Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Бубякин, О строении некоторых комплексов m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащих конечное число торсов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 180, 9–16

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-180-9-16>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:56:22

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 9–16
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-9-16

УДК 514.755.5

О СТРОЕНИИ НЕКОТОРЫХ КОМПЛЕКСОВ m -МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^n , СОДЕРЖАЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ТОРСОВ

© 2020 г. И. В. БУБЯКИН

Аннотация. Статья посвящена дифференциальной геометрии ρ -мерных комплексов C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащих конечное число торсов. В работе найдено необходимое условие, при котором комплекс C^ρ содержит конечное число торсов. Выясняется строение ρ -мерных комплексов C^ρ , для которых все торсы, принадлежащие комплексу C^ρ , имеют одну общую характеристическую $(m+1)$ -мерную плоскость, касающуюся вдоль m -мерной образующей торса. Такие комплексы обозначаются через $C^\rho(1)$. Определено изображение комплексов $C^\rho(1)$ на $(m+1)(n-m)$ -мерном алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ пространства P^N , где $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$, являющемся образом многообразия $G(m, n)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n при грассмановом отображении.

Ключевые слова: грассманово многообразие, комплекс многомерных плоскостей, многообразие Серге.

ON THE STRUCTURE OF SOME COMPLEXES OF m -DIMENSIONAL PLANES OF THE PROJECTIVE SPACE P^n CONTAINING A FINITE NUMBER OF TORSES

© 2020 I. V. BUBYAKIN

ABSTRACT. This paper is devoted to the differential geometry of ρ -dimensional complexes C^ρ of m -dimensional planes in the projective space P^n containing a finite number of torse. We find a necessary condition under which the complex C^ρ contains a finite number of torse. We clarify the structure of ρ -dimensional complexes C^ρ for which all torse belonging to the complex C^ρ have one common characteristic $(m+1)$ -dimensional plane that touches the torse along an m -dimensional generator. Such complexes are denoted by $C^\rho(1)$. Also, we determine the image of complexes $C^\rho(1)$ in the $(m+1)(n-m)$ -dimensional algebraic variety $\Omega(m, n)$ of the space P^N , where $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$, which is the image of the manifold $G(m, n)$ of m -dimensional planes of the projective space P^n under the Grassmann mapping.

Keywords and phrases: Grassmannian, complex of multidimensional planes, Segre manifold.

AMS Subject Classification: 53B25, 53C15

1. Введение. Данные исследования являются продолжением работы [6]. Актуальность работы заключается в том, что дифференциальная геометрия грассмановых многообразий расширяет алгебраическую теорию грассмановых многообразий, связана с исследованиями лагранжевых и квантовых грассмановых многообразий (см. [3, 4, 12, 13]), а также представляет интерес для интегральной геометрии Радона—Хелгасона (см. [7]). Данная работа посвящена дифференциальной геометрии допустимых (см. [7]) подмногообразий многообразия $G(m, n)$ m -мерных плоскостей

проективного пространства P^n , содержащих конечное число торсов. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(m, n)$ на $(m+1)(n-m)$ -мерное алгебраическое многообразие $\Omega(m, n)$ пространства P^N , где $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$. В [1, 10] М. А. Аквис отмечал, что пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m, n)$ с его касательным пространством $T_l\Omega(m, n)$ представляет собой конус Сегре $C(m+1, n-m)$. Этот конус имеет размерность n и несет плоские образующие размерностей $n-m$ и $m+1$, пересекающиеся по прямому. Проективизация $PB_l(2)$ этого конуса есть многообразие Сегре

$$S(m, n-m-1) = P^m \times P^{n-m-1}.$$

Многообразие Сегре $S(m, n-m-1)$ инвариантно при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$, являющегося проективизацией с центром в точке l касательного пространства $T_l\Omega(m, n)$ к алгебраическому многообразию $\Omega(m, n)$; будем использовать его для классификации рассматриваемых подмногообразий грассманова многообразия $G(m, n)$, а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Так как дифференциальная геометрия грассмановых многообразий далеко еще не изучена, то такой подход к их исследованию представляется актуальным. Следует заметить, что дифференциальная геометрия грассмановых многообразий представляет самостоятельный интерес, а также является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах. Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория многообразий многомерных плоскостей проективного пространства (см. [2, 5, 8, 9, 11]). Настоящая работа относится к той части многомерной проективно-дифференциальной геометрии, в которой изучаются комплексы плоскостей различных размерностей в проективном пространстве. Некоторые комплексы m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n и являются объектом изучения в данной работе. При этом для различных классов этих комплексов будем определять изображение на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ с помощью различных видов взаимного расположения многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$ и касательного пространства $PT_l\Omega(m, n)$.

