Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Клепикова, О. П. Хромова, О предписанных значениях оператора секционной кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 180, 41–49

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-180-41-49>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:43:28

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 41–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-41-49

УДК 514.765

О ПРЕДПИСАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРА СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2020 г. С. В. КЛЕПИКОВА, О. П. ХРОМОВА

Аннотация. В работе решена задача о предписанных значениях оператора секционной кривизны на трехмерном локально однородном лоренцевом многообразии. Получены теоремы о необходимых и достаточных условиях на оператор секционной кривизны такого многообразия.

Ключевые слова: алгебра Ли, группа Ли, левоинвариантная лоренцева метрика, оператор кривизны, спектр.

ON PRESCRIBED VALUES OF THE OPERATOR OF SECTIONAL CURVATURE ON THREE-DIMENSIONAL LOCALLY HOMOGENEOUS LORENTZIAN MANIFOLDS

© 2020 S. V. KLEPIKOVA, O. P. KHROMOVA

ABSTRACT. In this paper, the problem of prescribed values of the operator of sectional curvature on a three-dimensional locally homogeneous Lorentzian manifolds is solved. Necessary and sufficient conditions for the operator of sectional curvature of such manifolds are obtained.

Keywords and phrases: Lie algebra, Lie group, left-invariant Lorentzian metric, curvature operator, spectrum.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30, 53C50

1. Введение. Задачи о восстановлении (псевдо)риманова многообразия по предписанному спектру оператора кривизны являются актуальным направлением в исследовании операторов кривизны. Римановы локально однородные пространства с предписанными значениями спектра оператора Риччи были определены О. Ковальским и С. Никчевич в [10]. В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского [7], в которой исследуется задача о существовании группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданными значениями спектра оператора Риччи. Имеется также несколько работ по этой проблеме в неоднородном случае (см. [6, 9]).

Подобные результаты были получены Д. Н. Оскорбиным, Е. Д. Родионовым, О. П. Хромовой для оператора одномерной кривизны и оператора секционной кривизны в случае трехмерных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00033 мол_а).

групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой (см. [1, 2]). Некоторые результаты о восстановлении (псевдо)римановых метрик и аффинных связностей по заданному тензору кривизны содержится в статье Й. Микеша и А. Ванжуровой [12], а также в монографии [11].

Основная цель данной работы — изучить вопрос о предписанных значениях оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях.

В отличие от случая римановой метрики, где всегда существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{K}$ диагональна, в лоренцевом случае могут возникнуть различные случаи, известные как *типы Сегре* (см. [4]). Возможны следующие варианты:

1. Тип Сегре $\{111\}$: $\mathcal{K}$ имеет три действительных собственных значения (возможно, совпадающих), каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство.
2. Тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$: $\mathcal{K}$ имеет одно действительное и два комплексно сопряженных собственных значения.
3. Тип Сегре $\{21\}$: $\mathcal{K}$ имеет два действительных собственных значения (возможно, совпадающих), первый из которых имеет алгебраическую кратность 2, каждому из которых соответствует одномерное собственное подпространство.
4. Тип Сегре $\{3\}$: $\mathcal{K}$ имеет одно действительное собственное значение алгебраической кратности 3 и соответствующее ему одномерное собственное подпространство.

2. Трехмерные однородные лоренцевы многообразия. Пусть (M, g) — трехмерное однородное многообразие с лоренцевой метрикой g сигнатуры $(+, +, -)$. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивиты и через R тензор кривизны, который определим следующим образом:

$$R(X, Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X, Y]}Z.$$

Лоренцева метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на расслоении $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle = \det(\langle X_i, Y_j \rangle).$$

Тензор кривизны R в любой точке можно рассматривать как оператор $\mathcal{K}: \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$, называемый *оператором секционной кривизны* и определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{K}(Z \wedge T) \rangle = R(X, Y, Z, T).$$

Исследование операторов кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях основывается на следующей теореме.

