Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, И. А. Александрова, И. И. Цыганок, О симметричных тензорах Киллинга и тензорах Кодацци рангов $p \geq 2$, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 179, 94–120

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-179-94-120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:20:08

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 179 (2020). С. 94–120
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-179-94-120

УДК 514.764.212

О СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРАХ КИЛЛИНГА И ТЕНЗОРАХ КОДАЦЦИ РАНГОВ $p \geq 2$

© 2020 г. С. Е. СТЕПАНОВ, И. А. АЛЕКСАНДРОВА, И. И. ЦЫГАНОК

Аннотация. Статья посвящена геометрии симметричных тензоров Киллинга и тензоров Кодаци рангов $p \geq 2$ и включает кроме полученных в ней новых результатов обзор сведений по данной тематике из более ранних работ.

Ключевые слова: тензор Киллинга, тензор Кодаци, геодезическая, риманово многообразие, тензор кривизны.

ON SYMMETRIC KILLING TENSORS AND CODAZZI TENSORS OF RANKS $p \geq 2$

© 2020 S. E. STEPANOV, I. A. ALEKSANDROVA, I. I. TSYGANOK

ABSTRACT. This paper is devoted to the geometry of symmetric Killing tensors and Codazzi tensors of ranks $p \geq 2$ and includes, in addition to the new results obtained in this paper, a survey on this topic from earlier works.

Keywords and phrases: Killing tensor, Codazzi tensor, geodesic, Riemannian manifold, curvature tensor.

AMS Subject Classification: 53C22

1. Введение. Интерес к симметричным тензорам Киллинга ранга $p \geq 2$ или, иначе, p -тензорам Киллинга, проявился давно благодаря их связи с квадратичными первыми интегралами для геодезических (см. [24, с. 157–161]), с разделением переменных в различных дифференциальных уравнениях в частных производных, например, в уравнениях Гамильтона—Якоби (см. [7, с. 340]) и при исследовании высших симметрий дифференциальных уравнений математической физики (см. [10, 41]). Подобные тензоры активно изучались, как правило, в статьях и монографиях физической направленности (см. [10, с. 339], [32, 66, 67, 70] и др.), но в последнее время значительно вырос интерес к изучению римановой геометрии симметричных p -тензоров Киллинга (см., например, [4, 21, 37, 38, 70]).

В свою очередь, тензоры Кодаци естественным образом возникают на римановых многообразиях с гармоническим тензором кривизны или гармоническим тензором Вейля; классическим примером тензора Кодаци служит вторая фундаментальная форма гиперповерхности в римановом многообразии постоянной кривизны (см. [1, с. 590]). При этом сведения о локальной и глобальной римановых геометриях p -тензоров ($p \geq 2$) и тензоров Кодаци содержится в многочисленных работах. Приведем далеко не полный список литературы по данной тематике: [42], [11, с. 169], [1, с. 590–598], [33, 45, 46]. Последние по времени результаты о геометрии тензоров Кодаци опубликованы в [31, 48].

В настоящей статье мы изучим локальную и глобальную геометрии симметричных тензоров Киллинга и тензоров Кодаци рангов $p \geq 2$. Причем для исследования римановой «геометрии

в целом» симметричных p -тензоров Киллинга и p -тензоров Кодацци мы воспользуемся «техникой Бохнера» (см. [50, с. 333–364], [51, 72]). В частности, нами будет привлечен *лапласиан Сампсона* Δ_S , действующий на симметрических p -формах риманова многообразия (см. [56]). Лапласиан является аналогом известного *лапласиана Ходжа—де Рама* Δ_H , определяемого на внешних дифференциальных p -формах (см., например, [50, с. 335]), и встречается во множестве статей и монографий (см., например, [1, 28, 38, 67]). В отличие от лапласиана Ходжа—де Рама свойства лапласиана Сампсона почти не изучались, а исключение здесь составляют лишь работы авторов данной статьи (см. [25, 61, 65]). В свою очередь, к изучению римановой «геометрии в целом» тензоров Кодацци ранга $p = 2$ нами будет привлечен также незаслуженно обделенный вниманием *лапласиан Бургиньона* (см. [29]). Лапласиан определяется на симметрических 2-формах и является частным видом хорошо известного лапласиана Лихнеровича (см., например, [1, с. 79]). Сведения о нем можно найти в монографиях [1] и [2]. Поэтому настоящая статья, кроме своего прямого назначения, изучения геометрии тензоров Киллинга и Кодацци, продемонстрирует новые возможности лапласианов Сампсона и Бургиньона.

2. Обобщенные градиенты на симметричных p -формах на многообразии с линейной связностью. Пусть M — n -мерное ($n > 1$) многообразие класса C^∞ с линейной связностью ∇ без кручения и $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ — вещественная линейная группа, действующей в слоях тензорных расслоений на M .

Пусть $\mathrm{Diff}(S^p M, T^* M \otimes S^p M) — C^\infty M$ -модуль линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$D: C^\infty S^p M \rightarrow C^\infty(T^* M \otimes S^p M)$$

на пространстве $C^\infty M$ -сечений $C^\infty S^p M$ расслоения симметричных дифференциальных p -форм $\phi \in C^\infty S^p M$ на M .

Стандартным слоем расслоения $T^* M \otimes S^p M$ служит тензорное пространство $T_x^* M \otimes S^p(T_x^* M)$ для n -мерного ($n > 1$) вещественного кокасательного пространства $T_x^* M$ для произвольной точки $x \in M$. Рассмотрим $T_x^* M$ как n -мерное векторное пространство V со структурной группой $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Пусть $S^p V$ обозначает p -ю симметрическую степень сопряженного V пространства V^* . Будем рассматривать тензорное пространство $T_x^* M \otimes S^p(T_x^* M)$ как пространство представлений $V^* \otimes S^p V$ линейной группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ или, иначе, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ -модуль. Зададим эндоморфизм

$$S^{p+1}: V^* \otimes S^p V \rightarrow S^{p+1} V \subset V^* \otimes S^p V,$$

называемый *симметризатором Юнга*, следующими равенствами:

$$(S^{p+1} \bar{\phi})_{i_0 i_1 \dots i_{p-1} i_p} = \bar{\phi}_{(i_0 i_1 \dots i_{p-1} i_p)} = \frac{1}{(p+1)!} (\bar{\phi}_{i_0 i_1 \dots i_{p-1} i_p} + \bar{\phi}_{i_1 \dots i_{p-1} i_p i_0} + \dots + \bar{\phi}_{i_p i_0 i_1 \dots i_{p-1}})$$

для компонент $\bar{\phi}_{i_0 i_1 \dots i_{p-1} i_p} = \bar{\phi}(e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ произвольного тензора $\bar{\phi} \in V^* \otimes S^p V$ найденных в произвольном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства V . Очевидно, что эндоморфизм S^{p+1} является $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ -инвариантным и что

$$S^{p+1}(S^{p+1}(\phi)) = S^{p+1}(\phi),$$

т.е. S^{p+1} — идемпотент в $V^* \otimes S^p V$. Поэтому имеет место $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ -инвариантное разложение пространства $V^* \otimes S^p V$ в прямую сумму

$$V^* \otimes S^p V = \mathrm{Im} S^{p+1} \oplus \mathrm{Ker} S^{p+1},$$

где первая компонента $\mathrm{Im} S^{p+1} = S^{p+1} V$, а вторая $\mathrm{Ker} S^{p+1} = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - S^{p+1})$ состоит из тензоров ψ вида $\psi = \bar{\phi} - S^{p+1} \bar{\phi}$. Первое слагаемое разложения $S^{p+1} V$ является неприводимым $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ -модулем. Поскольку для нахождения $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимых подпространств в $S^{p+1} V$ надо составить список из всех правильно заполненных $(n, p+1)$ -схем Юнга (см. [9, с. 177–178]), который в данном случае состоит только из одной $(n, p+1)$ -схемы вида Следовательно, других $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ -

1	2	...	p	$p+1$
---	---	-----	-----	-------

неприводимых подпространств в $S^{p+1} V$, отличных от самого $S^{p+1} V$, не существует.

Далее определим, какие веса относительно максимального тора (диагональные матрицы) имеют элементы ядра $\text{Ker } S^{p+1}$. Для этого разложим на весовые пространства произведение $V^* \otimes S^p V$, где весовыми векторами будут тензоры вида

$$\bar{\phi}_{k,i_1,\dots,i_l}^{(l,j_1,\dots,j_l)} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = k \text{ и } i_1, \dots, i_l \text{ — перестановка набора } j_1, \dots, j_l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Приведенный выше тензор имеет вес $\text{diag}(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_k t_{i_1} \dots t_{i_p}$. Тогда вес, максимальный относительно порядка доминирования

$$\lambda \geq \mu \iff \forall m : \sum_{i=1}^m \lambda_i \geq \sum_{i=1}^m \mu_i,$$

имеет тензор $\bar{\phi}^{(2,1,\dots,1)} \neq 0$, так как $\bar{\phi}^{(1,1,\dots,1)} = 0$. Вес этого ненулевого вектора равен $(p, 1, 0, \dots, 0)$. Откуда следует, что $\text{Ker } S^{p+1} \cong V((p, 1, 0, \dots, 0))$. Поскольку модуль $S^{p+1}V$ является $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимым, то и разложение (7.4) будет $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимым. В результате справедливо поточечно $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимое разложение расслоения

$$T^*M \otimes S^p M = S^{p+1}M \oplus \text{Ker } S^{p+1}. \quad (2.1)$$

В соответствии с концепцией Ж.-П. Бургиньона (см. [2, с. 262–263]) оператор $D \in \text{Diff}(S^p M, T^*M \otimes S^p M)$ назовем *фундаментальным*, если его символ (относительно связности ∇) является проектором на поточечно $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимое подрасслоение расслоения $T^*M \otimes S^p M$. На основании сказанного выше заключаем, что существуют только два фундаментальных дифференциальных оператора, определенных на пространстве сечений $C^\infty S^p M$ расслоения $S^p M$. Найдем их.

Относительно локальной системы координат $x^1, \dots, x^n$ многообразия M форма $\phi \in C^\infty S^p M$ имеет представление

$$\phi = \frac{1}{p!} \phi_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \circ \dots \circ dx^{i_p}.$$

Определим $\mathbb{R}$ -линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\delta^* : C^\infty S^p M \rightarrow C^\infty S^{p+1} M, \quad \delta^* \phi = \frac{1}{(p+1)!} (\nabla_k \phi_{i_1 \dots i_{p-1} i_p} + \dots + \nabla_{i_p} \phi_{i_1 \dots i_{p-1} k}) dx^k \circ dx^{i_1} \circ \dots \circ dx^{i_{p-1}} \circ dx^{i_p}, \quad (2.2)$$

где полагаем

$$\delta^* \phi_{k i_1 \dots i_{p-1} i_p} := \nabla_k \phi_{i_1 \dots i_{p-1} i_p} + \dots + \nabla_{i_p} \phi_{i_1 \dots i_{p-1} k}. \quad (2.3)$$

Значение на $\theta \in C^\infty T^*M$ символа $\sigma(\delta^*)$ оператора δ^* есть гомоморфизм по закону

$$\sigma(\delta^*)\theta : \phi \in C^\infty S^p M \rightarrow \theta \circ \phi \in C^\infty S^{p+1} M$$

для симметрического умножения $\circ$, определяемого на произвольных формах $\phi \in C^\infty S^p M$ и $\phi' \in C^\infty S^q M$ формулой

$$\phi \circ \phi' = S^{p+q}(\phi \otimes \phi').$$

Поэтому $D_1 = (p+1)^{-1} \delta^*$ — это первый фундаментальный оператор. Он является симметризацией ковариантной производной.

Рассмотрим далее оператор вида

$$D_2 = \nabla - (p+1)^{-1} \delta^*.$$

Тогда значение на $\theta \in C^\infty T^*M$ символа $\sigma(D_2)$ есть гомоморфизм по закону

$$\sigma(D_2)\theta : \phi \in C^\infty S^p M \rightarrow (\theta \otimes \phi - \theta \circ \phi) \in C^\infty \text{Ker } S^{p+1}.$$

Следовательно, вторым фундаментальным оператором будет D_2 .

Для произвольной p -формы $\phi \in C^\infty S^p M$ справедливо $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимое разложение ее ковариантной производной

$$\nabla \phi = D_1 \phi + D_2 \phi.$$

Тогда в соответствии с концепцией Стейна—Вейсса (см. [58]) найденные операторы D_1 и D_2 являются также и обобщенными градиентами на пространстве симметричных дифференциальных p -форм, поскольку $D_1\phi$ и $D_2\phi$ являются $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимым слагаемыми в разложении $\nabla\phi$ произвольной p -формы $\phi \in C^\infty S^p M$. Доказана следующая теорема (см. также [19]).

Теорема 2.1. Пусть M — n -мерное ($n > 1$) многообразие класса C^∞ с линейной связностью ∇ без кручения и $S^p M$ — расслоения симметричных дифференциальных p -форм на M . Существуют два фундаментальных дифференциальных оператора первого порядка

$$D_1 = \frac{1}{p+1}\delta^*, \quad D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}\delta^*$$

или, что равносильно, два обобщенных $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -градиента на пространстве сечений $C^\infty S^p M$ расслоения $S^p M$ на M .

3. Локальная эквиаффинная геометрия Киллинга и Кодаци рангов $p \geq 2$. Ядром фундаментального дифференциального оператора (обобщенного градиента) $D_1 = \frac{1}{p+1}\delta^*$ служат такие p -формы $\phi \in C^\infty S^p M$, что $S^{p+1}(\nabla\phi) = 0$.