2. Основные результаты. В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [6]. В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ -мерные комплексы C^ρ m -мерных плоскостей, содержащих конечное число торсов — разветвляющихся поверхностей. Условие, при котором комплексы C^ρ содержат конечное число торсов, определяется из следующих рассуждений. Рассмотрим проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(m, n)$ с центром в точке l . Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$. На основании теоремы Грассмана (см. [14]) в этом проективном пространстве должно выполняться следующее равенство:

$$\dim PT_lV^\rho + \dim S_l(m, n-m-1) = \dim P^{(m+1)(n-m)-1} + \dim(PT_lV^\rho \cap S_l(m, n-m-1)).$$

Если размерность пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$ равна r , то получим

$$(\rho-1) + (m + (n-m-1)) = (m+1)(n-m) - 1 + r.$$

Отсюда следует, что

$$\rho-1 = m(n-m-1) + r.$$

Утверждение, что комплекс C^ρ m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов, означает равенство нулю размерности пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$, т.е. $r = 0$. Если $r = 0$, то искомую зависимость размерности комплекса C^ρ , его m -мерной образующей и проективного пространства P^n получаем в виде

$$\rho-1 = m(n-m-1).$$

Таким образом, комплекс C^ρ m -мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов тогда и только тогда, когда размерность комплекса C^ρ , его m -мерной образующей и проективного пространства P^n связаны соотношением $\rho-1 = m(n-m-1)$.

Для конгруэнций прямых трехмерного пространства и пятимерных комплексов двумерных плоскостей пятимерного пространства, которые содержат конечное число торсов, обнаруживается инвариантная зависимость их строения от конфигурации характеристических $(m+1)$ -мерных плоскостей, касательных к торсам, и характеристических $(m-1)$ -мерных плоскостей в m -мерной образующей L этих многообразий (4). Отсюда возникает вопрос: имеют ли рассматриваемые комплексы C^ρ m -мерных плоскостей, содержащие конечное число торсов, подобную инвариантную зависимость?

Комплексу C^ρ при грассмановом отображении (см. [10]) соответствует ρ -мерное многообразие V^ρ , лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$, являющемся образом многообразия $G(m, n)$ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n . В каждой своей точке l , соответствующей m -мерной плоскости L проективного пространства P^n , многообразие V^ρ имеет ρ -мерную касательную плоскость $T_l V^\rho$. Проективизация касательной плоскости $T_l V^\rho$ с центром в точке l представляет собой $(\rho-1)$ -мерную проективную плоскость $PT_l V^\rho$. Различным видам взаимного расположения плоскости $PT_l V^\rho$ и инвариантного многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1) = P^m \times P^{n-m-1}$, являющимся проективизацией асимптотического конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка, соответствуют различные классы комплексов $C^\rho \subset G(m, n)$. При этом конус $B_l(2)$ есть конус Сегре $C(m+1, n-m)$ и представляет собой пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m, n)$ и его касательного пространства $T_l \Omega(m, n)$, т.е.

$$B_l(2) = \Omega(m, n) \cap T_l \Omega(m, n).$$

В проективном пространстве P^n рассмотрим семейство точечных реперов

$$A_I, \quad I, J, K = 0, 1, \dots, n,$$

и семейство реперов, образованных гиперплоскостями

$$\alpha^I = (-1)^I A_0 \wedge \dots \wedge A_{I-1} \wedge A_{I+1} \wedge \dots \wedge A_n.$$

Уравнения перемещения этих реперов имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_I^J \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^n :

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Пусть L — m -мерная плоскость пространства P^n . Свяжем с этой плоскостью семейство точечных реперов так, чтобы точки A_i , $i = 0, 1, \dots, m$, принадлежали плоскости L . Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \quad dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q,$$

где $i, j = 0, 1, \dots, m$ и $p, q = m+1, m+2, \dots, n$. Отсюда видно, что m -мерная плоскость L в пространстве P^n зависит от $(m+1)(n-m)$ параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_i^p . На многообразии $\Omega(m, n)$ асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки l , определяются условием

$$d^2 l = 0 \pmod{T_l \Omega(m, n)}.$$

Откуда следует, что уравнения конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0. \quad (1)$$

Из этих уравнений видно, что координаты ω_i^p точки конуса $B_l(2)$ допускают параметрическое представление

$$\omega_i^p = a_i x^p. \quad (2)$$

Поэтому конус $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Сегре $C_l(m+1, n-m)$.

Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости $T_l \Omega(m, n)$ с центром в точке l . Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l \Omega(m, n)$,

в котором формы ω_i^p являются однородными координатами произвольной точки. При проективизации асимптотическому конусу $B_l(2)$ соответствует многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ проективного пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$, определяемого теми же уравнениями (1), что и конус $B_l(2)$ в касательном пространстве $T_l\Omega(m, n)$. Многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ представляет собой $((m + 1)(n - m) - 1) - m(n - m - 1) = (n - 1)$ -мерную алгебраическую поверхность порядка $\binom{n-1}{m} = \binom{n-1}{n-m-1}$ (см. [14, 15]), несущую два семейства плоских образующих размерностей m и $n - m - 1$, зависящих соответственно от $n - m - 1$ и m параметров. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Через каждую его точку проходит по одной образующей из каждого семейства. Многообразие Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ остается инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$. Плоскость PT_lV^p в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$ определяется теми же уравнениями, что и касательная плоскость T_lV^p в касательном пространстве $T_l\Omega(m, n)$. Поскольку на комплексе C^p m -мерная плоскость L зависит от p параметров, то среди форм ω_i^p лишь p линейно независимых. Следовательно, комплекс C^p задается α ($\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$) дифференциальными уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (3)$$

где ω_i^p — линейные дифференциальные формы, обращение в нуль которых фиксирует m -мерную плоскость L на комплексе C^p .

Рассмотрим однопараметрическое семейство m -мерных плоскостей L в пространстве P^n . Такое семейство представляет собой $(m + 1)$ -мерную поверхность с m -мерными плоскими образующими. Эта поверхность называется торсом (см. [2, 11]), если она является тангенциально вырожденной поверхностью ранга один. Торсу на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этого многообразия. Данная кривая является асимптотической линией многообразия $\Omega(m, n)$, поэтому в произвольной точке этой линии выполняются уравнения (1). Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве P^n можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \quad (4)$$

Каждый торс, проходящий через m -мерную плоскость L , определяет на ней характеристическую $(m - 1)$ -мерную плоскость, которая является пересечением двух бесконечно близких образующих, и характеристическую $(m + 1)$ -мерную плоскость, касательную плоскость к торсу. Найдем уравнения характеристических образов торсов. Пусть $M = x^i A_i$, $i = 0, 1, \dots, m$, — произвольная точка m -мерной плоскости L . Дифференциал этой точки в силу (4) вычисляется следующим образом:

$$dM = (dx^i + x^j \omega_j^i) A_i + (a_i x^i) (x^p A_p) dt,$$

где $p = m + 1, m + 2, \dots, n$. Отсюда видно, что характеристическая $(m - 1)$ -мерная плоскость в m -мерной плоской образующей L комплекса C^p определяется уравнением

$$a_i x^i = 0,$$

а характеристическая $(m + 1)$ -мерная плоскость, содержащая m -мерную плоскую образующую L комплекса C^p определяется m -мерной плоскостью L и точкой:

$$S = x^p A_p.$$

Из уравнений (3), ввиду (4), получим следующую систему уравнений:

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0, \quad (5)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$. Эта система уравнений определяет характеристическую $(m - 1)$ -мерную плоскость торса, принадлежащего комплексу C^p , если выполняется условие

$$\text{rank}(\Lambda_p^{\alpha i}) = n - m. \quad (6)$$

Из этого соотношения определяются характеристические $(m-1)$ -мерные плоскости на m -мерной образующей L комплекса C^ρ . Условие

$$\text{rank}(\Lambda_p^{\alpha i} x^p) = m + 1 \quad (7)$$

определяет точки S пересечения характеристических $(m+1)$ -мерных плоскостей с двойственной $(n-m)$ -мерной плоскостью к m -мерной плоскости L в пространстве P^n . Эти точки вместе с m -мерной плоскостью L определяют $(m+1)$ -мерные характеристические плоскости тора.