Теорема 1 (Дж. Кальварузо, см. [5]). *Пусть (M, g) — трехмерное локально однородное лоренцево многообразие. Тогда либо (M, g) является локально симметричным, либо оно локально изометрично трехмерной группе Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой.*

Следующая классификация для трехмерных лоренцевых групп Ли была получена в [3].

Теорема 2. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если G унимодулярна, то в алгебре Ли группы G существует такой псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

(а) *случай $\mathcal{A}_1$:*

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,$$

где e_1 времениподобен;

(б) *случай $\mathcal{A}_2$:*

$$[e_1, e_2] = (1 - \lambda_2)e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \lambda_2)e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,$$

где e_3 времениподобен;

(с) *случай $\mathcal{A}_3$:*

$$[e_1, e_2] = e_1 - \lambda e_3, \quad [e_1, e_3] = -\lambda e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

где e_3 времениподобен;

Таблица 1. Трехмерные унимодулярные алгебры Ли

Алгебра Ли	Ограничения на структурные константы			
	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4$
$\mathfrak{su}(2)$	$(+, +, +)$	—	—	—
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$(+, +, -)$	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$	$\lambda \neq 0$	$\lambda_3 \neq 0$
$\mathfrak{e}(2)$	$(+, +, 0)$	—	—	—
$\mathfrak{e}(1, 1)$	$(+, -, 0)$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ или $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$	$\lambda = 0$	$\lambda_3 = 0$
$\mathfrak{h}$	$(+, 0, 0)$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$	—	—
$\mathbb{R}^3$	$(0, 0, 0)$	—	—	—

(d) случай $\mathcal{A}_4$:

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\beta e_1 - \alpha e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha e_1 + \beta e_2,$$

где e_1 временноподобен и $\beta \neq 0$.

2. Если G не является унимодулярной, то в алгебре Ли группы G существует такой псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

(a) случай $\mathcal{A}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \lambda \sin \varphi e_1 - \mu \cos \varphi e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda \cos \varphi e_1 + \mu \sin \varphi e_2,$$

где e_3 временноподобен и $\sin \varphi \neq 0$, $\lambda + \mu \neq 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$;

(a) случай $\mathcal{B}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = t e_1 - s e_2, \quad [e_2, e_3] = p e_1 + q e_2,$$

с ненулевыми $\langle e_2, e_2 \rangle = -\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ и $q \neq t$;

(a) случай $\mathcal{C}_1$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = s e_1 + p e_2, \quad [e_2, e_3] = p e_1 + q e_2,$$

где e_2 временноподобен и $q \neq s$;

(a) случай $\mathcal{C}_2$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = q e_1 - r e_2, \quad [e_2, e_3] = p e_1 + q e_2,$$

где e_2 временноподобен и $q \neq 0$, $p + r \neq 0$.

Замечание 1. Существуют ровно шесть неизоморфных трехмерных унимодулярных алгебр Ли и соответствующих им типов унимодулярных трехмерных групп Ли (см. [13]). Все они приведены в таблице 1 вместе с условиями на структурные константы, при которых алгебра Ли имеет данный тип. Если в таблице 1 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли, и столбца, соответствующему типу, стоит знак «—», значит, что для данной алгебры Ли невозможен соответствующий тип базиса. Для случая алгебры Ли $\mathcal{A}_1$ указаны только знаки тройки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ с точностью до перестановки и замены знака. Отметим, что подобные базисы также были построены в [5, 8].

Следующий классификационный результат для случая трехмерных лоренцевых локально симметричных пространств был получен в [5].

Теорема 3. Трехмерное локально симметричное многообразие (M, g) локально изометрично одному из следующих многообразий:

- (I) лоренцевой пространственной форме $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{S}_1^3$ или $\mathbb{H}_1^3$ (с нулевой, положительной или отрицательной секционной кривизной соответственно);
- (II) прямому произведению $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{H}_1^2$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_1$ или $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$;

(III) многообразию с лоренцевой метрикой g , которое допускает такую локальную систему координат (u_1, u_2, u_3) , что метрический тензор имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(u_2, u_3) \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $f(u_2, u_3) = u_2^2 \alpha + u_2 \beta(u_3) + \xi(u_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, β, ξ — произвольные гладкие функции.