Непосредственно проверяется, что для произвольного симметрического p -тензора Киллинга ϕ на многообразии M с линейной связностью ∇ без кручения вдоль каждой геодезической линии $\gamma = \gamma(t)$ выполняется равенство $\phi(X, \dots, X) = \text{const}$ для $X = d\gamma/dt$; если в качестве $t \in J \subset \mathbb{R}$ выбран канонический или, что то же самое, аффинный параметр, то $\nabla_X X = 0$ (см. [7, с. 340], [11, с. 145], [23, с. 120]). В этом случае говорят, что уравнения геодезических допускают первый интеграл p -го порядка.

Замечание. Приведенное определение имеет место (см. [7, с. 340], [40], [24, с. 158]) для псевдориманова многообразия (M, g) со связностью Леви-Чивиты ∇ и заимствовано нами.

Обозначим через $K^p(M, \mathbb{R})$ пространство p -тензоров Киллинга и через

$$K(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} K^p(M, \mathbb{R})$$

— пространство всех тензоров Киллинга на многообразии M с линейной связностью ∇ без кручения. Нетрудно проверить, что

$$\delta^*(\phi \circ \phi') = (\delta^*\phi) \circ \phi' + \phi \circ (\delta^*\phi')$$

для произвольных форм $\phi \in C^\infty S^p M$ и $\phi' \in C^\infty S^q M$ (см. также [19]). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Пространство всех тензоров Киллинга $K(M)$ на многообразии M с линейной связностью ∇ без кручения является градуированной коммутативной ассоциативной алгеброй.

Пусть связность ∇ на многообразии M — эквипроективная (см. [4, с. 168]), т.е. ∇ является проективно плоской (см. [11, с. 168], [58, с. 73–74]) и имеет симметричный тензор Риччи. На подобном многообразии существует n -форма объема $d\text{Vol}$, что означает замену группы $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, действующей в слоях произвольных тензорных расслоений на M , специальной линейной группой $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ (см. [5, с. 13–14]); при этом n -форма объема является ковариантно постоянной или, иначе, параллельной в связности ∇ , т.е. $\nabla d\text{Vol} = 0$.

Для проективно плоской связности существует диффеоморфизм $f: M \rightarrow A^n$, при котором геодезические линии многообразия M локально диффеоморфны прямым линиям аффинного пространства A^n . Если подобный диффеоморфизм локально задать равенствами $x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n$ для локальной системы координат $x^1, \dots, x^n$ многообразия M и декартовых координат $y^1, \dots, y^n$ пространства A^n , то p -тензор Киллинга $\phi \in C^\infty S^p M$ имеет следующий вид (см. [20, 64]):

$$\phi_{i_1 \dots i_p} = e^{2\psi} \sum_{q=0}^p A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} y^{j_1} \dots y^{j_q},$$

где $\psi = p(n+1)^{-1} \log d \text{Vol}$ и $A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$ — такие постоянные, симметричные по двум группам индексов $i_1 \dots i_p$ и $j_1 \dots j_q$, что их симметризация по индексам $i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{q-1}$ дает нуль при всех $q = 1, \dots, p$. При этом число независимых постоянных $A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$ равно

$$\binom{n+p}{p} \cdot \binom{n+p-1}{p} - \binom{n+p}{p+1} \cdot \binom{n+p-1}{p-1} = \frac{1}{n} \cdot \binom{n+p}{p+1} \cdot \binom{n+p-1}{p} = \\ = \frac{n(n+1)^2(n+2)^2 \dots (n+p-1)^2(n+p)}{p!(p+1)!}.$$

В результате справедлива следующая теорема (см. выше [20, 64]).

Теорема 3.2. Пусть M — дифференцируемое n -мерное ($n > 1$) многообразие класса C^∞ с n -формой объема dv и эквивариантной связностью ∇ , тогда существует локальная система координат $x^1, \dots, x^n$ многообразия M , в которой произвольный p -тензор Киллинга ϕ имеет вид

$$\phi_{i_1 \dots i_p} = e^{2\psi} \sum_{q=0}^p A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} x^{j_1} \dots x^{j_q},$$

где $\psi = p(n+1)^{-1} \log d \text{Vol}$. Тензор ϕ зависит от

$$\frac{n(n+1)^2(n+2)^2 \dots (n+p-1)^2(n+p)}{p!(p+1)!}$$

независимых постоянных $A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$, а потому

$$\dim K^p(M, R) = \frac{n(n+1)^2(n+2)^2 \dots (n+p-1)^2(n+p)}{p!(p+1)!}.$$

Ядром второго фундаментального дифференциального оператора или, другими словами, обобщенного градиента

$$D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1} \delta^*$$

служат p -формы $\phi \in C^\infty S^p M$, которые подчиняются условию $\nabla \phi \in C^\infty S^{p+1} M$. Подобные симметрические p -формы на римановом многообразии (M, g) были названы нами p -тензорами Кодацци (см. [24]). В случае $p = 2$ их называют просто тензорами Кодацци (см. [1, с. 590]).

На n -мерном ($n > 1$) многообразии M класса C^∞ с линейной связностью ∇ без кручения p -тензоры Кодацци образуют векторное пространство $C^p(n, \mathbb{R})$. Если на многообразии M задана эквивариантная связность ∇ , то тензор Риччи Ric этой связности является кодацциевым; более того, в этой связности любой тензор Кодацци $\phi \in C^\infty S^2 M$ имеет вид

$$\phi = \nabla^2 f + \frac{1}{n+1} f \cdot \text{Ric}$$

для произвольной функции $f \in C^\infty M$ (см. [11, с. 169]).

Замечание. Результат А. П. Нордена был перенесен Ферусом на римановы многообразия (M, g) постоянной кривизны K , где $\phi = \nabla^2 f + K f g$ для связности Леви-Чивиты ∇ (см. [1, с. 591]).

4. Обобщенные градиенты на пространстве сечений расслоения симметрических бесследовых 2-тензоров на римановом многообразии. Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности $n \geq 2$. Рассмотрим расслоение $S_0^2 M$ бесследовых симметричных 2-форм на M и пусть $\text{Diff}(S_0^2 M, T^* M \otimes S_0^2 M)$ обозначает, как и прежде, $C^\infty M$ -модуль линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$D: C^\infty S_0^2 M \rightarrow C^\infty(T^* M \otimes S_0^2 M)$$

на пространстве $C^\infty M$ -сечений $C^\infty S_0^2 M$ расслоения $S_0^2 M$.

Стандартным слоем расслоения $T^*M \otimes S_0^2 M$ служит тензорное пространство $V^* \otimes S_0^2 V$ для n -мерного ($n > 2$) векторного пространства V . Рассмотрим $V^* \otimes S_0^2 V$ как пространство представлений ортогональной группы $O(n, \mathbb{R})$. Существуют такие три $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимых подпространства $S_0^3 V$, V^* и $\text{Ker } S^3 \cap \text{Ker } \text{trace}_g$ пространства $V^* \otimes S_0^2 V$, что

$$V^* \otimes S_0^2 V = \text{Pr}_{S_0^3 V} (V^* \otimes S_0^2 V) \oplus \text{Pr}_{V^*} (V^* \otimes S_0^2 V) \oplus \text{Pr}_{\text{Ker } S^3 \cap \text{Ker } \text{trace}_g} (V^* \otimes S_0^2 V)$$

(см. [2, с. 277]), где

$$(\text{trace}_g \bar{\phi})_k = \sum_{i=1,2,\dots,n} \bar{\phi}_{iik}$$

для компонент $\bar{\phi}_{ijk} = \bar{\phi}(e_i, e_j, e_k)$ произвольного тензора $\bar{\phi} \in V^* \otimes S_0^2 V$ в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ векторного пространства V .

Неприводимость относительно действия группы $O(n, \mathbb{R})$ разложения пространства $V^* \otimes S_0^2 V$ следует из теоремы Г. Вейля о квадратичных $O(n, \mathbb{R})$ -инвариантных формах (см. [3, с. 205], [25, с. 156]). Напомним, что количество неприводимых компонент разложения, согласно теореме Г. Вейля, совпадает с количеством $O(n, \mathbb{R})$ -инвариантных форм, определенных на пространстве $V^* \otimes S_0^p V$. Здесь мы имеем только три такие независимые инвариантные квадратичные формы, которые задаются компонентами $\bar{\phi}_{ijk} = \bar{\phi}(e_i, e_j, e_k)$ тензора $\bar{\phi}$ из $V^* \otimes S_0^2 V$ в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ векторного пространства V и имеют вид (см. также [18])

$$\Psi_1(\bar{\phi}) = \sum_{i,j,k=1}^n (\bar{\phi}_{ijk})^2; \quad \Psi_2(\bar{\phi}) = \sum_{i,j,k=1}^n \bar{\phi}_{ijk} \bar{\phi}_{jik}; \quad \Psi_3(\bar{\phi}) = \sum_{i,k=1}^n (\bar{\phi}_{iik})^2.$$

Они представляют собою все возможные следы формы $\bar{\phi} \otimes \bar{\phi}$. На этом основании ортогональное разложение $V^* \otimes S_0^2 V$, содержащее три компоненты, является $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимым.

Замечание. Это утверждение можно вывести из более общего утверждения в [2, с. 265].

Ортогональные проекции на первые две неприводимые компоненты разложения имеют следующий вид (см. [2, с. 277], [18]):

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{S_0^3 V} (V^* \otimes S_0^2 V)_{ikj} &= \bar{\phi}_{(ijk)} - \frac{2}{n+2} \text{trace}_g \bar{\phi}_{(i} g_{jk)} = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \bar{\phi}_{ijk} + \bar{\phi}_{jki} + \bar{\phi}_{kij} - \frac{2}{n+2} [\text{trace}_g \bar{\phi}_i g_{jk} + \text{trace}_g \bar{\phi}_j g_{ki} + \text{trace}_g \bar{\phi}_k g_{ij}] \right\}; \\ \text{Pr}_{V^*} (V^* \otimes S_0^2 V)_{ikj} &= \frac{n}{(n+2)(n-1)} \left(\text{trace}_g \bar{\phi}_j g_{ik} + \text{trace}_g \bar{\phi}_k g_{ij} - \frac{2}{n} \text{trace}_g \bar{\phi}_i g_{jk} \right) \end{aligned}$$

для произвольного $\bar{\phi} \in V^* \otimes S_0^2 V$. При этом справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} g^{ik} \text{Pr}_{S_0^3 V} (V^* \otimes S_0^2 V)_{ikj} &= 0, \\ g^{ik} \text{Pr}_{V^*} (V^* \otimes S_0^2 V)_{ikj} &= \text{trace}_g \bar{\phi}_j, \\ g^{ij} \text{Pr}_{V^*} (V^* \otimes S_0^2 V)_{ikj} &= \text{trace}_g \bar{\phi}_k, \\ g^{kj} \text{Pr}_{V^*} (V^* \otimes S_0^2 V)_{ikj} &= 0, \end{aligned}$$

где $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Проекция на третью неприводимую компоненту определяется из равенства

$$\text{Pr}_{\text{Ker } S^3 \cap \text{Ker } \text{trace}_g} (V^* \otimes S_0^2 V) = V^* \otimes S_0^2 V - \text{Pr}_{S_0^3 V} (V^* \otimes S_0^2 V) - \text{Pr}_{V^*} (V^* \otimes S_0^2 V).$$

Отсюда находим (см. также [18]), что

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\text{Ker } S^3 \cap \text{Ker } \text{trace}_g} (V^* \otimes S_0^2 V) &= \frac{1}{3} \left\{ 2 \left(\bar{\phi}_{ijk} + \frac{1}{n-1} \text{trace}_g \bar{\phi}_i g_{jk} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\bar{\phi}_{jki} + \frac{1}{n-1} \text{trace}_g \bar{\phi}_j g_{ki} \right) - \left(\bar{\phi}_{kij} + \frac{1}{n-1} \text{trace}_g \bar{\phi}_k g_{ij} \right) \right\} \end{aligned}$$

для произвольного $\bar{\phi} \in V^* \otimes S_0^2 V$.

На основании приведенного выше неприводимого разложения тензорного пространства $V^* \otimes S_0^2 V$ опишем фундаментальные дифференциальные операторы первого порядка, заданные на пространстве C^∞ -сечений расслоения $S_0^2 M$.

Предварительно введем в рассмотрение дифференциальный оператор первого порядка

$$\delta: C^\infty S^{p+1} M \rightarrow C^\infty S^p, \delta\phi = -\frac{1}{p!} \nabla^k \phi_{ki_2 \dots i_{p+1}} dx^{i_2} \circ \dots \circ dx^{i_{p+1}}$$

для произвольной p -формы $\phi \in C^\infty S^{p+1} M$ (см., например, [1, с. 54–55]). Как уже отмечалось, оператор является формально сопряженным оператору (2.2) и называется *дивергенцией*.

Согласно [2, с. 277] первым фундаментальным дифференциальным оператором, символ которого является проектором на поточечно неприводимую компоненту $S_0^3 M$, будет

$$D_1\phi = \delta^*\phi + \frac{2}{n+2}(\delta\phi \circ g). \quad (4.1)$$

Также согласно [2, с. 277] вторым фундаментальным дифференциальным оператором, символ которого является проектором уже на поточечно неприводимую компоненту V^* , будет

$$(D_2\phi)(X, Y, Z) = -\frac{n}{(n+2)(n-1)} \left(\delta\phi(Y)g(X, Z) + \delta\phi(Z)g(X, Y) - \frac{2}{n}\delta\phi(X)g(Y, Z) \right) \quad (4.2)$$

для произвольных $X, Y, Z \in C^\infty TM$. Можно доказать (см. также [18]), что третьим фундаментальным оператором, символ которого является проектором на поточечно неприводимую компоненту $\text{Ker } S^3 \cap \text{Ker } \text{trace}_g$, является

$$(D_3\phi)(X, Y, Z) = \frac{1}{3} \left\{ 2 \left(\nabla\phi(X, Y, Z) - \frac{1}{n-1}\delta\phi(X)g(Y, Z) \right) - \right. \\ \left. - \left(\nabla\phi(Y, Z, X) - \frac{1}{n-1}\delta\phi(Y)g(Z, X) \right) - \left(\nabla\phi(Z, X, Y) - \frac{1}{n-1}\delta\phi(Z)g(X, Y) \right) \right\} \quad (4.3)$$

для произвольных $X, Y, Z \in C^\infty TM$.