В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ -мерный комплекс C^ρ ($\rho = m(n-m-1) + 1$) m -мерных плоскостей L и $m+1$ различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^ρ , и пусть эти торсы имеют общую характеристическую $(m+1)$ -мерную плоскость, касающуюся вдоль m -мерной образующей тора. Обозначим рассматриваемые комплексы через $C^\rho(1)$. Свяжем с комплексами $C^\rho(1)$ репер так, чтобы плоскости

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m, \quad A_0 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m, \quad \dots, \quad A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_{m-1}$$

совместились с $(m-1)$ -мерными характеристическими плоскостями $m+1$ различных торсов. В общую $(m+1)$ -мерную характеристическую плоскость этих торсов поместим вершину A_n . Тогда, ввиду этого, из (4) получим

$$\Lambda_n^{\alpha 0} = \Lambda_n^{\alpha 1} = \dots = \Lambda_n^{\alpha m} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

Специализация репера позволяет выбрать линейные дифференциальные формы $\omega_0^n, \omega_1^n, \dots, \omega_m^n$ в качестве базисных на комплексе $C^\rho(1)$.

Дополним данные линейные формы до базиса комплекса $C^\rho(1)$ линейными формами $\omega_{i^*}^{p^*}$, где $i^* = 0, 1, \dots, m-1$ и $p^* = m+2, m+3, \dots, n$. Рассмотрим комплексы $C^\rho(1)$ общего вида и определим их системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1^{m+1} &= \omega_0^{m+2}, \quad \omega_2^{m+1} = \omega_1^{m+2} = \omega_0^{m+3}, \quad \dots, \\ \omega_m^{n-3} &= \omega_{m-1}^{n-2} = \omega_{m-2}^{n-1}, \quad \omega_m^{n-2} = \omega_{m-1}^{n-1}, \quad \Lambda_{p^*}^{\alpha^* i} \omega_i^{p^*} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $p^* = m+1, m+2, \dots, n-1$; $\alpha^* = 1, 2, \dots, (n-1) - m(n-m-2)$ и

$$|\alpha| - |\alpha^*| = m(n-m-2); \quad |\alpha| = n-1.$$

Дифференцируя внешним образом первую группу уравнений (9), получим независимые квадратичные уравнения, из которых согласно теореме Картана (см. [14]) будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_n^{m+1} &= \lambda_n^{m+10} \omega_0^n + \lambda_n^{m+11} \omega_1^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{m+2} &= \lambda_n^{m+20} \omega_0^n + \lambda_n^{m+21} \omega_1^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \lambda_n^{m+20} &= \lambda_n^{m+11}, \\ \omega_n^{m+1} &= \lambda_n^{m+11} \omega_1^n + \lambda_n^{m+12} \omega_2^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{m+2} &= \lambda_n^{m+21} \omega_1^n + \lambda_n^{m+22} \omega_2^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \lambda_n^{m+21} &= \lambda_n^{m+12}, \\ \omega_n^{m+2} &= \lambda_n^{m+20} \omega_0^n + \lambda_n^{m+21} \omega_1^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{m+3} &= \lambda_n^{m+30} \omega_0^n + \lambda_n^{m+31} \omega_1^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \lambda_n^{m+30} &= \lambda_n^{m+11}, \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_n^{n-3} &= \lambda_n^{n-3m-1} \omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-3m} \omega_m^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{n-2} &= \lambda_n^{n-2m-1} \omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-2m} \omega_m^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \lambda_n^{n-2m-1} &= \lambda_n^{n-3m}, \\ \omega_n^{n-2} &= \lambda_n^{n-2m-2} \omega_{m-2}^n + \lambda_n^{n-2m-1} \omega_{m-1}^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\ \omega_n^{n-1} &= \lambda_n^{n-1m-2} \omega_{m-2}^n + \lambda_n^{n-1m-1} \omega_{m-1}^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{n-1m-2} &= \lambda_n^{n-2m-1}, \\
\omega_n^{n-2} &= \lambda_n^{n-2m-1} \omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-2m} \omega_m^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\
\omega_n^{n-1} &= \lambda_n^{n-1m-1} \omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-1m} \omega_m^n \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \\
\lambda_n^{n-1m-1} &= \lambda_n^{n-2m}.
\end{aligned}$$