3. Трехмерные лоренцевы группы Ли. Далее под «трехмерной лоренцевой группой Ли $(G, \mathfrak{g})$ » будем понимать трехмерную группу Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 4. Трехмерная унимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{A}_1)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$, а собственные значения k_1, k_2, k_3 удовлетворяют одному (или более) из условий:

- (i) $k_1 = k_2 = k_3 = 0$;
- (ii) ровно два из $k_1 + k_2, k_1 + k_3$ и $k_2 + k_3$ равны нулю;
- (iii) $(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3) < 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагональна, причем собственные значения k_1, k_2, k_3 действительны и равны

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{4}(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2)^2 + \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3), \\ k_2 &= -\frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2), \\ k_3 &= -\frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2). \end{aligned}$$

Пусть

$$\mu_i = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \delta_i \lambda_i,$$

где $\delta_1 = 1, \delta_2 = \delta_3 = -1$. Тогда

$$k_1 + k_2 = -2\mu_1\mu_2, \quad k_1 + k_3 = -2\mu_1\mu_3, \quad k_2 + k_3 = -2\mu_2\mu_3.$$

Предположим, что как минимум два из μ_i равны нулю. Тогда все три правые части в вышеприведенных уравнениях равны нулю, и система имеет единственное решение $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Пусть один из μ_i равен нулю; тогда ровно два из чисел $k_1 + k_2, k_1 + k_3, k_2 + k_3$ равны нулю.

Предположим, что $\mu_i \neq 0$; тогда

$$\mu_i^2 = -\frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3)}{(k_1 + k_2 + k_3 - k_i)^2},$$

и система разрешима тогда и только тогда, когда

$$(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3) < 0. \quad \square$$

Теорема 5. Трехмерная унимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{A}_2)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $k_1 = -k_2 = -k_3 \geq 0$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с собственными значениями
 - (a) $k_1 = k_2 = 0$ или
 - (b) $k_2 < 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_1^2 & 2\lambda_2 - \lambda_1 \\ 0 & -2\lambda_2 + \lambda_1 & -2\lambda_2 + \lambda_1 - \frac{1}{4}\lambda_1^2 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda_1 = 2\lambda_2$, то матрица диагонализируема с собственными значениями $k_1 = -k_2 = -k_3 \geq 0$. Иначе, матрица оператора $\mathcal{K}$ имеет следующую жорданову форму:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} -\lambda_1\lambda_2 + \frac{3}{4}\lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\lambda_1^2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\lambda_1^2 \end{pmatrix},$$

и собственные значения равны

$$k_1 = -\lambda_1\lambda_2 + \frac{3}{4}\lambda_1^2, \quad k_2 = -\frac{1}{4}\lambda_1^2 \leq 0.$$

Если $k_2 = 0$, то $\lambda_1 = 0$ и все собственные значения равны нулю.

Предположим, что $k_2 < 0$; тогда $\lambda_1 = \pm 2\sqrt{-k_2}$. Выражая λ_2 , получаем

$$\lambda_2 = \mp \frac{k_1 + 3k_2}{2\sqrt{-k_2}}.$$

□

Теорема 6. *Трехмерная унимодулярная лоренцева группа $Li(G, \mathcal{A}_3)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{21\}$ с собственными значениями $k_1 = k_2 = 0$;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{3\}$ с собственным значением $k_1 < 0$.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\lambda^2 & \lambda & -\lambda \\ \lambda & 2 - \frac{1}{4}\lambda^2 & -2 \\ \lambda & 2 & -2 - \frac{1}{4}\lambda^2 \end{pmatrix}$$

с совпадающими собственными значениями равными $-\lambda^2/4 \leq 0$. Если $\lambda = 0$, то $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{21\}$ и $k_1 = k_2 = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{3\}$ и $k_1 < 0$. □

Теорема 7. *Трехмерная унимодулярная лоренцева группа $Li(G, \mathcal{A}_4)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ и $k_1 = k_2 = -k_3 < 0$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{z\bar{z}1\}$ и $k_1 + k_2 < 0$.