В результате для произвольной формы $\phi \in C^\infty S_0^2 M$ справедливо поточечно $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимое разложение

$$\nabla\phi = D_1\phi + D_2\phi + D_3\phi$$

ее ковариантной производной $\nabla\phi$. А потому в соответствии с концепцией Стейна–Вейсса (см. [58]) найденные нами выражения $D_1\phi$, $D_2\phi$ и $D_3\phi$ являются обобщенными градиентами симметрической формы $\phi \in C^\infty S_0^2 M$, поскольку $D_1\phi$, $D_2\phi$ и $D_3\phi$ являются $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимым компонентами в разложении ковариантной производной $\nabla\phi$ этой формы $\phi \in C^\infty S_0^2 M$.

Теорема 4.1 (см. [18]). Пусть (M, g) — риманово n -мерное ($n \geq 2$) многообразие класса C^∞ со связностью Леви-Чивиты ∇ и $S_0^2 M$ — расслоения симметричных бесследовых дифференциальных 2-форм на M . Существуют три фундаментальных дифференциальных оператора первого порядка D_1 , D_2 и D_3 или, что равносильно, три обобщенных $O(n, \mathbb{R})$ -градиента на пространстве сечений $C^\infty S_0^2 M$ расслоения $S_0^2 M$ на M , которые определяются равенствами (4.1), (4.2) и (4.3).

В [2, с. 277] утверждается, что ядром оператора D_2 служат бесследовые бездивергентные симметрические 2-формы ϕ или, по другой терминологии, TT -тензоры (см. [68]), которые описывают деформацию римановой структуры (см. [1, с. 472]). Далее в монографии [2, с. 277–278] утверждается, что «ядра двух других фундаментальных операторов не имеют простой геометрической интерпретации». В следующих двух разделах опишем ядра этих операторов, которые мы обозначили D_1 и D_3 .

5. Риманова геометрия 2-тензоров Киллинга. Ядро первого фундаментального оператора D_1 составляют формы $\phi \in C^\infty S_0^2 M$, подчиняющиеся дифференциальным уравнениям

$$\delta^*\phi = -\frac{2}{n+2}\delta\phi \circ g.$$

Эти уравнения в локальных координатах имеют вид (см. также [18])

$$\nabla_k \phi_{ij} + \nabla_i \phi_{jk} + \nabla_j \phi_{ki} = \theta_k g_{ij} + \theta_i g_{jk} + \theta_j g_{ki}, \quad (5.1)$$

где $\theta_i = -\frac{2}{n+2} \delta \phi_i$. Такие формы называются симметричными (бесследовыми) *конформно киллинговыми тензорами* (см. [7, с. 339–340], [32, 53, 70]).

Замечание. Требование бесследовости тензора в физической литературе (см. например, [7, с. 339–340], [10, 32]) включается в определение конформно киллингова тензора.

На многообразии (M, g) размерности $n \geq 3$ данные тензоры образуют векторное пространство, размерность которого не превосходит $(n-1)(n+2)(n+3)(n+4)/12$; при этом равенство достигается на локально плоском многообразии (см. [71]). Заметим, что этот результат является локальным.

Очевидно, что условие $\phi \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$ определяет тензорное поле $\phi \in C^\infty S_0^2 M$ как бесследовый тензор Киллинга.

Приведем примеры конформно киллинговых (бесследовых) тензоров, для чего обратимся к математической физике. Пусть (M, g) — псевдориманово многообразие со связностью Леви-Чивиты ∇ ; тогда для произвольного симметрического конформно киллингова тензора $\phi \in C^\infty S_0^2 M$ вдоль каждой *изотропной геодезической линии* $\gamma = \gamma(t)$ выполняется равенство $\phi(X, X) = \text{const}$ для $X = d\gamma/dt$. Здесь в качестве $t \in J \subset \mathbb{R}$ выбран такой канонический параметр, что $\nabla_X X = 0$. В этом случае говорят (см. [7, с. 340], [53]), что уравнения изотропных геодезических или, по иной терминологии, *нуль-геодезических* допускают *квадратичный первый интеграл*. Поэтому симметричный конформно киллинговый тензор на псевдоримановом многообразии задает квадратичный первый интеграл уравнений изотропных геодезических. В качестве второго и третьего примеров конформно киллингова тензора укажем на тензор энергии-импульса материи $T \in C^2 S^2 M$ пространства-времени *Синюкова* (см. [47, 60]) и на этот же тензор в пространстве-времени со *специальными уравнениями Максвелла* электромагнитного поля (см. [59, 62]). Другие примеры и вопросы существования симметрических конформно киллинговых тензоров рассматривались в [53] и [10].

Далее докажем конформную инвариантность уравнений конформно киллингова тензора $\phi \in C^\infty S_0^2 M$.

Предложение 5.1. Пусть ϕ — симметричный (бесследовый) конформно киллинговый тензор на римановом многообразии (M, g) . Тогда тензор $\bar{\phi} = e^{4\sigma} \phi$ также будет симметричным (бесследовым) конформно киллинговым тензором на римановом многообразии $(M, \bar{g})$ с метрикой $\bar{g} = e^{2\sigma} g$, конформной метрике g .

Доказательство. Непосредственно проверяется, что при конформном преобразовании метрики $\bar{g} = e^{2\sigma} g$ уравнения (5.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k \phi_{ij} + \bar{\nabla}_i \phi_{jk} + \bar{\nabla}_j \phi_{ki} = & 2 \left(\frac{1}{n+2} \nabla^l \phi_{lk} + \phi_{lk} \sigma^l \right) g_{ij} + 2 \left(\frac{1}{n+2} \nabla^l \phi_{li} + \phi_{li} \sigma^l \right) g_{kj} + \\ & + 2 \left(\frac{1}{n+2} \nabla^l \phi_{lj} + \phi_{lj} \sigma^l \right) g_{ik} - 4 (\phi_{ij} \sigma_k + \phi_{kj} \sigma_i + \phi_{ik} \sigma_j), \end{aligned}$$

где $\bar{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты метрики $\bar{g}$, $\sigma_k = \nabla_k \sigma$ и $\sigma^k = g^{kl} \sigma_l$. Тогда, полагая $\bar{\phi} = e^{4\sigma} \phi$, будем иметь

$$\bar{\nabla}_k \bar{\phi}_{ij} = e^{4\sigma} (\bar{\nabla}_k \phi_{ij} + 4\sigma_k \phi_{ij})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k \bar{\phi}_{ij} + \bar{\nabla}_i \bar{\phi}_{jk} + \bar{\nabla}_j \bar{\phi}_{ki} = & 2e^{4\sigma} \left\{ \left(\frac{1}{n+2} \nabla^l \phi_{lk} + \phi_{lk} \sigma^l \right) g_{ij} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{n+2} \nabla^l \phi_{li} + \phi_{li} \sigma^l \right) g_{kj} + \left(\frac{1}{n+2} \nabla^l \phi_{lj} + \phi_{lj} \sigma^l \right) g_{ik} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\bar{\nabla}^k \bar{\phi}_{kj} = (n+2)e^{2\sigma} \left(\frac{1}{n+2} \nabla^l \phi_{lk} + \phi_{lk} \sigma^l \right).$$

В результате $\bar{\phi}$ подчиняется уравнениям вида (5.1), но уже для симметрического конформно киллингова тензора на многообразии $(M, \bar{g})$ со связностью Леви-Чивиты $\bar{\nabla}$. А именно,

$$\bar{\nabla}_k \bar{\phi}_{ij} + \bar{\nabla}_i \bar{\phi}_{jk} + \bar{\nabla}_j \bar{\phi}_{ki} = \bar{\theta}_k \bar{g}_{ij} + \bar{\theta}_i \bar{g}_{jk} + \bar{\theta}_j \bar{g}_{ki}, \quad (5.2)$$

где $\bar{\theta}_i = \frac{2}{n+2} \bar{\nabla}^k \bar{\phi}_{ki}$. Утверждение доказано. $\square$

Введем в рассмотрение лапласиан Сампсона

$$\Delta_S: C^\infty S_0^2 M \rightarrow C^\infty S_0^2 M, \quad \Delta_S = \delta \delta^* - \delta^* \delta$$

(см. [56]). С учетом уравнений (5.1) находим его выражение на (бесследовом) конформно киллинговом тензоре:

$$\Delta_S \phi = -\frac{2}{n+2} (\delta \delta \phi) g - \frac{n}{n+2} \delta^* \delta \phi. \quad (5.3)$$

Из (5.3) заключаем, что бездивергентный бесследовый конформно киллинговый тензор или, иными словами, бесследовый киллинговый тензор принадлежит ядру лапласиана Сампсона, т.е. если $\phi \in C^\infty S_0^2 M$ и $\phi \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$, то $\phi \in \text{Ker } \Delta_S$. В случае компактного многообразия (M, g) из формулы (5.3) следует, что

$$\int_M g(\Delta_S \phi, \phi) dv_g = -\frac{n}{n+2} \int_M g(\delta \phi, \delta \phi) dv_g \leq 0.$$

Отсюда заключаем, что принадлежащий ядру лапласиана Сампсона бесследовый конформно киллинговый тензор является бездивергентным и, следовательно, киллинговым. Доказано следующее утверждение.

Предложение 5.2. *На компактном римановом многообразии (бесследовый) конформно киллинговый тензор принадлежит ядру лапласиана Сампсона тогда и только тогда, когда он является бесследовым тензором Киллинга.*

Известна формула Бохнера–Вейценбека (см., например, [65])

$$\frac{1}{2} \Delta_B \|\phi\|^2 = -g(\Delta_S \phi, \phi) + \|\nabla \phi\|^2 - 2 \sum_{i < j} \sec(E_i \wedge E_j) (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (5.4)$$

для лапласиана Бельтрами $\Delta_B = \text{div} \circ \text{grad}$ на гладких функциях. Здесь $E_1, \dots, E_n$ — такой локальный ортонормированный базис $E_1, \dots, E_n$ векторных полей на (M, g) , что

$$\phi_x(E_i, E_j) = \lambda_i(x) \delta_{ij}$$

в произвольной точке $x \in M$, где δ_{ij} — символ Кронекера, и $\sec(E_i \wedge E_j)$ — секционная кривизна в направлении подпространства $\pi_x = \text{span}\{E_i, E_j\} \subset T_x M$, натянутого на E_i и E_j , $i \neq j$. Принимая во внимание выражение лапласиана Сампсона (5.3), перепишем формулу (5.4) в виде

$$\frac{1}{2} \Delta_B \|\phi\|^2 = \frac{n}{n+2} g(\delta^* \delta \phi, \phi) + \|\nabla \phi\|^2 - 2 \sum_{i < j} \sec(E_i \wedge E_j) (\lambda_i - \lambda_j)^2. \quad (5.5)$$

В случае компактного многообразия (M, g) из формулы (5.5) следует, что

$$\frac{n}{n+2} \int_M \|\delta \phi\|^2 dv_g + \int_M \|\nabla \phi\|^2 dv_g = 2 \int_M \sum_{i < j} \sec(E_i \wedge E_j) (\lambda_i - \lambda_j)^2 dv_g. \quad (5.6)$$

Назовем секционную кривизну риманова многообразия (M, g) *квазиотрицательной* (соответственно, *квазиположительной*), если она всюду неположительная (соответственно, неотрицательная) и по крайней мере в одной точке $x \in M$ секционная кривизна отрицательна (соответственно, положительна) по всем двумерным направлениям $\pi \subset T_x M$. Очевидно, что требование для секционной кривизны быть квазиотрицательной вступит в противоречие с формулой (5.6). Если же потребовать, чтобы секционная кривизна многообразия была неположительной, то из (5.5) следует $\nabla\phi = 0$. Для риманова многообразия (M, g) с неприводимой группой голономий $\text{Hol}(g)$ это означает, что $\phi \equiv 0$. Доказана следующая теорема.

Теорема 5.3. *На компактном римановом многообразии (M, g) с квазиотрицательной секционной кривизной не существует ненулевых (бесследовых) конформно киллинговых тензоров. Если же секционная кривизна многообразия неположительна, то каждый бесследовый конформно киллинговый тензор является параллельным. При неприводимой группе голономий $\text{Hol}(g)$ такой тензор обращается в нуль.*

Замечание. Теорема исчезновения для тензоров Киллинга на компактном многообразии доказана нами в [17].

Для бесследового тензора Киллинга формула Бохнера–Вейценбека (5.4) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2}\Delta_B\|\phi\|^2 = \|\nabla\phi\|^2 - 2\sum_{i<j}\sec(E_i \wedge E_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2, \quad (5.7)$$

где согласно неравенству Като

$$\|\nabla\|\phi\|\| \leq \|\nabla\phi\|$$

(см. [30]). Поэтому из формулы (5.7) выводим неравенство

$$\|\phi\|\Delta_B\|\phi\| \geq -2\sum_{i<j}\sec(E_i \wedge E_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2. \quad (5.8)$$

В случае неположительной секционной кривизны из (5.7) следует, что $\Delta_B\|\phi\| \geq 0$, а потому $\|\phi\|$ является неотрицательной *субгармонической функцией*. Согласно [43, теорема 2.2] каждая неотрицательная субгармоническая функция f на полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны является постоянной, если для некоторого $p \in (0, +\infty)$ имеем

$$\int_M f^p dv_g < +\infty.$$

В нашем случае на полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны функция $\|\phi\| = C$ для постоянной $C \geq 0$, если

$$\int_M \|\phi\|^p dv_g < +\infty$$

для некоторого $p \in (0, +\infty)$. Если предположить, что объем (M, g) полное многообразие бесконечного объема и $C \neq 0$, то неравенство

$$\int_M \|\phi\|^p dv_g = C^p \int_M dv_g < +\infty$$

противоречит этому предположению. Доказана следующая теорема.

