Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Чирский, Алгебраические свойства точек некоторого бесконечномерного метрического пространства, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 81–87

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-81-87>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:28:02

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 179 (2020). С. 81–87
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-179-81-87

УДК 511.36

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОЧЕК НЕКОТОРОГО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

© 2020 г. В. Г. ЧИРСКИЙ

Аннотация. В статье сообщается о развитии теории трансцендентных чисел в полиадической области, представляющей собой бесконечномерное метрическое пространство — прямое произведение полей p -адических чисел.

Ключевые слова: бесконечная алгебраическая независимость, F -ряд.

ALGEBRAIC PROPERTIES OF POINTS OF SOME INFINITE-DIMENSIONAL METRIC SPACE

© 2020 V. G. CHIRSKII

ABSTRACT. In this paper, we report on the development of the theory of transcendental numbers in a polyadic domain, which is an infinite-dimensional metric space, namely, the direct product of fields of p -adic numbers.

Keywords and phrases: infinite algebraic independence, F -series.

AMS Subject Classification: 11J91, 11J61

1. Множество полиадических чисел и его обобщения. Рассмотрим множество точек вида $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, образующих бесконечномерное пространство. Это пространство представляет собой прямое произведение полей p -адических чисел. Именно, координата с номером n этого вектора представляет собой p_n -адическое число, где p_n — простое число с номером n . Напомним, что p -адические числа являются пополнением поля рациональных чисел по p -адическому нормированию. Для рационального числа a символ $|a|_p$ обозначает величину p -адического нормирования, т.е. $|a|_p = p^{-\vartheta_p(a)}$, где, в свою очередь, символ $\vartheta_p(a)$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение числа a на простые множители. Это прямое произведение имеет естественную структуру коммутативного кольца с единицей (и с делителями нуля). Его принято называть кольцом полиадических чисел (см. [5]).

Это кольцо допускает другие описания. Введем на кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ наименьшую топологию, инвариантную относительно сдвига и такую, что идеалы $m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ кольца $\mathbb{Z}$ образуют базу системы окрестностей нуля. При этом операции сложения и умножения непрерывны, и кольцо целых чисел с введенной топологией имеет структуру топологического кольца. На этом топологическом кольце можно ввести метрику, полагая

$$\rho(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \left\lfloor \frac{x - y}{m} \right\rfloor, \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке проекта Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова «Современные проблемы фундаментальной математики и механики».

где символ $[t]$ обозначает расстояние от числа t до ближайшего к нему целого числа. Бесконечную последовательность целых чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ назовем *фундаментальной*, если для любого натурального числа k существует натуральное число N такое, что для любых натуральных n, m , больших N , $a_n \equiv a_m \pmod{k!}$. Полученное метрическое пространство не является полным. Например, последовательность $1!, 1! + 2!, 1! + 2! + 3!, \dots$ является фундаментальной, но не имеет предела в построенном топологическом кольце. Фундаментальные последовательности образуют кольцо. Понимая предел в смысле введенной выше топологии, назовем последовательность целых чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ *нулевой последовательностью*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Фундаментальные последовательности называются эквивалентными, если их разность — нулевая последовательность. *Кольцо целых полиадических чисел* определяется как кольцо эквивалентных фундаментальных последовательностей. Введенная выше метрика (1) топологического кольца целых чисел естественно продолжается на кольцо полиадических чисел.

Элементы $\mathfrak{a}$ кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде

$$\mathfrak{a} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m!, \quad a_m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_m \leq m. \quad (2)$$

Степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n - S_n}{p - 1}$, где S_n обозначает сумму цифр в p -ичном разложении числа n . Следовательно, для любого p при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение $|a_n n!|_p \rightarrow 0$. Это — достаточное условие для того, чтобы ряд (2) сходил в поле $\mathbb{Q}_p$. Сумму этого ряда (2) в поле $\mathbb{Q}_p$ обозначаем $\mathfrak{a}^{(p)}$. Как отмечено выше, полиадическое число $\mathfrak{a}$ можно рассматривать как точку бесконечномерного пространства с координатами $\mathfrak{a}^{(p_n)}$, где p_n — простое число с номером n .

