Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Юденкова, Бесконечная линейная независимость значений обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами в полиадических точках, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 88–93

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-88-93>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:49:29

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 179 (2020). С. 88–93
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-179-88-93

УДК 511.36

БЕСКОНЕЧНАЯ ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ТОЧКАХ

© 2020 г. Е. Ю. ЮДЕНКОВА

Аннотация. Работа посвящена доказательству бесконечной линейной независимости в точках, допускающих высокие порядки приближения алгебраическими числами в неархимедовски нормированных полях.

Ключевые слова: гипергеометрический ряд, иррациональный параметр.

INFINITE LINEAR INDEPENDENCE OF VALUES OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC SERIES WITH IRRATIONAL PARAMETERS AT POLYADIC POINTS

© 2020 Е. YU. YUDENKOVA

ABSTRACT. The paper is devoted to the proof of infinite linear independence at points that admit high-order approximations by algebraic numbers in non-Archimedean normalized fields.

Keywords and phrases: hypergeometric series, irrational parameter.

AMS Subject Classification: 33C20

Обобщенные гипергеометрические ряды с рациональными параметрами, в зависимости от их вида, входят либо в классы E -функций или G -функций, либо в класс F -рядов. Арифметическим свойствам E -функций посвящены работы [9, 11]. В них приведена обширная библиография. Арифметические свойства F -рядов описаны в [2–8, 10].

Введем обозначение

$$F(\mu_1, \dots, \mu_m, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_n \cdots (\mu_m)_n}{n!} z^n, \quad (1)$$

где

$$(\mu)_0 = 1, \quad (\mu)_n = \mu(\mu+1) \cdots (\mu+n-1), \quad n \geq 1,$$

— символ Похгаммера. Положим

$$\begin{aligned} f_0(z) &= F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, z), \\ f_1(z) &= F(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, z), \\ &\dots \\ f_{m-1}(z) &= F(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_{m-1} + 1, \alpha_m, z). \end{aligned} \quad (2)$$

Считается, что $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}$ — целые числа из поля $\mathbb{K}$, отличные от 0 и отрицательных целых чисел. Пусть $\alpha_{m-1} = \alpha_m = 1$.

Для любого нормирования v поля $\mathbb{K}$ и любого целого числа z из поля $\mathbb{K}$ все ряды (2) — целые числа из поля $\mathbb{K}$.

В [4] с использованием аппроксимаций Эрмита—Паде из [1] установлена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}, h_0, \dots, h_{m-1} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и среди чисел $h_0, \dots, h_{m-1}$ есть отличные от 0, где $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ — кольцо целых чисел поля $\mathbb{K}$.

Тогда существует бесконечное множество нормирований v поля $\mathbb{K}$ таких, что в кольце $\mathbb{K}_v$

$$|h_0 f_0(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi)|_v \neq 0. \quad (3)$$

Цель настоящей работы — доказать аналогичную теорему для точки ξ , хорошо приближаемой целыми числами из $\mathbb{K}$.

Пусть

$$\xi = \sum_{r=0}^{\infty} \theta_r, \quad (4)$$

$\theta_r \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, причем пусть этот ряд сходится во всех $\mathbb{K}_v$, $v \in V_0$ (V_0 обозначает множество всех неархимедовых нормирований поля $\mathbb{K}$). Пусть $\epsilon > 0$ и пусть существует бесконечное множество A таких целых чисел a из поля $\mathbb{K}$, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих условию

$$p \leq m \exp(\ln^{(1+\epsilon)} |\bar{a}|) \quad (5)$$

(здесь $|\bar{a}|$ обозначает максимум модулей сопряженных с $a \in \mathbb{K}$ чисел) и любого нормирования v , продолжающего p -адическое нормирование, при некотором $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$|\xi - a|_v < \exp \left(- (m - 1 + \delta) \exp \left(\ln^{(1+\epsilon)} |\bar{a}| \right) \ln^{(1+\epsilon)} |\bar{a}| \right). \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}, h_0, \dots, h_{m-1} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и среди чисел $h_0, \dots, h_{m-1}$ есть отличные от 0. Пусть точки ξ вида (4) удовлетворяют условиям (5), (6). Тогда существует бесконечное множество таких нормирований v поля $\mathbb{K}$, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство (3).