Теорема 5.4. *На полном односвязном римановом многообразии (M, g) неположительной секционной кривизны тензор Киллинга $\phi \in C^\infty S_0^2 M$ является параллельным, если*

$$\int_M \|\phi\|^p dv_g < +\infty$$

для некоторого $p \in (0, +\infty)$. При бесконечном объеме многообразия (M, g) каждый такой тензор является тождественно нулевым.

Полагая $\phi \in C^\infty S^\infty M$, определим в каждой точке $x \in M$ симметрический оператор $A_x: T_x M \rightarrow T_x M$ равенством

$$g(A_x X, Y) = \phi_x(X, Y) \quad \forall X, Y \in T_x M.$$

Для произвольной точки $x \in M$ обозначим через $\lambda(x)$ собственное значение симметрического оператора A_x . В результате на многообразии определяется собственная функция $\lambda = \lambda(x)$ поля операторов A или, что равносильно, 2-формы $\phi \in C^\infty S^2 M$.

Теорема 5.5. Пусть (M, g) — n -мерное компактное риманово многообразие, $\phi \in C^\infty S^2 M$ — конформно киллингов (не бесследовый) тензор на (M, g) и λ — собственная функция ϕ постоянной кратности, определенная на всем (M, g) .

1. Если кривизна Риччи многообразия квазиотрицательна, то кратность λ меньше, чем $n - 1$.
2. Если кривизна Риччи многообразия неположительна, $n = 3$ и кратность λ равна 2, то фундаментальная группа $\pi_1(M)$ многообразия конечна.

Для доказательства теоремы привлечем понятие *собственного распределения* 2-формы $\phi \in C^\infty S^2 M$ (см. [1, с. 592]). Обозначим через $V_{\lambda(x)} \subset T_x M$ собственное подпространство симметрического оператора A_x с собственным значением $\lambda(x)$ для произвольной точки $x \in M$. Введем в рассмотрение открытое всюду плотное подмножество $M_\phi \subset M$, состоящее из точек, в которых число различных собственных значений оператора A постоянно. Тогда на каждой связной компоненте множества M_ϕ собственные значения оператора A определяют попарно различные собственные функции. Каждая такая функция λ постоянной кратности определяет гладкое распределение $V_\lambda: x \rightarrow V_{\lambda(x)} \subset T_x M$ собственных подпространств поля операторов A . При этом размерность распределения V_λ совпадает с кратностью собственной функции λ .

Обозначим через Q и F вторую фундаментальную форму и тензор интегрируемости r -мерного ($r \geq 2$) распределения V_λ , которые определяются следующими равенствами (см. [54, с. 148]):

$$g(Q(X, Y), W) = \frac{1}{2}g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, W), \quad g(F(X, Y), W) = \frac{1}{2}g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, W)$$

для произвольных векторных полей X и Y распределения V_λ и векторного поля W его ортогонального дополнения $V_\lambda^\perp$. При $F \equiv 0$ распределение V_λ является интегрируемым (задает r -мерное слоение). Распределение V_λ называется *омбилическим*, если его вторая фундаментальная форма Q удовлетворяет условию $Q(X, Y) = \frac{1}{m}g(X, Y)\xi$ для вектора средней кривизны $\xi = \frac{1}{m} \text{trace}_g Q$ распределения V_λ . Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.6 (см. [32]). Пусть $\phi \in C^\infty S^2 M$ — конформно киллингов (не бесследовый) тензор на римановом многообразии (M, g) , а λ — его собственная функция постоянной кратности, определенная на связной компоненте множества $M_\phi \subset M$. Тогда собственное распределение V_λ является омбилическим.

Для омбилического распределения V_λ коразмерности 1 на компактном римановом многообразии (M, g) справедлива интегральная формула

$$\int_M \left(\text{Ric}(W) - \|F\|^2 - (n-1)(n-2)\|\xi\|^2 \right) dv_g = 0$$

для кривизны Риччи $\text{Ric}(W)$ в направлении единичного векторного поля W , принадлежащего ортогональному дополнению $V_\lambda^\perp$ (см. [14, 16]). Назовем кривизну Риччи *квазиотрицательной* (см. [72]), если она неположительна во всех точках многообразия и по меньшей мере в одной его точке отрицательна по всем направлениям. На основании формулы (5.3) без труда доказывается следующее утверждение (см. также [14, 16]).

Предложение 5.7. На компактном римановом многообразии квазиотрицательной кривизны Риччи не существует омбилических распределений коразмерности 1. Каждое омбилическое распределение коразмерности 1 на компактном римановом многообразии неположительной кривизны Риччи является вполне геодезическим слоением.

Для завершения доказательства теоремы 5.5 напомним (см. [39]), что компактное трехмерное риманово многообразие (M, g) , допускающее вполне геодезическое слоение коразмерности 1, имеет конечную фундаментальную группу $\pi_1(M)$.

Предположим теперь, что конформно киллингов тензор $\phi \in C^\infty S^2 M$ имеет ровно две различные собственные функции λ_1 и λ_2 постоянных кратностей на открытом всюду плотном подмножестве $M_\phi \subset M$, состоящем из точек, в которых число различных собственных значений оператора A постоянно и равно двум. В этом случае отвечающие им распределения V_{λ_1} и V_{λ_2} будут омбилическими, причем для каждой точки $x \in M_\phi$ выполняется ортогональное разложение касательного пространства $T_x M = V_{\lambda_1(x)} \oplus V_{\lambda_2(x)}$ (см. также [32]). Если предположить, что $M_\phi = M$ и многообразие (M, g) является компактным, то будет справедливой формула (см. [16])

$$\int_M \left(s_{mix} - \|F_1\|^2 - \|F_2\|^2 - (n-r)(n-r-1)\|\xi_1\|^2 - r(r-1)\|\xi_2\|^2 \right) dv_g = 0,$$

где

$$s_{mix} = \sum_{a=1}^r \sum_{\alpha=r+1}^n \sec(E_a \wedge E_\alpha)$$

для секционной кривизны $\sec(E_a \wedge E_\alpha)$ в направлении 2-плоскости $\pi = \text{span}\{E_a, E_\alpha\}$, натянутой на E_a и E_α из локальных ортонормированных базисов $\{E_1, \dots, E_r\}$ и $\{E_{r+1}, \dots, E_n\}$ распределений V_{λ_1} и V_{λ_2} .

Теперь очевидно, что односвязное компактное многообразие (M, g) с неположительной секционной кривизной и парой ортогональных дополнительных размерностей r и $n-r$ омбилических распределений V_{λ_1} и V_{λ_2} является римановым произведением многообразий размерностей r и $n-r$ соответственно. Если же секционная кривизна квазиотрицательная, т. е. неположительная и, по крайней мере, в одной точке отрицательная по всем двумерным направлениям, то такое многообразие не допускает пару ортогональных дополнительных размерностей омбилических распределений V_{λ_1} и V_{λ_2} .

Теорема 5.8. Пусть (M, g) — n -мерное односвязное компактное риманово многообразие с конформно киллинговым тензором $\phi \in C^\infty S^2 M$.

1. Если секционная кривизна многообразия квазиотрицательная, то ϕ не может иметь ровно две собственные функции λ_1 и λ_2 постоянных кратностей r и $n-r$, больших единицы, которые определены на всем (M, g) .
2. Если секционная кривизна многообразия неположительная и ϕ имеет две собственные функции λ_1 и λ_2 постоянных кратностей r и $n-r$, больших единицы, которые определены на всем многообразии, тогда (M, g) является многообразием риманова произведения многообразий размерностей r и $n-r$.

Замечание. Тензор Киллинга на n -мерном многообразии с двумя собственными значениями постоянных кратностей r и $n-r$ изучался в статьях [38] и [32].

6. Риманова геометрия 2-тензоров Кодацци. В этом разделе изучим геометрию ядра дифференциального оператора D_3 . Очевидно, что ядро оператора D_3 составят формы $\phi \in C^\infty S_0^2 M$, подчиняющиеся дифференциальным уравнениям

$$\nabla_i \phi_{jk} - \nabla_j \phi_{ik} = \omega_i g_{jk} - \omega_j g_{ik}, \quad (6.1)$$

где

$$\omega_i = \frac{1}{n-1} \delta \phi_i$$

(см. также [18]). Форма $\phi \in C^\infty S^2 M$, удовлетворяющая уравнениям (6.1), была названа в [18] конформно кодацциевым тензором. Очевидно, что условие $\phi \in \text{Ker } D_3 \cap \text{Ker } D_2$ определяет бесследовый тензор Кодацци $\phi \in C^\infty S_0^2 M$.

Примерами конформно кодацциевых тензоров служат Риччи Ric риманова многообразия класса $Q \oplus A$ по классификации А. Грея (см. [1, с. 587–590]) и *обобщенно симметрического пространства-времени* (см. [55]), а также тензор энергии импульса материи *приближенно конформно симметрического пространства-времени* (см. [34, 60]).

Очевидно, что при $\delta\phi \equiv 0$ из (6.1) следуют уравнения, которые определяют $\phi \in C^\infty S^2 M$ как тензор Кодацци (см. [33]). Известна «теорема исчезновения» для тензора Кодацци с постоянным следом на компактном римановом многообразии (M, g) с квазиположительной секционной кривизной (см. [1, с. 591]). Обобщим этот результат на полное риманово многообразие.

Введем в рассмотрение внешний дифференциал на симметрических 2-формах, рассматриваемых как 1-формы со значениями в касательном расслоении: (см. [2, с. 267, 278], [1, с. 483], [50, с. 349]):

$$d^\nabla : C^\infty S^2 M \rightarrow C^\infty(\Lambda^2 M \otimes T^* M),$$

$$d^\nabla \phi(X, Y, Z) = (\nabla_X \phi)(Y, Z) - (\nabla_Y \phi)(X, Z) \quad \forall X, Y, Z \in C^\infty TM.$$

Очевидно, что ядро этого оператора составят тензоры Кодацци. Далее, пусть

$$\delta^\nabla : C^\infty(\Lambda^2 M \otimes T^* M) \rightarrow C^\infty S^2 M$$

— формально сопряженный оператор для d^∇ (см. [1, р. 483]); тогда форма $\phi \in C^\infty S^2 M$ будет бездивергентным тензором Кодацци, если $\phi \in \text{Ker } d^\nabla \cap \text{Ker } \delta^\nabla$ (см. [50, р. 350]). Ж.-П. Бургиньон в [29] доказал, что

$$\delta^\nabla \phi = -d(\text{trace}_g \phi)$$

для любого тензора Кодацци $\phi \in C^\infty S^2 M$. Потому бездивергентность для тензора Кодацци $\phi \in C^\infty S^2 M$ равносильна требованию постоянства его следа.

Используя дифференциальные операторы d^∇ и δ^∇ , можно сконструировать лапласиан

$$\Delta_B := d^\nabla \delta^\nabla + \delta^\nabla d^\nabla$$

и получить для него формулу разложения Вейценбека (см. [2, р. 278], [1, р. 283], [29]):

$$\Delta_B \phi = \bar{\Delta} \phi + \mathfrak{R}_2(\phi), \quad (6.2)$$

где

$$\mathfrak{R}_2(\phi) = (R_{ik} \phi_j^k + R_{jk} \phi_i^k) - 2R_{ikjl} \phi^{kl}.$$

На компактном многообразии очевидно интегральное равенство

$$\int_M g(\Delta_B \phi, \phi) dv_g = \int_M g(d^\nabla \phi, d^\nabla \phi) dv_g + \int_M g(\delta^\nabla \phi, \delta^\nabla \phi) dv_g,$$

на основании которого заключаем, что ядро лапласиана Δ_B составляют бездивергентные тензоры Кодацци. Поскольку лапласиан Бургиньона является эллиптическим оператором, то на компактном многообразии его ядро конечномерно (см. [1, с. 632]).

Предложение 6.1. *На компактном римановом многообразии множество бездивергентных тензоров Кодацци или, что то же самое, множество тензоров Кодацци, имеющих постоянные следы, исчерпывает конечномерное ядро лапласиана Бургиньона.*

Используя формулу разложения Вейценбека (6.2) для лапласиана Бургиньона, получаем формулу Бохнера—Вейценбека

$$\frac{1}{2} \Delta \|\phi\|^2 = -g(\bar{\Delta} \phi, \phi) + \|\nabla \phi\|^2 = -g(\Delta_B \phi, \phi) + \frac{1}{2} g(\mathfrak{R}_2(\phi), \phi) + \|\nabla \phi\|^2 \quad (6.3)$$

для произвольного $\phi \in C^\infty S^2 M$. Пусть $\phi \in C^\infty S^2 M$ является бездивергентным тензором Кодацци; тогда (6.3) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{1}{2} \Delta \|\phi\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sec(e_i \wedge e_j) (\phi_{ii} - \phi_{jj}) + \|\nabla \phi\|^2. \quad (6.4)$$

где согласно неравенству Като (см. [30])

$$\|\nabla\|\phi\|\| \leq \|\nabla\phi\|.$$

Поэтому из формулы (6.4) выводим неравенство

$$\|\phi\| \Delta \|\phi\| \geq \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sec(E_i \wedge E_j) (\lambda_i - \lambda_j)^2. \quad (6.5)$$

Если всюду на многообразии $\sec \geq 0$, то из (6.5) заключаем, что $\|\phi\|$ является неотрицательной субгармонической функцией. Далее напомним, что каждая неотрицательная отличная от нуля субгармоническая функция $f \in C^2 M$ на связном некомпактном и полном римановом многообразии (M, g) неотрицательной секционной кривизны удовлетворяет условию

$$\int_M f dv_g < +\infty$$

(см. [36]). В результате справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2. *На полном некомпактном римановом многообразии (M, g) неотрицательной секционной кривизны каждый бездивергентный тензор Кодации или, что то же самое, такой тензор Кодации с постоянным следом $\phi \in C^\infty S^2 M$, что*

$$\int_M \|\phi\| dv_g < +\infty,$$

является тождественным нулем.