Приведем краткий (и неполный) обзор задач, связанных с теорией полиадических чисел. Любое натуральное число M допускает единственное представление в виде

$$M = \sum_{m=1}^N a_m m!, \quad a_m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_m \leq m.$$

Это представление называют *факториальным*. Свойства факториального представления, в сравнении со свойствами так называемого представления с двойной базой, исследованы в [14]. Эти представления актуальны при решении некоторых практических задач.

С помощью меры Хаара—Лебега μ на кольце полиадических чисел можно определить интегрирование (см. например, [5]). В [4] доказано, что последовательность натуральных чисел равномерно распределена в кольце целых полиадических чисел. Это означает, что для любой непрерывной на этом кольце функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) = \int f(x) d\mu.$$

В книге [5] дан обзор ряда других важных результатов о свойствах кольца полиадических чисел и функций, определенных на этом кольце.

Отметим роль кольца полиадических чисел в ряде алгебраических задач (подробнее см. [9]).

Следует отметить, что ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \mathbb{Q},$$

могут сходиться не во всех полях $\mathbb{Q}_p$. В случае, когда такой ряд расходится лишь в конечном множестве полей $\mathbb{Q}_p$, мы говорим о *почти полиадических* числах и отождествляем их с элементами прямого произведения всех полей $\mathbb{Q}_p$, кроме упомянутого выше конечного множества.

Можно рассмотреть и прямое произведение полей $\mathbb{K}_v$, где v продолжает p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ на поле $\mathbb{K}$ алгебраических чисел конечной степени $\varkappa$. Если v продолжает p -адическое нормирование, то поле $\mathbb{K}_v$ представляет собой алгебраическое расширение поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ степени $\varkappa_v$ и справедливо равенство $\sum_v \varkappa_v = \varkappa$, где суммирование производится по всем нормированиям v , продолжающим p -адическое нормирование. Мы рассматриваем нормализованные нормирования, для которых $|p|_v = p^{-\varkappa_v/\varkappa}$. Если нормирование v продолжает обычную абсолютную величину, то ему соответствует алгебраически сопряженное поле $\mathbb{K}^{(i)}$ и $\varkappa_v = 1$, если $\mathbb{K}^{(i)}$ — подполе поля действительных чисел, и $\varkappa_v = 2$, если нет. Равенство $\sum_v \varkappa_v = \varkappa$ выполняется и в этом случае.

При этом мы будем говорить о $\mathbb{K}$ -полиадических и соответственно о $\mathbb{K}$ -почти полиадических числах.

2. Алгебраические свойства элементов бесконечных прямых произведений. Глобальные соотношения. Предположим, что $\alpha \in \mathbb{K}$ и что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot \alpha^n$$

сходится в поле $\mathbb{K}_v$ для всех нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p -адическое нормирование, для всех простых чисел p , кроме, возможно, конечного их числа. Как отмечено выше, это позволяет рассматривать этот ряд как элемент бесконечного прямого произведения этих полей $\mathbb{K}_v$. Это прямое произведение имеет естественную структуру кольца, операциям в котором соответствуют операции по каждой координате. Для элемента $\mathbf{a}$ этого прямого произведения обозначаем $\mathbf{a}^{(v)}$ его координату в поле $\mathbb{K}_v$.

Если существует $P(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathbf{a}) = 0$ (иными словами, $P(\mathbf{a}^{(v)}) = 0$ в каждом поле $\mathbb{K}_v$ этого прямого произведения), то говорим, что $\mathbf{a}$ — *алгебраический элемент*. Если элемент $\mathbf{a}$ не является алгебраическим, то его называют *трансцендентным*. Трансцендентность элемента означает, что для любого $P(x)$ — многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$. Назовем элемент $\mathbf{a}$ *бесконечно трансцендентным*, если для любого $P(x)$ — многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел p , для каждого из которых есть нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p -адическое нормирование, такое, что $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$. Элемент $\mathbf{a}$ называется *глобально трансцендентным*, если для любого $P(x)$ — многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$ рассматриваемого прямого произведения.