При этом

$$|\rho^*| = |\rho| - (m+1) = (m(n-m-1) + 1) - (m+1) = m(n-m-2).$$

Ввиду симметричности матрицы коэффициентов разложения форм $\omega_n^{m+1}, \omega_n^{m+2}, \dots, \omega_n^{n-1}$ получим

$$\omega_n^{m+1} = 0 \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \quad \omega_n^{m+2} = 0 \pmod{\Theta^{\rho^*}}, \quad \dots, \quad \omega_n^{n-1} = 0 \pmod{\Theta^{\rho^*}}.$$

Таким образом, $(m+1)$ -мерная плоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ описывает $m(n-m-2)$ -мерное многообразие.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим произвольное $m(n-m-2)$ -мерное многообразие $(m+1)$ -мерных плоскостей. Точки $A_0, A_1, \dots, A_m, A_n$ поместим в текущую $(m+1)$ -мерную плоскость рассматриваемого многообразия. Перемещение $(m+1)$ -мерной образующей $m(n-m-2)$ -мерного многообразия определяется формами $\omega_i^{p^*}$, где $i = 1, 2, \dots, m, p^* = m+1, m+2, \dots, n-1$. Поскольку рассматриваемое многообразие представляет собой $m(n-m-2)$ -параметрическое семейство $(m+1)$ -мерных плоскостей, то формы $\omega_i^{p^*}$ и $\omega_n^{p^*}$ выражаются через $m(n-m-2)$ линейно независимые формы Θ^{ρ^*} :

$$\omega_i^{p^*} = \lambda_{i\rho^*}^{p^*} \Theta^{\rho^*}, \quad \omega_n^{p^*} = \lambda_{n\rho^*}^{p^*} \Theta^{\rho^*}, \quad (10)$$

где $\rho^* = 1, 2, \dots, m(n-m-2)$. Совокупность m -мерных плоскостей, лежащих в $(m+1)$ -мерной плоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ некоторого $m(n-m-2)$ -мерного многообразия, образует $(m+1)$ -параметрическое семейство. Следовательно, m -мерные плоскости, лежащие во всех $(m+1)$ -мерных плоскостях $m(n-m-2)$ -мерного многообразия, образуют ρ -мерный комплекс C^ρ размерности

$$\rho = m(n-m-2) + (m+1) = m(n-m-1) + 1.$$

Покажем, что построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1)$. Поместим вершины $A_0, A_1, \dots, A_m$ в текущую m -мерную плоскость комплекса $C^\rho(1)$. Тогда, исключая из первой группы дифференциальных уравнений (10) формы Θ^{ρ^*} , получим

$$(m+1)((n-1) - (m+1) - 1) - \rho^* = (m+1)((n-1) - (m+1) - 1) - m(n-m-2) = n-1$$

линейных однородных уравнений, связывающих формы $\omega_i^{p^*}$, которые можно записать в виде

$$\Lambda_{p^*}^{\alpha i} \omega_i^{p^*} = 0. \quad (11)$$

Отсюда следует, что выполняются соотношения (8). Значит, построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1)$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Комплекс C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1)$ тогда и только тогда, когда его m -мерные образующие принадлежат $(m+1)$ -мерным плоскостям некоторого $m(n-m-2)$ -мерного многообразия.*

Изображение комплексов $C^\rho(1)$ на алгебраическом многообразии $\Omega(m, n)$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Комплекс C^ρ m -мерных плоскостей проективного пространства P^n , содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1)$ тогда и только тогда, когда для каждой его m -мерной образующей пересечение плоскости $PT_l V^\rho$ с многообразием Сегре $S_l(m, n-m-1)$ содержит α -образующую многообразия $S_l(m, n-m-1)$.*