Докажем для бесследового конформно кодациевого тензора утверждение, аналогичное предложению 5.1.

Предложение 6.3. *Пусть ϕ — бесследовый конформно кодациев тензор на римановом многообразии (M, g) . Тогда тензор $\bar{\phi} = e^\sigma \phi$ также будет бесследовым конформно кодациевым тензором на римановом многообразии $(M, \bar{g})$ с метрикой $\bar{g} = e^{2\sigma} g$, конформной метрике g .*

Доказательство. При конформном преобразовании метрики $\bar{g} = e^{2\sigma} g$ уравнения (6.1) принимают вид

$$\bar{\nabla}_k \phi_{ij} - \bar{\nabla}_i \phi_{kj} = \left(\frac{1}{n-1} \nabla^l \phi_{lk} - \phi_{lk} \sigma^l \right) g_{ij} - \left(\frac{1}{n-1} \nabla^l \phi_{li} + \phi_{li} \sigma^l \right) g_{jk} + \phi_{kj} \sigma_i - \phi_{ij} \sigma_k.$$

Полагая $\bar{\phi} = e^\sigma \phi$, имеем

$$\bar{\nabla}_k \bar{\phi}_{ij} = e^\sigma (\bar{\nabla}_k \phi_{ij} + \sigma_k \phi_{ij})$$

и, следовательно,

$$\bar{\nabla}_k \bar{\phi}_{ij} - \bar{\nabla}_i \bar{\phi}_{kj} = \left(\frac{1}{n-1} \nabla^l \phi_{lk} - \phi_{lk} \sigma^l \right) g_{ij} - \left(\frac{1}{n-1} \nabla^l \phi_{li} + \phi_{li} \sigma^l \right) g_{jk}.$$

Отсюда находим, что

$$\bar{\nabla}^k \bar{\phi}_{kj} = (n-1) e^{-\sigma} \left(\frac{1}{n+2} \nabla^l \phi_{lk} + \phi_{lk} \sigma^l \right).$$

В результате для $\bar{\phi}$ получаем уравнения конформного тензора Кодации на многообразии $(M, \bar{g})$

$$\bar{\nabla}_i \bar{\phi}_{jk} - \bar{\nabla}_j \bar{\phi}_{ik} = \bar{\omega}_i \bar{g}_{jk} - \bar{\omega}_j \bar{g}_{ik}, \quad (6.6)$$

где

$$\bar{\omega}_i = -\frac{1}{n-1} \bar{\nabla}^k \bar{\phi}_{ki}. \quad \square$$

Обозначим, как и для тензора Киллинга, через $V_{\lambda(x)} \subset T_x M$ собственное подпространство симметрического оператора A_x , порождаемого конформно кодациевым тензором, с собственным значением $\lambda(x)$ для произвольной точки $x \in M$. Также введем в рассмотрение открытое всюду плотное подмножество $M_\phi \subset M$, состоящее из точек, в которых число различных собственных

значений оператора A постоянно. В результате на каждой связной компоненте множества M_ϕ собственные значения оператора A определяют попарно различные собственные функции. Каждая такая функция λ постоянной кратности определяет гладкое распределение $V_\lambda: x \rightarrow V_{\lambda(x)} \subset T_x M$ собственных подпространств поля операторов A .

Известно (см. [1, с. 592]), что на $M_\phi \subset M$, собственное распределение V_λ тензора Кодацци $\phi \in C^\infty S^2 M$, является интегрируемым, причем интегральные многообразия являются омбилическими подмногообразиями в (M, g) . Докажем аналогичное утверждение для конформно кодацциева тензора $\phi \in C^\infty S^2 M$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 6.4. Пусть $\phi \in C^\infty S^2 M$ — конформно кодацциев тензор на римановом многообразии (M, g) , а λ — его собственная функция постоянной кратности, определенная на связной компоненте множества $M_\phi \subset M$. Тогда собственное распределение V_λ является интегрируемым с омбилическими интегральными многообразиями.

Доказательство. Пусть $R = \{E_1, \dots, E_n\}$ и $R^* = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ — локальные поля ортонормированных реперов и сопряженных им кореперов, заданных на открытом множестве $U \subset M$, и пусть $\phi(E_i, E_j) = \phi_{ij}$. Обозначим через $\Omega = \{\omega_j^i\}$ форму связности Леви-Чивиты ∇ , 1-формы которой находятся из уравнений

$$\nabla_{E_j} E_i = \omega_i^k(E_j) E_k$$

и удовлетворяют условиям

$$\omega_j^i = -\omega_i^j.$$

Далее, пусть

$$\nabla_{E_k} = \nabla_k, \quad \phi_{ijk} = \nabla_k \phi_{ij};$$

тогда

$$\phi_{ijk} = E_k(\phi_{ij}) - \phi_{lj} \omega_i^l(E_k) - \phi_{il} \omega_j^l(E_k), \quad (6.7)$$

где согласно (6.1) компоненты ϕ_{ijk} удовлетворяют условию

$$\phi_{jki} - \phi_{ikj} = \omega_i \delta_{jk} - \omega_j \delta_{ik}; \quad (6.8)$$

здесь δ_{ij} — символ Кронекера и $\omega_i = \omega(E_i)$. Полагаем $M_\phi \subset U$; тогда в каждой точке $x \in M_\phi$ репер R_x можно специализировать таким образом, чтобы $V_\lambda = \text{span}\{E_1, \dots, E_r\}$ для кратности r собственной функции λ . В таком случае компоненты тензора ϕ должны удовлетворять условиям

$$\phi_{ab} = \lambda \delta_{ab}, \quad \phi_{b\alpha} = \phi_{\alpha b} = 0 \quad (6.9)$$

для $a, b, c = 1, \dots, r$ и $\alpha, \beta, \gamma = r+1, \dots, n$. С учетом условий (6.9) из уравнений (6.7) выводим равенства

$$\phi_{abk} = \lambda_k \delta_{ab}, \quad (6.10)$$

$$\phi_{a\alpha k} = -\phi_{\alpha\beta} \omega_a^\beta(E_k) - \lambda \omega_\alpha^a(E_k) = (\lambda \delta_{\alpha\beta} - \phi_{\alpha\beta}) \omega_a^\beta(E_k), \quad (6.11)$$

где полагаем $\lambda_k = E_k(\lambda)$. На основании (6.11) выводим уравнения распределения V_λ в терминах дифференциальных форм Картана (см., например, [8, 22]):

$$\omega_a^\alpha = \Lambda_{ab}^\alpha \omega^b + \Lambda_{a\gamma}^\alpha \omega^\gamma \quad (6.12)$$

для $\Lambda_{ab}^\alpha = \Lambda^{\alpha\beta} \phi_{\beta ab}$, $\Lambda_{a\gamma}^\alpha = \Lambda^{\alpha\beta} \phi_{\beta a\gamma}$ и $\Lambda^{\alpha\beta} = (\lambda \delta_{\alpha\beta} - \phi_{\alpha\beta})^{-1}$.

Тензор интегрируемости F и вторая фундаментальная форма Q здесь имеют компоненты

$$F_{ab}^\alpha = \frac{1}{2}(\Lambda_{ab}^\alpha - \Lambda_{ba}^\alpha), \quad Q_{ab}^\alpha = \frac{1}{2}(\Lambda_{ab}^\alpha + \Lambda_{ba}^\alpha)$$

соответственно (см. [8, 22]). С учетом уравнений (6.8) и равенств (6.10) получаем

$$F \equiv 0, \quad Q_{ab}^\alpha = (\Lambda^{\alpha\beta} \lambda_\beta) \delta_{ab}.$$

Последние два равенства доказывают предложение 6.4. $\square$

Сформулируем утверждение, аналогичное теореме 5.5, которое не требует доказательства.

Теорема 6.5. Пусть (M, g) — n -мерное компактное риманово многообразие, $\phi \in C^\infty S^2 M$ — конформно кодацциев тензор на (M, g) и λ — собственная функция ϕ постоянной кратности, определенная на всем (M, g) .

1. Если кривизна Риччи многообразия квазиотрицательна, то кратность λ меньше, чем $n - 1$.
2. Если кривизна Риччи многообразия неположительна, $n = 3$ и кратность λ равна 2, то фундаментальная группа $\pi_1(M)$ многообразия конечна.

Предположим теперь, что конформно кодацциев тензор $\phi \in C^\infty S^2 M$ имеет ровно две различные собственные функции λ_1 и λ_2 постоянных кратностей r и $n - r$ соответственно, определенные на связной компоненте множества $M_\phi \subset M$. В этом случае оба распределения V_{λ_1} и V_{λ_2} будут интегрируемыми омбилическими (т.е. задавать два омбилических слоения). В этом случае для каждой точки $x \in M_\phi$ существует открытая окрестность с локальной системой координат $x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^n$, в которой метрический тензор многообразия принимает вид (см., например, [13])

$$g(x^1, \dots, x^n) = \sum_{a,b=1,\dots,r} f_1^2(x^1, \dots, x^n) g_{ab}(x^1, \dots, x^r) dx^a \otimes dx^b + \sum_{\alpha,\beta=r+1,\dots,n} f_2^2(x^1, \dots, x^n) g_{\alpha\beta}(x^{r+1}, \dots, x^n) dx^\alpha \otimes dx^\beta \quad (6.13)$$

для положительных функций $f_1(x^1, \dots, x^n)$ и $f_2(x^1, \dots, x^n)$. Риманово многообразие (M, g) с таким метрическим тензором называется *дважды скрученным* (см. [52]), а при $f_1(x^1, \dots, x^n) \equiv 0$ многообразие (M, g) называется *скрученным* (см. [35, с. 71–78]). Справедливо следующее утверждение.

Предложение 6.6. Пусть (M, g) — n -мерное риманово многообразие и ϕ — конформно кодацциев тензор $\phi \in C^\infty S^2 M$, который на связной компоненте множества $M_\phi \subset M$ имеет ровно две различные собственные функции постоянных кратностей r и $n - r$ соответственно. Тогда в окрестности каждой точки $x \in M_\phi$ метрический тензор многообразия приводится к виду (6.13), а само (M, g) локально является дважды скрученным римановым многообразием.

В [13, 63] были подробно изучены свойства таких многообразий. В частности, справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 5.8.

Теорема 6.7. Пусть (M, g) — n -мерное односвязное компактное риманово многообразие с конформно кодацциевым тензором $\phi \in C^\infty S^2 M$.

1. Если секционная кривизна многообразия квазиотрицательна, то ϕ не может иметь определенные на всем (M, g) две собственные функции λ_1 и λ_2 постоянных кратностей r и $n - r$, больших единицы.
2. Если секционная кривизна многообразия неположительна и ϕ имеет определенные на всем (M, g) две собственные функции λ_1 и λ_2 постоянных кратностей r и $n - r$, больших единицы, то (M, g) является многообразием риманова произведения многообразий размерностей r и $n - r$.

В заключение рассмотрим такую форму $\phi \in C^\infty S_0^2 M$, что $\phi \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_3$. В этом случае локальные компоненты ϕ_{ij} формы $\phi \in C^\infty S_0^2 M$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla_k \phi_{ij} = \frac{n}{(n-1)(n+2)} \left(\frac{2}{n} \delta \phi_k g_{ij} - \delta \phi_i g_{kj} - \delta \phi_j g_{ik} \right). \quad (6.14)$$

Форму $\phi \in C^\infty S_0^2 M$ назовем *специальным (бесследовым) конформно кодацциевым тензором* или, иначе, *специальным (бесследовым) конформно киллинговым тензором*, если ее локальные компоненты удовлетворяет уравнениям (6.14).

Приведем пример такого тензора. Рассмотрим специальное риманово многообразие (см. [12, с. 131–132]), описываемое дифференциальными уравнениями

$$\nabla_k R_{ij} = \frac{1}{(n-1)(n+2)} \left(n \nabla_k s g_{ij} - \frac{1}{2} (n-2) (\nabla_i s g_{kj} + \nabla_j s g_{ik}) \right), \quad (6.15)$$

которым удовлетворяет его тензор Риччи Ric с локальными компонентами R_{ij} и скалярная кривизна $s = \text{tr}_{g, \text{Ric}}$. Доказано (см. [12, с. 131–132] и [49, с. 360]), что римановы многообразия (M, g) с тензором Риччи (6.15) существуют и допускают нетривиальные геодезические отображения. Введем в рассмотрение бесследовую составляющую $\text{Ric}^\circ = \text{Ric} - \frac{1}{n}sg$ тензора Риччи Ric . Если теперь воспользоваться уравнениями $\delta \text{Ric} = -\frac{1}{2}ds$, являющимися непосредственным следствием тождеств Бианки (см. [24, с. 165]), то из (6.15) автоматически следуют уравнения (6.14) для $\phi = \text{Ric}^\circ$. Таким образом, бесследовая составляющая тензора Риччи риманова многообразия Синюкова является специальным (бесследовым) конформно кодацциевым тензором или, иначе, специальным (бесследовым) конформно киллинговым тензором.

Замечание. Свойства специальных (бесследовых) конформно кодацциевых и конформно киллинговых тензоров следуют из свойств конформно кодацциевых и конформно киллинговых тензоров.

7. Обобщенные градиенты на пространстве сечений расслоения симметрических бесследовых p -тензоров ($p \geq 2$). Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности $n \geq 2$. Рассмотрим расслоение $S_0^p M$ бесследовых симметричных p -форм на M . Пусть

$$\text{Diff} \left(S_0^p M, T^* M \otimes S_0^p M \right)$$

— $C^\infty M$ -модуль линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$D: C^\infty S_0^p M \rightarrow C^\infty(T^* M \otimes S_0^p M)$$

на пространстве $C^\infty M$ -сечений $C^\infty S_0^p M$ расслоения $S_0^p M$.