Примерами глобально трансцендентных чисел служат ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k!,$$

где $\{n_k\}$ — достаточно быстро растущая последовательность натуральных чисел. Более того, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k!}{p_k^{m_k}},$$

в которых p_k — простое число с номером k , а $\{n_k\}$, $\{m_k\}$ — достаточно быстро растущие последовательности натуральных чисел, дают примеры чисел лиувиллевых, следовательно, трансцендентных как в поле $\mathbb{R}$, так и в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Действительно, быстрый рост последовательности $\{n_k\}$ обеспечивает трансцендентность суммы этого ряда в любом поле $\mathbb{Q}_p$, а быстрый рост последовательности $\{m_k\}$ — трансцендентность суммы этого ряда в поле $\mathbb{R}$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности элемента не следует трансцендентность $\mathbf{a}^{(v)}$ хотя бы для одного простого числа p и нормирования v поля $\mathbb{K}$, продолжающего p -адическое

нормирование поля $\mathbb{Q}$. Например, элемент $(1, 2, \dots, n, \dots)$ прямого произведения полей $\mathbb{Q}_p$ (координата которого равна n в поле $\mathbb{Q}_{p_n}$, соответствующем n -му простому числу p_n) бесконечно трансцендентен. Действительно, любой $P(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля, может обратиться в ноль лишь на конечном множестве натуральных чисел.

Для совокупности элементов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ аналогичным образом определяются понятия их алгебраической зависимости, алгебраической независимости, бесконечной алгебраической независимости и глобальной алгебраической независимости. Достаточно вместо многочлена $P(x)$ рассмотреть $P(x_1, \dots, x_m)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля.

Ряд, члены которого — алгебраические числа, сходящийся в различных полях $\mathbb{K}_v$, имеет суммами элементы этих полей $\mathbb{K}_v$. При этом может оказаться, что в различных полях $\mathbb{K}_v$ его суммой являются различные элементы поля $\mathbb{K}$. Например, ряд $(1 - (-15))^{1/2}$ сходится в поле $\mathbb{Q}_3$ к рациональному числу $1/2$, а в поле $\mathbb{Q}_5$ — к числу $-1/2$. Вместе с тем ряд, члены которого — алгебраические числа, сходящийся в различных полях $\mathbb{K}_v$, может иметь в них суммой один и тот же элемент поля $\mathbb{K}$. Например, в любом поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! = -1.$$

Эта ситуация является частным случаем введенного в 1981 г. Э. Бомбьери в [18] понятия глобального (алгебраического) соотношения.

Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ — отличный от нулевого многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, и пусть степенные ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из поля $\mathbb{K}$ и точка $\alpha \in \mathbb{K}$. Соотношение

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = 0 \quad (3)$$

называется *глобальным*, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, в которых сходятся все ряды $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$. Используя данные выше определения, получаем, что глобальное соотношение (3) означает алгебраическую зависимость над полем $\mathbb{K}$ элементов $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ прямого произведения всех полей $\mathbb{K}_v$, в которых сходятся все ряды $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$.

Известное равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! = -1,$$

верное во всех полях $\mathbb{Q}_p$, дает пример определенного выше глобального соотношения при $\alpha = -1$ для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot n! z^n.$$

3. Метод Зигеля—Шидловского и F -ряды. Общие теоремы. Для исследования арифметических свойств значений степенных рядов применяется метод Зигеля—Шидловского в теории трансцендентных чисел (см. [15]). Этот метод применим к широким классам рядов, так называемым E и G -функциям Зигеля. При этом E -функции являются целыми функциями, а G -функции имеют конечный радиус сходимости в поле комплексных чисел.