Действительно, пусть комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1)$. Выбирая специальным образом репер, уравнения комплекса, а следовательно, и соответствующей плоскости $PT_l V^\rho$ пространства $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l \Omega(m, n)$, можно привести к виду (11) или к параметрическим уравнениям вида

$$\omega_i^{p^*} = \lambda_{i\rho^*}^{p^*} \Theta^{\rho^*}. \quad (12)$$

В силу этих уравнений пересечение плоскости $PT_l V^\rho$ и многообразия Сегре $S_l(m, n - m - 1)$ определяется условием

$$\text{rank}(\omega_i^{p^*} \omega_i^n) = 1, \quad (13)$$

где формы $\omega_i^{p^*}$ удовлетворяют уравнениям (12) и выражаются через $m(n - m - 2)$ базисных форм Θ^{ρ^*} ($\rho^* = 1, 2, \dots, m(n - m - 2)$). Поскольку формы ω_i^n и θ^{ρ^*} являются однородными координатами произвольной точки плоскости $PT_l V^\rho$, получим, что m -мерная плоскость, лежащая в плоскости $PT_l V^\rho$ и определяемая уравнениями

$$\Theta^{\rho^*} = 0, \quad (14)$$

принадлежит многообразию Сегре $S_l(m, n - m - 1)$. Такая m -мерная плоскость совпадает с α -образующей многообразия $S_l(m, n - m - 1)$, заданной уравнениями

$$\omega_i^{p^*} = 0. \quad (15)$$

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть пересечение плоскости $PT_l V^\rho$ и многообразия $S_l(m, n - m - 1)$ содержит α -образующую многообразия $S_l(m, n - m - 1)$, определяемую уравнениями (15). Предположим, что гиперплоскость $\alpha^n = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{n-1}$ является неособой, т.е. формы ω_i^n линейно независимы, и их можно принять за $m + 1$ из $\rho = m(n - m - 1) + 1$ однородных координат произвольной точки плоскости $PT_l V^\rho$. Плоскость $PT_l V^\rho$ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l \Omega(m, n)$ определяется уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, \quad (16)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$; $i = 0, 1, \dots, m$. Поскольку рассматриваемая α -образующая многообразия $S_l(m, n - m - 1)$ лежит в данной плоскости, то уравнения (16) должны выполняться тождественно в силу (15). Подставляя (15) в (16) получим

$$\Lambda_n^{\alpha i} \omega_i^n = 0. \quad (17)$$

Так как формы ω_i^n линейно независимы, то из уравнений (17) следует, что

$$\Lambda_n^{\alpha i} = 0.$$

Очевидно, что это соотношение совпадает с соотношениями (8). Следовательно, комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1)$. Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акивис М. А. Ткани и почти грассмановы структуры // Сиб. мат. ж. — 1982. — 23, № 6. — С. 6–15.
2. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Многообразия с вырожденным гауссовым отображением с кратными фокусами и скрученные конусы // Изв. вузов. Мат. — 2003. — № 11. — С. 3–14.
3. Арнольд В. И. Комплексный лагранжев грассманиан // Функц. анализ. прилож. — 2000. — 34, № 3. — С. 63–65.
4. Арнольд В. И. Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства // Функц. анализ. прилож. — 2001. — 35, № 1. — С. 74–77.
5. Бубякин И. В. Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. — Новосибирск: Наука, 2001.
6. Бубякин И. В. О строении комплексов m -мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов // Мат. заметки СВФУ. — 2017. — 24, № 4. — С. 3–16.
7. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: Добросвет, 2007.
8. Макоха А. Н. Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей B_3 // Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 11. — С. 15–26.

9. *Стеганцева П. Г., Гречнева М. А.* Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 2. — С. 65–75.
10. *Akivis M. A.* On the differential geometry of a Grassmann manifold// Tensor. — 1982. — 38. — P. 273–282.
11. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective Differential Geometry of Submanifolds. — Amsterdam: North-Holland, 1993.
12. *Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., Trnka J.* Scattering Amplitudes and the Positive Grassmannian, 2012/ [arXiv:1212.5605 \[hep-th\]](#).
13. *Arkani-Hamed N., Trnka J.* The Amplituhedron// J. High Energy Phys. — 2014. — № 10. — P. 1–35.
14. *Landsberg J. M.* Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry, 1998/ [arXiv:math/9809184 \[math.AG\]](#).
15. *Room T. G.* The Geometry of Determinantal Loci. — Cambridge, 1938.

Бубякин Игорь Витальевич

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

E-mail: bubyakiniv@mail.ru