Замечание. Следующие наши рассуждения будут аналогичны рассуждениям из [18] и четвертого раздела настоящей статьи в предположении, что ранг симметричных бесследовых тензоров $p \geq 2$ (см. также [38]).

Стандартным слоем расслоения $T^* M \otimes S_0^p M$ служит тензорное пространство $V^* \otimes S_0^p V$ для n -мерного ($n > 2$) вещественного векторного пространства V , где для $\phi \in S_0^p V$ справедливо равенство

$$(\text{trace}_g \phi)(a_3, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^n \phi(e_i, e_i, a_3, \dots, a_p) = 0$$

для произвольных векторов $a_3, \dots, a_p$ и ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства V . Рассмотрим $V^* \otimes S_0^p V$ как пространство представлений ортогональной группы $O(n, \mathbb{R})$. Существуют такие три $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимых подпространства

$$S_0^{p+1} V, \quad V^*, \quad \text{Ker } S_0^{p+1} \cap \text{Ker } \text{trace}_g$$

пространства $V^* \otimes S_0^p V$, что

$$V^* \otimes S_0^p V = \text{Pr}_{S_0^{p+1} V} (V^* \otimes S_0^p V) \oplus \text{Pr}_{S_0^{p-1} V} (V^* \otimes S_0^p V) \oplus \text{Pr}_{\text{Ker } S_0^{p+1} \cap \text{Ker } \text{trace}_g} (V^* \otimes S_0^p V).$$

Неприводимость относительно действия группы $O(n, \mathbb{R})$ данного разложения пространства $V^* \otimes S_0^p V$ следует из теоремы Г. Вейля о квадратичных $O(n, \mathbb{R})$ -инвариантных формах (см. [3, с. 205], [2, с. 156]). Здесь мы имеем только три такие независимые инвариантные квадратичные формы, которые задаются компонентами $\bar{\phi}_{i_0 i_1 \dots i_p} = \bar{\phi}(e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ тензора $\bar{\phi} \in V^* \otimes S_0^p V$ в ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства V и имеют вид

$$\Psi_1(\bar{\phi}) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_p=1}^n (\bar{\phi}_{i_0 i_1 \dots i_p})^2; \quad (7.1)$$

$$\Psi_2(\bar{\phi}) = \sum_{i_0, i_1, i_2, \dots, i_p=1}^n \bar{\phi}_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} \bar{\phi}_{i_1 i_0 i_2 \dots i_p}; \quad (7.2)$$

$$\Psi_3(\bar{\phi}) = \sum_{i, i_2, \dots, i_p=1}^n (\bar{\phi}_{i i i_2 \dots i_p})^2 \quad (7.3)$$

Они представляют собою все возможные следы формы $\bar{\phi} \otimes \bar{\phi}$. На этом основании разложение $V^* \otimes S_0^p V$, содержащее три компоненты, является $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимым. Напомним здесь, что случай $p = 2$ рассмотрен нами в четвертом разделе.

Ортогональная проекция на первую неприводимую компоненту разложения $V^* \otimes S_0^p V$ имеет вид

$$\text{Pr}_{S_0^{p+1}V}(V^* \otimes S_0^p V) = S^{p+1}\bar{\phi} - \frac{2}{n+2(p-1)}g \circ \text{trace}_g \bar{\phi}$$

или в координатной форме

$$\text{Pr}_{S_0^{p+1}V}(V^* \otimes S_0^p V)_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} = \bar{\phi}_{(i_0 i_1 i_2 \dots i_p)} - \frac{2}{n+2(p-1)}g_{(i_0 i_1} \text{trace}_g \bar{\phi}_{i_2 \dots i_p)}.$$

При этом имеет место тождество $\text{trace}_g \text{Pr}_{S_0^{p+1}V}(V^* \otimes S_0^p V) = 0$; в локальных координатах

$$g^{i_0 i_a} \text{Pr}_{S_0^{p+1}V}(V^* \otimes S_0^p V)_{i_0 i_1 \dots i_a \dots i_p} = 0, \quad a = 1, \dots, p.$$

Тогда первым фундаментальным дифференциальным оператором D_1 , символ которого является проектором на поточечно неприводимую компоненту $S_0^3 M$, будет

$$D_1 \phi = \frac{1}{p+1} \delta^* \phi + \frac{2}{n+2(p-1)}(g \circ \delta \phi) \quad (7.4)$$

для произвольного $\phi \in C^\infty S_0^p M$; в локальных координатах

$$(D_1 \phi)_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} = \frac{1}{p+1} \delta^* \phi_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} + \frac{2}{n+2(p-1)}g_{(i_0 i_1} \delta \phi_{i_2 \dots i_p)}. \quad (7.5)$$

Ортогональная проекция на вторую неприводимую компоненту разложения $V^* \otimes S_0^p V$ имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{S_0^{p-1}V}(V^* \otimes S_0^p V)_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{p-2} i_{p-1} i_p} &= \frac{n+2(p-2)}{(n+2(p-1))(n+(p-3))} \times \\ &\times \left(g_{i_0(i_1} \text{trace}_g \bar{\phi}_{i_2 \dots i_p)} - \frac{2}{n+2(p-2)} \text{trace}_g \bar{\phi}_{i_0(i_1 \dots i_{p-2} g_{i_{p-1} i_p)} \right). \end{aligned}$$

При этом справедливы тождества

$$\begin{aligned} g^{i_0 i_a} \text{Pr}_{S_0^{p-1}V}(V^* \otimes S_0^p V)_{i_0 i_1 \dots i_a \dots i_p} &= \text{trace}_g \phi_{i_1 \dots i_{a-1} i_{a+1} \dots i_p}, \\ g^{i_a i_b} \text{Pr}_{S_0^{p-1}V}(V^* \otimes S_0^p V)_{i_0 i_1 \dots i_a \dots i_b \dots i_p} &= 0 \end{aligned}$$

для $a < b$ и $a, b = 1, \dots, p$. Тогда вторым фундаментальным дифференциальным оператором D_2 , символ которого является проектором на вторую поточечно неприводимую компоненту разложения $TM^* \otimes S_0^p M$, будет

$$\begin{aligned} D_2 \phi_{i_0 i_1 i_2 \dots i_{p-2} i_{p-1} i_p} &= -\frac{n+2(p-2)}{(n+2(p-1))(n+(p-3))} \times \\ &\times \left(g_{i_0(i_1} \delta \phi_{i_2 \dots i_p)} - \frac{2}{n+2(p-2)} \delta \phi_{i_0(i_1 \dots i_{p-2} g_{i_{p-1} i_p)} \right) \quad (7.6) \end{aligned}$$

для произвольной p -формы $\phi \in C^\infty S_0^p M$. Очевидно, что ядром второго оператора служат бесследовые бездивергентные p -тензоры.

Проекция на третью неприводимую компоненту разложения $V^* \otimes S_0^p V$ определяется из равенства

$$\text{Pr}_{\text{Ker } S^{p+1} \cap \text{Ker } \text{trace}_g}(V^* \otimes S_0^p V) = V^* \otimes S_0^p V - \text{Pr}_{S_0^{p+1}V}(V^* \otimes S_0^p V) - \text{Pr}_{S_0^{p-1}V}(V^* \otimes S_0^p V).$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\text{Ker } S^{p+1} \cap \text{Ker trace}_g}(V^* \otimes S_0^p V) &= \bar{\phi}_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} - \left(\bar{\phi}_{(i_0 i_1 i_2 \dots i_p)} - \frac{2}{n+2(p-1)} g_{(i_0 i_1} \text{trace}_g \bar{\phi}_{i_2 \dots i_p)} \right) - \\ &- \frac{n+2(p-2)}{(n+2(p-1))(n+(p-3))} \left(g_{i_0(i_1} \text{trace}_g \bar{\phi}_{i_2 \dots i_p)} - \frac{2}{n+2(p-2)} \text{trace}_g \bar{\phi}_{i_0(i_1 \dots i_{p-2}} g_{i_{p-1} i_p)} \right) \end{aligned}$$

для произвольного $\bar{\phi} \in V^* \otimes S_0^2 V$. Тогда третьим фундаментальным дифференциальным оператором D_3 , символ которого является проектором на вторую поточечно неприводимую компоненту разложения $TM^* \otimes S_0^p M$, будет

$$\begin{aligned} D_3 \phi_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} &= \nabla_{i_0} \phi_{i_1 i_2 \dots i_p} - \left(\nabla_{(i_0} \phi_{i_1 i_2 \dots i_p)} + \frac{2}{n+2(p-1)} g_{(i_0 i_1} \delta \phi_{i_2 \dots i_p)} \right) + \\ &+ \frac{n+2(p-2)}{(n+2(p-1))(n+(p-3))} \left(g_{i_0(i_1} \delta \phi_{i_2 \dots i_p)} - \frac{2}{n+2(p-2)} \delta \phi_{i_0(i_1 \dots i_{p-2}} g_{i_{p-1} i_p)} \right). \quad (7.7) \end{aligned}$$

В итоге для произвольной формы $\phi \in C^\infty S_0^p M$ справедливо поточечно $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимое разложение ее ковариантной производной

$$\nabla \phi = D_1 \phi + D_2 \phi + D_3 \phi.$$

В соответствии с концепцией Стейна—Вейсса (см. [58]) найденные выражения $D_1 \phi$, $D_2 \phi$ и $D_3 \phi$ являются обобщенными градиентами симметрической формы $\phi \in C^\infty S_0^p M$, поскольку $D_1 \phi$, $D_2 \phi$ и $D_3 \phi$ являются поточечно $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимыми компонентами в разложении ковариантной производной $\nabla \phi$ этой формы $\phi \in C^\infty S_0^p M$. Доказана следующая теорема.

Теорема 7.1. Пусть (M, g) — риманово n -мерное ($n \geq 2$) многообразие класса C^∞ со связностью Леви-Чивиты ∇ и $S_0^p M$ — расслоения симметричных бесследовых дифференциальных 2-форм на M . Существуют три фундаментальных дифференциальных оператора первого порядка D_1 , D_2 и D_3 или, что равносильно, три обобщенных $O(n, \mathbb{R})$ -градиента на пространстве сечений $C^\infty S_0^p M$ расслоения $S_0^p M$ на M , которые определяются равенствами (7.4), (7.6) и (7.7).

8. О глобальной римановой геометрии тензоров Киллинга ранга $p \geq 2$. Ядром первого фундаментального оператора D_1 служат p -формы $\phi \in C^\infty S_0^p M$, локальные компоненты $\phi_{i_1 \dots i_p}$ которых удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_{(i_0} \phi_{i_1 i_2 \dots i_p)} = -\frac{2}{n+2(p-1)} g_{(i_0 i_1} \delta \phi_{i_2 \dots i_p)}. \quad (8.1)$$

Согласно [10] каждая такая p -форма называется *конформно киллинговым p -тензором* ($p \geq 2$). Заметим, что требование бесследовости включено в определение конформно киллингова p -тензора ($p \geq 2$) так же, как и в [7, с. 339–340] для случая $p = 2$.

В свою очередь, условие $\phi \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$ определяет p -тензор Киллинга $\phi \in C^\infty S_0^p M$, поскольку в этом случае из (8.1) следует уравнение $\delta^* \phi = 0$ тензора Киллинга.

Замечание. В [10] найден явный вид симметричного (бесследового) конформно киллингова тензора и тензора Киллинга произвольных рангов для n -мерного плоского пространства де Ситтера. Кроме того, с помощью найденных выражений этих тензоров описан полный набор операторов симметрии высшего порядка для скалярного волнового уравнения в n -мерном пространстве. В [10] утверждается, что полученные выражения тензоров можно использовать при исследовании высших симметрий широкого класса уравнений математической физики.

С учетом уравнений (8.1) находим выражение

$$g(\Delta_S \phi, \phi) = -\frac{n+2(p-2)}{n+2(p-1)} g(\delta^* \delta \phi, \phi) \quad (8.2)$$

лапласиана Сампсона $\Delta_S = \delta \delta^* - \delta^* \delta$ и тензора конформно киллингова тензора $\phi \in C^\infty S_0^p M$. Из (8.2) заключаем, что бездивергентный (бесследовый) конформно киллинговый тензор или, иными словами, бесследовый p -тензор Киллинга принадлежит ядру лапласиана Сампсона, т.е.

если $\phi \in C^\infty S_0^p M$ и $\phi \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$, то $\phi \in \text{Ker } \Delta_S$. В случае компактного многообразия (M, g) из формулы (8.2) следует, что

$$\int_M g(\Delta_S \phi, \phi) dv_g = -\frac{n+2(p-2)}{n+2(p-1)} \int_M g(\delta \phi, \delta \phi) dv_g \leq 0. \quad (8.3)$$

Отсюда заключаем, что принадлежащий ядру лапласиана Сампсона бесследовый конформно киллингов p -тензор является бездивергентным, т. е. p -тензором Киллинга.

Предложение 8.1. *На компактном римановом многообразии (бесследовый) конформно киллингов p -тензор принадлежит ядру лапласиана Сампсона тогда и только тогда, когда он является бесследовым p -тензором Киллинга.*

Для произвольного p -тензора ($p \geq 2$) Киллинга непосредственные вычисления приводят к формуле

$$2\delta \phi = \delta^*(\text{trace}_g \phi), \quad (8.4)$$

где, как и раньше,

$$\text{trace}_g \phi = \sum_{i=1, \dots, n} \phi(e_i, e_i, X_3, \dots, X_p)$$

для ортонормированного базиса $\{e_i\}$ пространства $T_x M$ в произвольной точке $x \in M$ и любых векторных полей $X_3, \dots, X_p$ на M . Очевидно следующее утверждение.