Естественным шагом стало исследование рядов, имеющих нулевой радиус сходимости в поле комплексных чисел, но имеющих радиусы сходимости, большие 1 в любом поле p -адических чисел. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot z^n. \quad (4)$$

Будем говорить, что этот ряд принадлежит классу $F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, q)$, если:

- (1) все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;

- (2) максимумы абсолютных величин алгебраически сопряженных с числом c_n чисел представляют собой $O(e^{C_1 n})$, $n \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной C_1 ;
- (3) существует такая последовательность натуральных чисел d_n , что при $k = 0, 1, \dots, n$ числа $d_n c_k$ принадлежат кольцу целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ поля $\mathbb{K}$ и $d_n = q^n d_{0,n}$, $q \in \mathbb{N}$, а числа $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не превосходящие $C_2 n$, и для всех таких простых p выполняется неравенство

$$\vartheta_p(d_{0,n}) \leq C_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Из свойства 3 следует, что если простое число p не делит число q , то ряд (4), например, с рациональными коэффициентами c_n , имеет в поле $\mathbb{Q}_p$ радиус сходимости, равный $p^{1/(p-1)} > 1$. Известным примером F -ряда является ряд Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot (-z)^n.$$

Он представляет собой асимптотическое разложение для интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-w/z}}{1+w} dw.$$

Разумеется, если ряд (4) отличен от многочлена, он имеет в поле $\mathbb{C}$ нулевой радиус сходимости. Легко заметить также, что если коэффициенты c_n ряда (4) удовлетворяют перечисленным условиям, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$$

с теми же коэффициентами c_n является G -функцией, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \cdot z^n$$

с теми же коэффициентами c_n является E -функцией в узком смысле.

Сформулированные ниже теоремы представляют собой некоторые аналоги основных теорем А. Б. Шидловского, справедливые для F -рядов.

Теорема 1 (см. [17, теорема 1.1]). Пусть F -ряды $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ линейно независимы над полем $\mathbb{K}(z)$ и составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0}(z) + \sum_{j=1}^m Q_{i,j}(z)y_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

с коэффициентами из поля $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций от z . Пусть $\xi \neq 0, \xi \in \mathbb{K}$ — регулярная точка системы (5). Пусть

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m$$

— ненулевая линейная форма, $h_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, i = 1, \dots, m$. Пусть $H(L) = \max H(h_i)$. Найдется такая эффективно вычисляемая постоянная H_0 , что для любого $H \geq \max(H_0, H(L))$ существуют такие эффективно вычисляемая постоянная C_0 , простое число p , удовлетворяющие неравенствам

$$P_l(H) = l \left(\frac{\ln H}{\ln \ln H} \right) \leq p \leq u \left(\frac{\ln H}{\ln \ln H} \left(1 + \frac{C_0}{\sqrt{\ln \ln H}} \right) \right) = P_u(H)$$

и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, что имеет место неравенство

$$L(\xi) = L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Замечание. Можно также для хотя бы одного $v \in V_1$ установить оценку

$$|L(\xi)|_v \geq H^{-m - \frac{m+3+2mC_5}{\sqrt{\ln \ln H}}}.$$

Теорема 2. Пусть F -ряды $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы (5) и линейно независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$ — регулярная точка системы (5). Пусть

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m -$$

ненулевая линейная форма, $h_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, i = 1, \dots, m$. Тогда существует бесконечное множество таких простых чисел p и нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Иными словами, ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ бесконечно линейно независимы.

Теорема 3. Пусть F -ряды $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы (5) и алгебраически независимы над полем $\mathbb{K}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$ — регулярная точка системы (5). Пусть $P(y_1, \dots, y_m)$ — ненулевой многочлен с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$. Тогда существует бесконечное множество таких простых чисел p и нормирований v поля $\mathbb{K}$, продолжающих p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, что в поле $\mathbb{K}_v$

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Иными словами, ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ бесконечно алгебраически независимы.

4. Приложения общих теорем. Сформулированные теоремы имеют приложения к обобщенным гипергеометрическим рядам. Символ Похгаммера определен равенствами

$$(a)_0 = 1, \quad a_n = a(a+1) \dots (a+n-1), \quad n \geq 1.$$

Для множества действительных чисел $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s\}$, относительно которых предполагаем, что числа $\beta_1, \dots, \beta_s$ — нецелые неположительные, принято обозначать символом

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_s \end{matrix}; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n n!} z^n \quad (6)$$

так называемый обобщенный гипергеометрический ряд. Можно рассматривать несколько более общие ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n. \quad (7)$$

Ряды (6) и (7) относятся к так называемым рядам Жевре порядков $s+1-r$ и $s-r$ соответственно.