Доказательство. В доказательстве теоремы используются леммы из [4]. □

Пусть c_i — положительные постоянные, S_i — натуральные числа. Пусть N — натуральное число. Определим числа r, s, t, l условиями

$$N = ms + r = (m - 1)t + l, \quad 1 \leq r \leq m, \quad 1 \leq l \leq m - 1; \quad (7)$$

при этом

$$s = \left\lfloor \frac{N - 1}{m} \right\rfloor, \quad t = \left\lfloor \frac{N - 1}{m - 1} \right\rfloor. \quad (8)$$

Положим

$$\alpha_N = \alpha_r + s, \quad (9)$$

$$f_N(z) = F(\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+m}, z), \quad (10)$$

$$u_N(z) = \alpha_1 \dots \alpha_N z^t f_N(z). \quad (11)$$

Лемма 1. При любом натуральном N существуют такие многочлены $P_{N,0}(z), \dots, P_{N,m-1}(z)$, что

$$u_N(z) = P_{N,0}(z)u_0(z) + \dots + P_{N,m-1}(z)u_{m-1}(z). \quad (12)$$

При этом степени многочленов $P_{N,0}(z), \dots, P_{N,m-1}(z)$ не превосходят числа $t - s$, ряды (11) линейно независимы над $\mathbb{K}(z)$, и выполняются рекуррентные соотношения

$$u_{N+m}(z) = u_{N+1}(z) - \alpha_{N+1}u_N(z), \quad (13)$$

если $N = 0$ или $N \geq 1$ и N не делится на $m - 1$,

$$u_{N+m}(z) = u_{N+1}(z) - \alpha_{N+1}zu_N(z), \quad (14)$$

если $N \geq 1$ и N делится на $m-1$, и для любого $i = 0, 1, \dots, m-1$

$$P_{N+m,i}(z) = P_{N+1,i}(z) - \alpha_{N+1}P_{N,i}(z), \quad (15)$$

если $N = 0$ или $N \geq 1$ и N не делится на $m-1$,

$$P_{N+m,i}(z) = P_{N+1,i}(z) - \alpha_{N+1}zP_{N,i}(z), \quad (16)$$

если $N \geq 1$ и N делится на $m-1$. При этом для всех неотрицательных целых значений N имеет место равенство

$$\Delta_N(z) = (-1)^{mN} \alpha_1 \dots \alpha_N z^t, \quad (17)$$

где

$$\Delta_N(z) = |P_{N+j,i}|_{i,j=0,\dots,m-1}. \quad (18)$$

Для дальнейшего будет полезным понятие размера многочлена $P(z)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$. Эта величина определяется как наибольший из модулей всех чисел, сопряженных с коэффициентами многочлена в поле $\mathbb{K}$, и обозначается $|\overline{P(z)}|$. Установим простые свойства размера многочлена:

$$|\overline{P_1(z) + P_2(z)}| \leq |\overline{P_1(z)}| |\overline{P_2(z)}| \quad (19)$$

и для $\alpha \in \mathbb{K}$

$$|\overline{\alpha P(z)}| \leq |\overline{\alpha}| |\overline{P(z)}|. \quad (20)$$

Неравенства (19) и (20) сразу следуют из того факта, что для чисел γ, δ из поля $\mathbb{K}$ любое число, сопряженное с суммой этих чисел, является суммой сопряженных с ними чисел, а любое число, сопряженное с произведением этих чисел, является произведением сопряженных с ними чисел.

Введем обозначение

$$c_0 = \left[\max(|\overline{\alpha_1}|, \dots, |\overline{\alpha_m}|) \right] + 1. \quad (21)$$

Поскольку $\alpha_{m-1} = 1$, то $c_0 \geq 2$.

Лемма 2. В условиях теоремы для $N = ms + r$, $1 \leq r \leq m$, и для любого $t = 0, \dots, q$ имеет место неравенство

$$|\overline{P_{N,1}(z)}| \leq c_0^N (c_0 + 1) \dots (c_0 + s). \quad (22)$$

Продолжим доказательство теоремы. В любом поле $\mathbb{K}$ рассмотрим элемент этого поля, имеющий вид

$$L(\xi) = h_1 f_0(\xi) + \dots + h_m f_{m-1}(\xi). \quad (23)$$

Умножим его на $\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}$ и получим (с учетом равенств (11)) элемент

$$L^* = b_0 u_0(\xi) + \dots + b_{m-1} u_{m-1}(\xi), \quad (24)$$

представляющий собой линейную форму от $u_0(\xi), \dots, u_{m-1}(\xi)$ с коэффициентами, являющимися целыми числами из поля $\mathbb{K}$. Поскольку $L(\xi) \neq 0$, полученная форма (24) также является ненулевой. Обозначим

$$H = \max_{i=0,\dots,m-1} |\overline{b_i}|. \quad (25)$$

Рассмотрим при некотором натуральном N линейные формы

$$u_N(\xi), \dots, u_{N+m-1}(\xi) \quad (26)$$

от $u_0(\xi), \dots, u_{m-1}(\xi)$, определенные в (12). Определитель матрицы из коэффициентов $\Delta_N(\xi)$ отличен от нуля ввиду равенства (17) и условий теоремы. Поэтому среди форм (26) существуют $m-1$ форм, линейно независимых с формой L^* . Следовательно, определитель этой совокупности форм

$$\Delta_N^*(\xi) = \begin{vmatrix} b_0 & \dots & b_{m-1} \\ P_{N,0}(\xi) & \dots & P_{N,m-1}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{N+m-1,0}(\xi) & \dots & P_{N+m-1,m-1}(\xi) \end{vmatrix}, \quad (27)$$