Предложение 8.2. *p -Тензор ($p > 2$) Киллинга ϕ на римановом многообразии (M, g) имеет нулевую дивергенцию тогда и только тогда, когда симметрическая форма $\text{trace}_g \phi$ является $(p-2)$ -тензором Киллинга. Бесследовый тензор Киллинга имеет нулевую дивергенцию.*

Если многообразие (M, g) допускает бездивергентный 3-тензор Киллинга ϕ , то оно допускает и инфинитезимальную изометрию, поскольку для случая $p = 3$ уравнение (8.4) принимает вид $2\delta \phi = L_\xi g$, где L_ξ — производная Ли в направлении векторного поля $\xi = (\text{trace}_g \phi)^\#$. При этом известно также, что на компактном римановом многообразии с отрицательной кривизной Риччи каждая инфинитезимальная изометрия является тождественным нулем (см. [1, с. 62]) и поэтому каждый 3-тензор Киллинга на подобном многообразии является бесследовым. Доказано следующее утверждение.

Предложение 8.3. *На компактном римановом многообразии с отрицательной кривизной Риччи каждый тензор Киллинга ранга 3 является бесследовым.*

Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие. Дифференциальный оператор второго порядка $D = \delta \delta^*$, заданный на пространстве $C^\infty S^p M$ сечений расслоения $S^p M$, является самосопряженным эллиптическим оператором (см. [26]). Кроме того, согласно определению оператора дивергенции δ имеем

$$\int_M g(\delta \delta^* \phi, \phi) d\text{Vol}_g = \int_M g(\delta^* \phi, \delta^* \phi) d\text{Vol}_g \geq 0,$$

причем равенство достигается только в случае, когда $\delta^* \phi = 0$. Таким образом, оператор $D = \delta \delta^*$ является неотрицательно определенным, и его ядро составляют p -тензоры Киллинга $\phi \in C^\infty S^p M$. На этом основании заключаем (см. [1, с. 631–632]), что векторное пространство симметричных p -тензоров Киллинга на компактном римановом многообразии (M, g) является конечномерным. Сформулируем это утверждение следующим образом.

Предложение 8.4. *Векторное пространство p -тензоров Киллинга $K^p(M, \mathbb{R})$ на компактном римановом многообразии (M, g) конечномерно.*

Более того, найдена локальная оценка этой размерности (см. [26]):

$$\dim K^p(M, \mathbb{R}) \leq \binom{n+p}{p} \cdot \binom{n+p-1}{p} - \binom{n+p}{p+1} \cdot \binom{n+p-1}{p-1},$$

причем равенство достигается на евклидовой сфере S^n (см. [69]). Последнее утверждение является также следствием теоремы 3.2, поскольку проективно плоское многообразие (M, g) является многообразием постоянной кривизны (см. [11, с. 166]).

Напомним, что лапласиан Сампсона $\Delta_S: C^\infty S^p M \rightarrow C^\infty S^p M$ допускает разложение вида

$$\Delta_S \phi = \delta \nabla \phi - \mathfrak{R}_p(\phi) \quad (8.5)$$

(см. [56, 65]). Формула (8.5) называется *разложением Вейценбека* (см. [1, р. 77]) и свидетельствует о том, что лапласиан Сампсона является частным видом *лапласиана Лихнеровича* (см. [1, с. 79], [44]). Здесь $\mathfrak{R}_p$ известным образом алгебраически (даже линейно) выражается через тензор римановой кривизны R и тензор Риччи Ric многообразия (M, g) и удовлетворяет равенствам

$$g(\mathfrak{R}_p(\phi), \phi') = g(\mathfrak{R}_p(\phi'), \phi)$$

для произвольных $\phi, \phi' \in C^\infty S^p M$ (см. [44, с. 27]). Следовательно, $\Phi_p(\phi_x, \phi_x) = g(\mathfrak{R}_p(\phi_x), \phi_x)$ — квадратичная форма для произвольных $\phi_x \in S^p T_x^* M$ и $x \in M$.

Поскольку лапласиан Сампсона является эллиптическим оператором, то, как это следует из общей теории (см. [1, с. 632]), справедливо $L^2(M, g)$ -ортогональное разложение

$$C^\infty S^p M = \text{Ker } \Delta_S \oplus \text{Im } \Delta_S.$$

При этом симметрические формы $\phi \in C^\infty S^p M$, для которых $\phi \in \text{Ker } \Delta_S$, называются Δ_S -гармоническими (см. [51, р. 148]), и пространство таких форм на компактном многообразии (M, g) является конечномерным. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.5. *На компактном многообразии (M, g) пространство симметрических Δ_S -гармонических p -форм конечномерно.*

Из доказанного выше предложения 8.2 и формулы (8.2) вытекает следующий факт.

Следствие 8.6. *На римановом многообразии (M, g) произвольный бездивергентный или, в частности, бесследовый p -тензор Киллинга является симметрической гармонической формой $\phi \in C^\infty S^p M$.*

Лапласиан Бельтрами Δ определяется равенством $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$ для произвольной функции $f \in C^\infty M$. Как уже отмечалось выше, для лапласиана Сампсона справедлива *формула Бохнера—Вейценбека*

$$\frac{1}{2} \Delta \|\phi\|^2 = -g(\Delta_S \phi, \phi) - g(\mathfrak{R}_p(\phi), \phi) + \|\nabla \phi\|^2. \quad (8.6)$$

В случае конформно киллингова p -тензора формула (8.6) примет вид

$$\frac{1}{2} \Delta \|\phi\|^2 = \frac{n+2(p-2)}{n+2(p-1)} g(\delta^* \delta \phi, \phi) - g(\mathfrak{R}_p(\phi), \phi) + \|\nabla \phi\|^2. \quad (8.7)$$

Предположим, что многообразие (M, g) компактно; тогда, интегрируя (8.7), получаем

$$\frac{n+2(p-2)}{n+2(p-1)} \int_M g(\delta \phi, \delta \phi) d \text{Vol}_g + \int_M \|\nabla \phi\|^2 d \text{Vol}_g = \int_M g(\mathfrak{R}_p(\phi), \phi) d \text{Vol}_g. \quad (8.8)$$

В [4, 38] доказано, что на римановом многообразии (M, g) неположительной секционной кривизны для произвольной симметрической формы $\phi \in S_0^p M$ выполняется неравенство

$$\Phi_p(\phi, \phi) = g(\mathfrak{R}_p(\phi), \phi) \leq 0$$

в каждой точке такого многообразия. Если при этом найдется такая точка, в которой секционная кривизна будет отрицательной по всем двумерным направлениям из касательного пространства, то

$$\Phi_p(\phi, \phi) = g(\mathfrak{R}_p(\phi), \phi) < 0$$

для произвольной симметрической формы $\phi \in S_0^p M$. В этом случае на основании интегрального равенства (8.8) заключаем, что справедливо следующее утверждение (см. также [4, 38]).

Предложение 8.7. *На компактном римановом многообразии (M, g) неположительной секционной кривизны каждый симметричный конформно киллингов тензор $\phi \in C^\infty S_0^p M$ параллелен, т.е. $\nabla \phi = 0$. Если при этом найдется точка, в которой $\text{сес} < 0$, то на (M, g) не существует ненулевых симметричных конформно киллинговых тензоров $\phi \in C^\infty S_0^p M$.*

Непосредственные расчеты приводят к следующему равенству:

$$\frac{1}{2} \Delta \|\phi\|^2 = \|\phi\| \Delta \|\phi\| + \|d\|\phi\|\|^2.$$

В этом случае (8.6) влечет неравенство

$$\|\phi\| \Delta \|\phi\| \geq -g(\Delta_S \phi, \phi) - \Phi_p(\phi, \phi), \quad (8.9)$$

поскольку в силу неравенства Като

$$\|\nabla \phi\|^2 \geq \|d\|\phi\|\|^2.$$

Далее, пусть форма $\phi \in C^\infty S_0^p M$ является киллинговым p -тензором; тогда неравенство (8.9) переписывается в виде

$$\|\phi\| \Delta \|\phi\| \geq -\Phi_p(\phi, \phi). \quad (8.10)$$

Для риманова многообразия (M, g) неположительной секционной кривизны из (8.8) выводим, что $\Delta \|\phi\| \geq 0$ и, следовательно, $\|\phi\|$ — неотрицательная субгармоническая функция для любого тензора Киллинга $\phi \in S_0^p M$.

Напомним следующий факт.

Теорема 8.8 (см. [43, с. 288]). *На полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны каждая неотрицательная субгармоническая функция $f \in C^2 M$, удовлетворяющая условию*

$$\int_M f^q d\text{Vol}_g < +\infty, \quad q \in (0, \infty),$$

является постоянной.

Полагая $f = \|\phi\|$, заключаем, что $\|\phi\| = C$ для некоторой постоянной C и, следовательно, $\nabla \phi = 0$. В этом случае

$$\int_M \|\phi\|^q d\text{Vol}_g = C^q \int_M d\text{Vol}_g = C^q \text{Vol}(M) < +\infty$$

и, следовательно, объем многообразия (M, g) конечен, если $C \neq 0$. Доказана следующая теорема.

Теорема 8.9. *Если секционная кривизна односвязного полного риманова многообразия (M, g) является всюду неположительной, то p -тензор ($p \geq 2$) Киллинга $\phi \in S_0^p M$, для которого*

$$\int_M \|\phi\|^q d\text{Vol}_g < +\infty \quad \text{хотя бы для одного } q \in (0, \infty),$$

будет параллельным. Если же (M, g) имеет бесконечный объем, то $\phi \equiv 0$.

Замечание. В [15, 38] и [4] были доказаны теоремы, аналогичные нашей, но для киллингова тензора на компактном римановом многообразии.

Пусть $M = G/H$ — риманово симметрическое пространство некомпактного типа с G -инвариантной метрикой g . Тогда (M, g) является полным римановым многообразием неположительной секционной кривизны (см. [6, с. 226, 236]). Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 8.10. *На римановом симметрическом пространстве (M, g) некомпактного типа каждый p -тензор ($p \geq 2$) Киллинга $\phi \in S_0^p M$, для которого*

$$\int_M \|\phi\|^q d\text{Vol}_g < +\infty \quad \text{хотя бы для одного } q \in (0, \infty),$$

является параллельным тензорным полем. Если, кроме того, $p = 2$ и пространство (M, g) неприводимо, то $\phi \equiv 0$.

9. О глобальной римановой геометрии тензоров Кодацци ранга $p \geq 2$. Предположим, что $\phi \in C^\infty S_0^p M$ и $\phi \in \text{Ker } D_3$; тогда справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \nabla_{i_0} \phi_{i_1 i_2 \dots i_p} - \nabla_{i_1} \phi_{i_0 i_2 \dots i_p} = & \frac{n + 2(p - 2)}{(n + 2(p - 1))(n + (p - 3))} \left\{ g_{i_0(i_1} \delta \phi_{i_2 \dots i_p)} - g_{i_1(i_0} \delta \phi_{i_2 \dots i_p)} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{n + 2(p - 2)} (\delta \phi_{i_0(i_1 \dots i_{p-2}} g_{i_{p-1} i_p)} - \delta \phi_{i_1(i_0 \dots i_{p-2}} g_{i_{p-1} i_p})) \right\}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Форму $\phi \in C^\infty S_0^p M$ назовем *бесследовым конформно кодацциевым тензором* ранга $p \geq 2$, если она удовлетворяет уравнениям (9.1). В свою очередь условие $\phi \in \text{Ker } D_3 \cap \text{Ker } D_2$ определяет p -форму $\phi \in C^\infty S_0^2 M$ как *бесследовый p -тензор Кодацци* (см. [15, 57]), поскольку в этом случае имеют место уравнения

$$\nabla_{i_0} \phi_{i_1 i_2 \dots i_p} - \nabla_{i_1} \phi_{i_0 i_2 \dots i_p} = 0. \quad (9.2)$$

Для p -тензора ($p > 3$) Кодацци $\phi \in C^\infty S^p M$ из определяющего его условия $\nabla \phi \in C^\infty S^{p+1} M$ выводим, что $\nabla(\text{trace}_g \phi) \in C^\infty S^{p-2} M$. Из условия

$$\nabla \phi = \frac{1}{p+1} \delta^* \phi,$$

также определяющего p -тензор Кодацци, следует, что $\delta \phi = -\nabla(\text{trace}_g \phi)$ для любого $p \geq 2$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 9.1. *Для произвольного p -тензора ($p > 3$) Кодацци $\phi \in S^p M$ на римановом многообразии (M, g) симметрическая форма $\text{trace}_g \phi$ является $(p-2)$ -тензором Кодацци. Каждый бесследовый p -тензор ($p \geq 2$) Кодацци ϕ всегда имеет нулевую дивергенцию.*

Для бездивергентного тензора Кодацци $\phi \in S^p M$ справедливо уравнение

$$\Delta_S \phi = (p+1) \nabla^* \nabla \phi.$$

Поэтому из разложения Вейценбека (8.5) следует, что

$$\delta \nabla \phi = -\frac{1}{p} \mathfrak{R}_p(\phi). \quad (9.3)$$

В этом случае непосредственные расчеты приводят к уравнению

$$\frac{1}{2} \Delta \|\phi\|^2 = \frac{1}{p} \Phi_p(\phi, \phi) + \|\nabla \phi\|^2, \quad (9.4)$$

из которого затем выводим неравенство

$$\|\phi\| \Delta \|\phi\| \geq \frac{1}{p} \Phi_p(\phi, \phi). \quad (9.5)$$

Известно, что на римановом многообразии (M, g) неотрицательной секционной кривизны для произвольной симметрической формы $\phi \in S^p M$ выполняется неравенство $\Phi_p(\phi, \phi) \geq 0$ в каждой точке такого многообразия (см. [27]). Если данное предположение справедливо, то из (9.5) следует неравенство $\Delta \|\phi\| \geq 0$. В результате $\|\phi\|$ становится неотрицательной субгармонической функцией для любого бездивергентного p -тензора Кодацци $\phi \in S^p M$.