Если $r-s < 0$, то рассматриваемый ряд (7) представляет собой целую функцию (ряд (6) представляет целую функцию при $r-s \leq 0$). К этим случаям относятся показательная функция, функции Бесселя, функции Куммера и большое количество других, важных в математике функций. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s$ они входят в класс E -функций Зигеля, и к исследованию их значений применим известный метод Зигеля—Шидловского в теории трансцендентных чисел (см. [5]). Применению этого метода к гипергеометрическим E -функциям посвящены работы В. Х. Салихова [6–8], в которых получено близкое к полному решение проблемы. При $r-s = 0$ ряд (4) имеет конечный радиус сходимости (ряд (3) имеет конечный радиус сходимости при $r-s = -1$). К таким функциям относятся логарифмическая функция, гипергеометрическая функция Гаусса, многие алгебраические функции, неполные эллиптические интегралы и др. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s$ они входят в класс G -функций Зигеля, и исследованию их посвящены работы А. И. Галочкина [1], Г. В. Чудновского [8], Э. Бомбьери [18], И. Андре [16] и др.

Если же $r-s > 0$, то ряд (7), отличный от многочлена, имеет нулевой радиус сходимости в поле $\mathbb{C}$. (Ряд (6) имеет нулевой радиус сходимости при $r-s \geq 0$). В этом случае получаются F -ряды. Исследованию свойств таких рядов посвящены, например, работы [2, 10, 12, 13]. В случае, когда среди параметров рассматриваемых гипергеометрических рядов содержатся иррациональные алгебраические числа, используя аппроксимации Эрмита—Паде, приведенные в [3], удастся доказать бесконечную линейную независимость значений таких рядов в алгебраических точках (см. [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А. И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса// Мат. сб. — 1974. — 95 (137), № 3 (11). — С. 396–417.
2. Матвеев В. Ю. Алгебраическая независимость некоторых почти полиадических рядов// Чебышев. сб. — 17, № 3. — С. 156–167.
3. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита—Паде обобщенных гипергеометрических функций// Мат. сб. — 1994. — 185, № 3. — С. 39–72.
4. Новоселов Е. В. Об интегрировании на одном бикompактном кольце и его приложениях к теории чисел// Изв. вузов. Сер. мат. — 1961. — 3 (22). — С. 66–79.
5. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.
6. Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E -функций// Докл. АН СССР. — 1989. — 307, № 2. — С. 284–286.
7. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E -функций// Acta Arithm. — 1990. — 53. — С. 453–471.
8. Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E -функций// Мат. сб. — 1990. — 181, № 2. — С. 189–211.
9. Фомин А. А. Числовые кольца и модули над ними. — М.: Прометей, 2013.
10. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами// Докл. РАН. — 2014. — 459, № 6. — С. 677–679.
11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами// Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — 78, № 6. — С. 193–210.
12. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами// Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — 81, № 2. — С. 215–232.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических F -рядов// Докл. РАН. — 2018. — 483, № 3. — С. 252–254.
14. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлении натуральных чисел// Чебышев. сб. — 2013. — 14, № 1. — С. 75–86.
15. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.
16. Andre Y. G -functions and geometry// in: Asp. Math. — Wiesbaden: Vieweg, 1989. — Vol. 13.
17. Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series// Ann. Fac. Sci. Toulouse. — 2004. — 13, № 2. — P. 241–260.
18. Bombieri E. On G -functions// in: Recent Progress in Analytic Number Theory. — London: Academic Press, 1981. — P. 1–68.
19. Chudnovsky G. V. On applications of Diophantine approximations// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1985. — 81. — P. 7261–7265.

Чирский Владимир Григорьевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

Московский педагогический государственный университет

E-mail: vgchirskii@yandex.ru