где

$$N_i \in \{N, \dots, N+m-1\} \quad (28)$$

отличен от нуля, т.е. $\Delta_N^*(\xi) \neq 0$. Величину (27) можно рассматривать как значение многочлена $\Delta_N^*(z)$ в точке $z = \xi$. $\square$

Лемма 3. При $s \geq S_0$ имеет место неравенство

$$\prod_{v \in V_0} |\Delta_N^*(z)| \geq H^{-1} e^{-(m-1)s \ln s - c_1 s}, \quad (29)$$

где произведение в левой части взято по всем неархимедовым нормированиям поля $\mathbb{K}$.

Доказательство. Именно в этой лемме требуются изменения в рассуждениях из [4]. Доказательство, до определенного момента, совпадает с доказательством леммы 3 из [4]. Из равенства (27) следует, что $\Delta_N^*(\xi)$ — многочлен в коэффициентах, являющимися целыми числами из поля $\mathbb{K}$. Кроме того, ввиду (28) имеем $N_i \leq N + m - 1$. Пусть $\tilde{s}$ и $\tilde{t}$ определены равенствами

$$N + m - 1 = m\tilde{s} + \tilde{r} = (m - 1)\tilde{t} + \tilde{l}.$$

При этом

$$\tilde{s} = \left\lfloor \frac{N + m - 2}{m} \right\rfloor, \quad \tilde{t} = \left\lfloor \frac{N + m - 2}{m - 1} \right\rfloor. \quad (30)$$

Из соотношений (9) и (30) следует, что $s \leq \tilde{s} \leq s + 1$, а $\tilde{t} = t + 1$. Поэтому, используя неравенство (22), с заменой s на $s + 1$ получаем

$$|\overline{P_{N_i, j}(z)}| \leq c_0^{N+m-1} (c_0 + 1) \dots (c_0 + s + 1), \quad j = 0, \dots, m - 1,$$

откуда с учетом (25) имеем

$$|\overline{\Delta_N^*(z)}| \leq m! H c_0^{(m-1)(N+m-1)} ((c_0 + 1) \dots (c_0 + s))^{m-1}. \quad (31)$$

Представим произведение $(c_0 + 1) \dots (c_0 + s + 1)$ в виде

$$(c_0 + 1) \dots (c_0 + s + 1) = \frac{\Gamma(c_0 + s + 2)}{\Gamma(c_0 + 1)}, \quad (32)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. $\square$

Лемма 4. Для любой постоянной величины a и любого $\delta > 0$ при $|s| \rightarrow \infty$ равномерно при $-\pi + \delta \leq \arg s \leq \pi - \delta$ имеет место равенство

$$\ln \Gamma(s + a) = \left(s + a - \frac{1}{2} \right) \ln s - s + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{|s|}\right). \quad (33)$$

Из (32) и (33) сразу следует, что при $s \rightarrow \infty$

$$(c_0 + 1) \dots (c_0 + s + 1) = \exp(s \ln s + O(s)). \quad (34)$$

Из неравенства (31) и равенства (34) вытекает, что при $s > S_1$ с некоторой постоянной c_2

$$|\overline{\Delta_N^*(z)}| \leq H \exp((m - 1)s \ln s + c_2 s). \quad (35)$$

Далее, согласно (13) степень многочлена $\Delta_N^*(z)$ не превосходит числа

$$\begin{aligned} (m - 1)(\tilde{t} - \tilde{s}) &\leq (m - 1) \left(\left\lfloor \frac{N + m - 2}{m - 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N - 1}{m} \right\rfloor \right) \\ &\leq (m - 1) \left(\frac{N + m - 2}{m - 1} - \frac{N - 1}{m} + 1 \right) \leq \frac{N}{m} + 2(m - 1) \leq s + 2(m - 1). \end{aligned} \quad (36)$$

Это означает, что для любого $a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$

$$|\overline{\Delta_N^*(a)}| \leq H \exp((m - 1)s \ln s + c_2 s) |\overline{a}|^{s+2(m-1)}$$

согласно (36).