Известна теорема (см. [36]), согласно которой на полном некомпактном связном римановом многообразии неотрицательной секционной кривизны каждая неотрицательная субгармоническая функция $f \in C^2 M$ удовлетворяет условию

$$\int_M f d \text{Vol}_g = +\infty, \quad \text{если } f \neq 0.$$

Тогда, полагая $f = \|\phi\|$ для тензора Кодаци $\phi \in S_0^p M$ на полном некомпактном связном римановом многообразии неотрицательной секционной кривизны, заключаем, что $\|\phi\| = \text{const}$, если

$$\int_M \|\phi\| d\text{Vol}_g < +\infty.$$

Отсюда, в частности, следует $\nabla\phi = 0$.

С другой стороны, известна теорема (см. [43, с. 288]), согласно которой на полном римановом многообразии для каждой неотрицательной функции $f \in C^2 M$, удовлетворяющей условию $f\Delta f \geq 0$, выполняется

$$\text{либо } \int_M f^q d\text{Vol}_g = +\infty \text{ для } q > 1, \quad \text{либо } f = \text{const}.$$

Если предположить, что для $f = \|\phi\|$ выполняется неравенство

$$\int_M f^q d\text{Vol}_g < +\infty \quad \text{для хотя бы одного } q > 1,$$

то на основании теоремы Яу можем заключить, что $\|\phi\| = C$ для постоянной C . В этом случае $\nabla\phi = 0$.

Неравенство

$$\int_M f^q d\text{Vol}_g < +\infty$$

можно теперь представить в виде

$$C^q \int_M d\text{Vol}_g < +\infty,$$

если только $C \neq 0$. Осталось напомнить, что полное некомпактное риманово многообразие неотрицательной секционной кривизны имеет бесконечный объем (см. [36]). Это означает, что $\phi \equiv 0$. Доказана следующая теорема.

Теорема 9.2. *На связном полном римановом многообразии (M, g) неотрицательной секционной кривизны не существует такого ненулевого бездивергентного p -тензора ($p \geq 2$) Кодаци $\phi \in S^p M$, что*

$$\int_M \|\phi\|^q d\text{Vol}_g < +\infty \quad \text{хотя бы для одного } q \geq 1.$$

Замечание. Данная теорема обобщает наш результат из [15] о бездивергентных p -тензорах ($p \geq 2$) Кодаци на замкнутом римановом многообразии (M, g) .

Пусть $M = G/H$ — риманово симметрическое пространство компактного типа с G -инвариантной метрикой g . Тогда (M, g) является компактным римановым многообразием неотрицательной секционной кривизны (см. [6, с. 236]). Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 9.3. *На римановом симметрическом пространстве (M, g) компактного типа бездивергентный p -тензор ($p \geq 2$) Кодаци $\phi \in S^p M$ является параллельным тензорным полем. На неприводимом римановом симметрическом пространстве (M, g) компактного типа бездивергентный тензор Кодаци имеет вид $C \cdot g$ для некоторой постоянной C .*

Замечание. Более подробно геометрия p -тензора ($p \geq 2$) Кодаци изучена в [57].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М.: Мир, 1990.
2. Бургиньон Ж.-П. Формулы Вейценбека в размерности 4// в кн.: Четырехмерная риманова геометрия. Семинар Артура Бессе 1978/1979. — М.: Мир, 1985. — С. 260–279.
3. Вейль Г. Классические группы. Их инварианты и представления. — М.: ИЛ, 1947.
4. Даирбеков Н. С., Шарафутдинов В. А. Конформно киллинговы симметричные тензорные поля на римановых многообразиях// Мат. тр. — 2010. — 13, № 1. — С. 85–145.
5. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Физматлит, 1986.
6. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М.: Наука, 1981.
7. Крамер Д., Штефани Х., Херльт Э., Мак-Каллум М. Точные решения уравнений Эйнштейна. — М.: Энергоиздат, 1982.
8. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределение m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности, I// Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1971. — 5. — С. 49–94.
9. Мантуров О. В. Элементы тензорного исчисления. — М.: Просвещение, 1991.
10. Никитин А. Г. Обобщенные тензоры Киллинга произвольного порядка и порядка// Укр. мат. ж. — 1991. — 43, № 6. — С. 786–795.
11. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
12. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
13. Степанов С. Е. Об одном классе римановых структур почти произведения// Изв. вузов. Мат. — 1989. — 7. — С. 40–46.
14. Степанов С. Е. Геометрическое препятствие к существованию вполне омбилического распределения на компактном многообразии// в кн.: Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1990. — С. 135–137.
15. Степанов С. Е. Поля симметрических тензоров на компактном римановом многообразии// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 4. — С. 85–88.
16. Степанов С. Е. Интегральная формула для компактного многообразия с римановой структурой почти произведения// Изв. вузов. Мат. — 1994. — 7. — С. 69–73.
17. Степанов С. Е. О применении одной теоремы П. А. Широкова в технике Бохнера// Изв. вузов. Мат. — 1996. — 9. — С. 53–59.
18. Степанов С. Е., Родионов В. В. Дополнение к одной работе Ж. П. Бургиньона// Диффер. геом. многообр. фигур. — 1997. — № 28. — С. 68–72.
19. Степанов С. Е., Смольникова М. Б. Фундаментальные дифференциальные операторы первого порядка на внешних и симметрических формах// Изв. вузов. Мат. — 2002. — № 11. — С. 55–60.
20. Степанов С. Е., Смольникова М. В. Аффинная дифференциальная геометрия тензоров Киллинга// Изв. вузов. Мат. — 2004. — 11. — С. 82–86.
21. Шарафутдинов В. А. Киллинговы тензорные поля на 2-торе// Сиб. мат. ж. — 2016. — 57, № 1. — С. 199–221.
22. Шинкунас Ю. И. О распределении m -мерных плоскостей в n -мерном римановом пространстве// Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1973. — 5. — С. 123–133.
23. Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия. — М.: Физматлит, 1959.
24. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
25. Aleksandrova I. A., Stepanov S. E., Tsyganok I. I. A remark on a Laplacian operator which acts on symmetric tensors/ [arXiv: 1411.1928](https://arxiv.org/abs/1411.1928) [math.DG].
26. Barbance C. Sur les tenseurs symetriques// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. — 1973. — 276. — P. 387–389.
27. Bettiol R. G., Mendes R. A. E. Sectional curvature and Weitzenböck formulae/ [arXiv: 1708.09033v1](https://arxiv.org/abs/1708.09033v1) [math.DG].
28. Boucetta M. Spectre des Laplacien de Lichnerowicz sur les sphères et les projectifs réels// Publ. Mat. — 1999. — 43, № 2. — P. 451–483.
29. Bourguignon J. P. Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein// Invent. Math. — 1981. — 63. — P. 263–286.
30. Calderbank D. M. J., Gauduchon P., Herzlich M. On the Kato inequality in Riemannian geometry// in: Global Analysis and Harmonic Analysis. — Paris: Soc. Math. Fr., 2000. — P. 95–113.
31. Catino G., Mantegazza C., Mazzieri L. A note on Codazzi tensors// Math. Ann. — 2015. — 362, № 1–2. — P. 629–638.

32. *Coll B., Ferrando J. J., Saez J. A.* On the geometry of Killing and conformal tensors// J. Math. Phys. — 2006. — 47. — 062503.
33. *Derdzinski A., Shen C. L.* Codazzi tensor fields, curvature and Pontryagin forms// Proc. London Math. Soc. — 1983. — 47, № 3. — P. 15–26.
34. *Gebarowski A.* On nearly conformally symmetric warped product space-times// in: Proc. Int. Conf. “Differential Geometry and Its Applications”. — Bucharest, 1992. — P. 61–75.
35. *Chen B. Y.* Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds. — New Jersey: World Scientific, 2017.
36. *Green R. E., Wu H.* Integrals of subharmonic functions on manifolds of nonnegative curvature// Invent. Mat. — 1974. — 27. — P. 265–298.
37. *Heil K., Moroianu A., Semmelmann U.* Killing tensors on tori// J. Geom. Phys. — 2017. — 117. — P. 1–6.
38. *Heil K., Moroianu A., Semmelmann U.* Killing and conformal Killing tensors// J. Geom. Phys. — 2016. — 106. — P. 383–400.
39. *Johnson D. L., Whitt L. B.* Totally geodesic foliations on 3-manifolds// Proc. Am. Math. Soc. — 1979. — 76, № 2. — P. 355–357.
40. *Katzin G. H., Levine J.* Note on the number of linearly independent m th-order first integrals space of constant curvature// Tensor. — 1968. — 19, № 1. — P. 42–44.
41. *Kubiznak D., Frolov V. P.* The hidden symmetry of higher dimensional Kerr-NUT-AdS spacetimes// Class. Quant. Grav. — 2007. — 24, № 3. — P. F1–F6.
42. *Leder J., Schwenk-Schellschmidt A., Simon U., Wiehe M.* Generating higher order Codazzi tensors by functions// in: Geometry and Topology of Submanifolds. — London–Singapore: World Scientific, 1999. — Vol. IX. — P. 174–191.
43. *Li P., Schoen R.* L_p and mean value properties of subharmonic function on Riemannian manifolds// Acta Math. — 1984. — 153, № 1. — P. 279–301.
44. *Lichnerowicz A.* Propagateurs et commutateurs en relativite generate// Publ. Math. IHES. — 1961. — 10, № 1. — P. 5–56.
45. *Liu H. L.* Codazzi tensor and the topology of surfaces// Ann. Glob. Anal. Geom. — 1998. — 16. — P. 189–202.
46. *Liu H. L., Simon U., Wang C. P.* Higher order Codazzi tensors on conformally flat spaces// Beitr. Algebra Geom. — 1998. — 39, № 2. — P. 329–348.
47. *Mantica C. A., Molinari L. C., Suh Y. J., Shenawy S.* Perfect-fluid, generalized Robertson–Walker spacetimes, and Gray’s decomposition// J. Math. Phys. — 2019. — 60, № 5. — 052506.
48. *Merton G.* Codazzi tensors with two eigenvalue functions// Proc. Am. Math. Soc. — 2013. — 141, № 9. — P. 3265–3273.
49. *Mikeš J. et. al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.
50. *Petersen P.* Riemannian geometry. — Springer-Verlag, 2016.
51. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. A Generalization of the Bochner Technique. — Basel: Birkhäuser, 2008.
52. *Ponge R., Reckziegel H.* Twisted products in pseudo-Riemannian geometry// Geom. Dedic. — 1993. — 48. — P. 15–25.
53. *Rani R., Edgar S. B., Barnes A.* Killing tensors and conformal Killing tensors from conformal Killing vectors// Class. Quant. Grav. — 2003. — 20, № 11. — P. 1929–1942.
54. *Reinhart B. L.* Differential Geometry of Foliations. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1983.
55. *Roter W.* On a generalization of conformally symmetric metric// Tensor. — 1987. — 46. — P. 278–286.
56. *Sampson J. H.* On a theorem of Chern// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — 177. — P. 141–153.
57. *Shandra I. G., Stepanov S. E., Mikeš J.* On higher-order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2019. — 56, № 3. — P. 429–442.
58. *Stein E., Weiss G.* Generalization of the Cauchy–Riemann equations and representations of the rotation group// Am. J. Math. — 1968. — 90. — P. 163–196.
59. *Stepanov S. E.* On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field// J. Geom. Phys. — 2000. — 33, № 3. — P. 191–209.
60. *Stepanov S. E., Mikeš J.* Seven invariant classes of the Einstein equations and projective mappings// AIP Conf. Proc. — 2012. — 1460, № 1. — P. 221–225.

61. *Stepanov S. E., Mikeš J.* The spectral theory of the Yano rough Laplacian with some of its applications// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2015. — 48. — P. 37–46.
62. *Stepanov S., Mikeš J., Jukl M.* The pre-Maxwell equations// in: Geometric Methods in Physics. — Springer-Verlag, 2013. — P. 377–381.
63. *Stepanov S. E., Tsyganok I. I.* A remark on the mixed scalar curvature of a manifold with two orthogonal totally umbilical distributions// Adv. Geom. — 2019. — 19, № 3. — P. 291–296.
64. *Stepanov S. E., Tsyganok I. I., Khripunova M. B.* The Killing tensors on an n -dimensional manifold with $SL(n, R)$ -structure// Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. — 2016. — 55, № 1. — P. 121–131.
65. *Stepanov S. E., Tsyganok I. I., Mikeš J.* On the Sampson Laplacian// Filomat. — 2019. — 33, № 4. — P. 342–358.
66. *Stephani H.* A note on Killing tensors// Gen. Rel. Grav. — 1978. — 9, № 9. — P. 789–792.
67. *Sumitomo T., Tandai K.* Killing tensor fields of degree 2 and spectrum of $SO(n+1)/(SO(n-1) \times SO(2))$ // Osaka J. Math. — 1980. — 17. — P. 649–675.
68. *Tafel J.* All transverse and TT tensors in flat spaces of any dimension// Gen. Rel. Grav. — 2018. — 50, № 3. — 31.
69. *Takeuchi M.* Killing tensor fields on spaces of constant curvature// Tsukuba J. Math. — 1963. — 7, № 2. — P. 233–256.
70. *Visinescu M.* Higher-order symmetries in a gauge covariant approach and quantum anomalies// Proc. 6th Summer School “Modern Mathematical Physics” (Belgrade, Serbia, September 14–23, 2010). — Belgrade: Inst. Phys., 2011. — P. 321–332.
71. *Weir G. J.* Conformal Killing tensors in reducible spaces// J. Math. Phys. — 1977. — 18. — P. 1782–1787.
72. *Wu H.* A remark on the Bochner technique in differential geometry// Proc. Am. Math. Soc. — 1980. — 78, № 3. — P. 403–407.

Степанов Сергей Евгеньевич

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва;

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва

E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

Александрова Ирина Александровна

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

E-mail: IAleksandrova@fa.ru

Цыганок Ирина Ивановна

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

E-mail: i.i.tsyganok@mail.ru