряда $(k - 1)$:

$$a_n^{(k)} = \frac{a_1^{(k-1)} + a_2^{(k-1)} + \dots + a_n^{(k-1)}}{n}. \quad (6)$$

По определению, ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (7)$$

$\begin{matrix} n \\ \text{№} \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
2	1	0	0	1/4	0	0	0	1/8	0	0	0	0	0	0	0	1/16	0	...
3	1	-1	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1	...
4	1	-3	2	4	-9	5	0	8	-17	9	0	0	0	0	0	16	-33	...
5	1	-7	12	10	-61	75	-30	64	-217	243	-90	0	0	0	0	256	-817	...
6	1	-15	50	...	...	...											...	
7	1	-31	180	...	...	...											...	
$(k-1)$	1	$a_{(k-1)2}$	$a_{(k-1)3}$	$a_{(k-1)4}$	$a_{(k-1)5}$	...											...	
k	1	...	...	...	...	...											...	

называется сходящимся в смысле Чезаро, если переход $C(1)$ дает ряд (1), сходящийся в обычном смысле.

Известно, что любой сходящийся ряд будет сходящимся в смысле Чезаро, причем к той же сумме. Обратное утверждение неверно. Ряд

$$1 + (-1) + 0 + 1 + (-1) + 0 + 0 + \dots + 0 + 1 + (-1) + 0 + 0 + \dots, \quad (8)$$

где 1 и (-1) стоят на 1-м и 2-м, 4-м и 5-м, 8-м и 9-м, 16-м и 17-м и т. д. местах, а все остальные члены ряда равны 0, сходится в смысле Чезаро, поскольку переход $C(1)$ дает ряд

$$1 + 0 + 0 + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{8} + 0 + 0 + \dots + 0 + \frac{1}{16} + 0 + \dots,$$

который сходится в обычном смысле (его сумма равна $3/2$). Но в обычном смысле он не является сходящимся хотя бы потому, что не выполняется необходимый признак сходимости числового ряда (его общий член не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$).

Задача, поставленная доцентом кафедры математического анализа МГПИ им. В. И. Ленина Н. Д. Гиленко в 1972 году, заключалась в следующем. Требовалось построить такой числовой ряд, чтобы он сам расходился в смысле Чезаро, полученный из него переходом $C(1)$ ряд (1) тоже расходился в смысле Чезаро, такими же были ряды (2), (3), ..., полученные при помощи переходов $C(2)$, $C(3)$, ..., $C(N-1)$, а следующий ряд (N) , полученный при помощи перехода $C(N)$, был бы сходящимся в смысле Чезаро.

Поступаем следующим образом. Берем ряд (8), который не сходится в обычном смысле, но сходится в смысле Чезаро. Построим следующую таблицу. Первая строка таблицы — номера членов ряда: 1, 2, 3, ... Третья строка — записанные по порядку члены ряда (8), вторая строка — ряд, полученный из этого ряда переходом $C(1)$.

В четвертой строке записываем ряд, из которого переходом $C(1)$ получается ряд, записанный в третьей строке. Члены ряда

$$a_{41} + a_{42} + \dots + a_{4n} + \dots \quad (9)$$

(символ a_{4n} 9 означает n -й член ряда, записанного в 4-й строке) находятся по формулам

$$a_{41} = 1; \quad a_{4n} = a_{3n} \cdot n - (a_{41} + a_{42} + \dots + a_{4(n-1)}), \quad n > 1. \quad (10)$$

Для 5-й строки, где записываем члены ряда, из которого переходом $C(2)$ получается ряд, записанный в 3-й строке (или, что то же самое, из которого переходом $C(1)$ получается ряд, записанный в 4-й строке), верны эти же формулы, только индекс 4 заменен на 5, а 3 — на 4.

Вообще, для k -й строки, где будем записывать члены ряда, из которого переходом $C(k-3)$ получается ряд, записанный в 3-й строке, или, что то же самое, из которого переходом $C(1)$ получается ряд, записанный в $(k-1)$ -й строке, будут справедливы те же формулы, но где индекс 4 заменен на k , а индекс 3 — на $(k-1)$ соответственно.

Заметим, что в строках 4-й, 5-й и т. д. этой таблицы записаны ряды, расходящиеся в смысле Чезаро. Действительно, пусть в k -й строке ($k \geq 4$) ряд сходится в смысле Чезаро, но тогда ряд в $(k-1)$ -й строке должен сходиться в обычном смысле. У нас $k \geq 4$, т.е. $k-1 \geq 3$, но ряд

в строке с номером 3 не может сходиться в обычном смысле. Для номера 3 это доказано выше, а для больших номеров это следует из тех соображений, что если ряд с таким номером сходится в обычном смысле, то сходится и ряд с номером на 1 меньшим, так как он получается переходом $C(1)$ из сходящегося в обычном смысле ряда, и так далее, так мы дойдем до третьей строки. Но ряд в этой строке сходится в обычном смысле, т.е. приходим к противоречию.

Итак, о рядах в приведенной выше таблицы мы можем утверждать следующее:

- 1) во второй строке таблицы записан сходящийся в обычном смысле числовой ряд;
- 2) в третьей строке записан ряд, не сходящийся в обычном смысле, но сходящийся в смысле Чезаро;
- 3) в последующих строках записаны ряды, расходящиеся и в обычном смысле, и в смысле Чезаро.

Напомним, что каждый предыдущий ряд таблицы получается из следующего за ним при помощи перехода $C(1)$.

Теперь становится понятным и решение нашей задачи. По заданному числу N в качестве нужного нам ряда мы берем ряд, занимающий в таблице строку под номером $N + 3$. При переходе $C(1)$ из него получается ряд, записанный в строке под номером $N + 2$, при переходе $C(1)$ — ряд строки под номером $N + 1$ и т. д. При переходе $C(N - 1)$ получим ряд

$$a_{41} + a_{42} + \dots + a_{4n} + \dots \quad (11)$$

4-й строки, который еще расходится в смысле Чезаро, а при следующем переходе $C(N)$ получится ряд

$$a_{31} + a_{32} + \dots + a_{3n} + \dots \quad (12)$$

из третьей строки, который сходится в смысле Чезаро. Искомый числовой ряд, таким образом, построен.

Заметим в заключение, что существуют ряды, расходящиеся в смысле Чезаро, для которых последовательность переходов $C(1), C(2), \dots, C(N), \dots$ не приводит к ряду, сходящемуся в смысле Чезаро. Таким, например, будет ряд $1 + 1 + 1 + \dots$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: ИЛ, 1951.

Тимошенко Валерий Викторович

Московский педагогический государственный университет

E-mail: vvtimoschenko@gmail.com