Следовательно, для любого v

$$|\Delta_N^*(a)|_v \geq \frac{1}{|\overline{\Delta_N^*(a)}|} \geq H^{-1} \exp(-((m - 1)s \ln s + c_2 s)) |\overline{a}|^{-s-2(m-1)}.$$

Докажем, что для достаточно большого S выполняется равенство

$$|\Delta_N^*(a)|_v = |\Delta_N^*(\xi)|_v.$$

Для этого заметим, что

$$\Delta_N^*(\xi) = \Delta_N^*(a) + (\xi - a)\Delta_0(\xi, a), \quad (37)$$

где $\Delta_0(\xi, a)$ — многочлен от ξ и a с целыми коэффициентами из поля $\mathbb{K}$.

Во всех рассматриваемых полях $\mathbb{K}$ имеем

$$|\xi - a|_v |\Delta_0(\xi, a)|_v = |\xi - a|_v \leq |(\xi - a)\Delta_0(\xi, a)|_v < \exp(-(m-1+\delta) \exp(\ln^{1+\epsilon} |\bar{a}|)) \ln^{1+\epsilon} |\bar{a}|.$$

Выберем параметры s и a так, чтобы оценки сверху для $|\xi - a|_v$ стала меньше, чем оценка сверху для $|\Delta_N^*(a)|_v$. Тогда из равенства (37) будет следовать, что

$$|\Delta_N^*(\xi)|_v = |\Delta_N^*(a)|_v.$$

Для этого положим $s = \lceil \exp(\ln^{1+\epsilon} |\bar{a}|) \rceil + 1$; тогда

$$\ln^{1+\epsilon} |\bar{a}| \leq \ln s \leq \ln^{1+\epsilon} |\bar{a}| + 1. \quad (38)$$

Докажем, что при указанном выборе s при $s \geq S_0$ (что означает, что выбрано достаточно большое значение $|\bar{a}|$)

$$\begin{aligned} |\Delta_N^*(a)|_v &\geq H^{-1} \exp(-(m-1)s \ln s + c_2 s) |\bar{a}|^{-s-2(m-1)} > \\ &> \exp(-(m-1+\delta) \exp(\ln^{1+\epsilon} |\bar{a}|) \ln^{1+\epsilon} |\bar{a}|) > |\xi - a|_v. \end{aligned}$$

Эти неравенства будут следовать из неравенства

$$\ln H + (m-1)s \ln s - c_2 s + (s + 2(m-1)) \ln |\bar{a}| < (m-1+\delta) \exp(\ln^{1+\epsilon} |\bar{a}|) \ln^{1+\epsilon} |\bar{a}|.$$

С учетом соотношений (38) последнее неравенство вытекает из неравенства

$$\ln H + c_2 s + (s + 2(m-1)) \ln^{s/(1+\epsilon)} < \delta s \ln s,$$

справедливого при $s \geq S_0$. Поэтому из (35) и (36) при $s > S_2$ с некоторой постоянной c_3 получаем неравенство

$$|\overline{\Delta_N^*(\xi)}| \leq H \exp((m-1)s \ln s + c_3 s). \quad (39)$$

Поскольку

$$\prod_{v \in V_\infty} |\overline{\Delta_N^*(\xi)}|_v \leq \prod_{v \in V_\infty} |\overline{\Delta_N^*(\xi)}|^{\kappa_v/\kappa} = |\overline{\Delta_N^*(\xi)}|, \quad (40)$$

из неравенства (39) следует неравенство (29) с соответствующими S_0, c_1 . Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $v \in V_0$, $|\xi|_v \leq 1$. Тогда существует такое число i , $i \in \{0, \dots, m-1\}$, что $|f_i(\xi)|_v = 1$ и $|u_i(\xi)|_v = 1$.

Дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы из [4] и поэтому опущено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита—Паде обобщенных гипергеометрических функций // Мат. сб. — 1994. — 185, № 3. — С. 39–72.
2. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. — 1990. — 48, № 2. — С. 123–127.
3. Чирский В. Г. Об алгебраических соотношениях в неархимедовски нормированных полях // Функци. анал. прилож. — 1992. — 26, № 2. — С. 41–50.
4. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — 78, № 6. — С. 193–210.
5. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Докл. РАН. — 2014. — 459, № 6. — С. 677–679.
6. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестн. Мос. Ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2015. — № 1. — С. 59–61.

7. *Чирский В. Г.* Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами// Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — 81, № 2. — С. 215–232.
8. *Чирский В. Г.* Арифметические свойства обобщенных гипергеометрических F -рядов// Докл. РАН. — 2018. — 483, № 3. — С. 252–254.
9. *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.
10. *Bertrand D., Chiskii V., Yebbou J.* Effective estimates for global relations on Euler-type series// Ann. Fac. Sci. Toulouse. — 2004. — 13, № 2. — P. 241–260.
11. *Chirskii V. G.* Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to their solutions in works of Yu. V. Nesterenko// Russ. J. Math. Phys. — 2017. — 24, № 2. — P. 153–171.

Юденкова Екатерина Юрьевна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: yudenkovaey@gmail.com