Доказательство. В данном случае оператор $\mathcal{K}$ имеет собственные значения

$$k_1 = \bar{k}_2 = -\beta^2 - \frac{1}{4}\lambda_3^2 \pm i\beta(2\alpha - \lambda_3), \quad k_3 = -\lambda_3\alpha + \frac{3}{4}\lambda_3^2 + \beta^2,$$

где i — мнимая единица.

Пусть $x = -\beta^2 - \lambda_3^2/4 < 0$ и $y = \beta(2\alpha - \lambda_3)$; тогда $k_1 = \bar{k}_2 = x + iy$. Если $\lambda_3 = 2\alpha$, то

$$k_3 = \alpha^2 + \beta^2 > 0, \quad x = -\alpha^2 - \beta^2 < 0, \quad y = 0.$$

Следовательно, $k_1 = k_2 = -k_3 < 0$, и собственные значения действительны.

Предположим, что $\lambda_3 \neq 2\alpha$; тогда

$$\beta = \frac{y}{2\alpha - \lambda_3} \neq 0, \quad k_3 + x = -\lambda_3\alpha + \frac{1}{2}\lambda_3^2.$$

Если $\lambda_3 = 0$, то

$$k_3 = \beta^2, \quad x = -\beta^2, \quad y = 2\alpha\beta.$$

Иначе $\lambda_3 \neq 0$ и $k_3 + x \neq 0$. Тогда

$$\alpha = \frac{\lambda_3^2 - 2k_3 - 2x}{2\lambda_3}, \quad \lambda_3 = \pm 2|k_3 + x| \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{(k_3 + x)^2 + y^2}}. \quad \square$$

Теорема 8. *Трехмерная неунимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{A})$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$, и собственные значения k_1, k_2, k_3 удовлетворяют одному (или более) из следующих условий:*

- (i) $k_1 = k_2 = k_3 > 0$;
- (ii) $k_1 k_3 \leq k_2^2 < \left(\frac{k_1 + k_3}{2}\right)^2$ и $k_2 < \frac{k_1 + k_3}{2}$ с точностью до переобозначения.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагонализируема с действительными собственными значениями k_1, k_2, k_3 равными

$$k_1 = -\frac{1}{4}(\lambda + \mu)^2 \cos^2 \varphi + \lambda^2, \quad k_2 = -\frac{1}{4}(\lambda + \mu)^2 \cos^2 \varphi + \mu\lambda, \quad k_3 = -\frac{1}{4}(\lambda + \mu)^2 \cos^2 \varphi + \mu^2. \quad (1)$$

Отметим, что $k_1 - 2k_2 + k_3 = (\lambda - \mu)^2 \geq 0$. Если выполняется равенство нулю, то $\lambda = \mu \neq 0$ и $k_1 = k_2 = k_3 = \lambda^2 \sin^2 \varphi > 0$.

Предположим, что $k_1 - 2k_2 + k_3 > 0$ и $\lambda \neq \mu$. Рассмотрим разности

$$k_1 - k_2 = \lambda(\lambda - \mu), \quad k_1 - k_3 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu) \neq 0, \quad k_3 - k_2 = \mu(\mu - \lambda).$$

В силу условий $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ система имеет решение

$$\lambda = \frac{|k_1 - k_2|}{\sqrt{k_1 - 2k_2 + k_3}}, \quad \mu = \frac{|k_2 - k_3|}{\sqrt{k_1 - 2k_2 + k_3}}.$$

Подставляя данное решение назад в (1), получаем

$$0 \leq \cos^2 \varphi = 4 \frac{k_2^2 - k_1 k_3}{(k_1 - k_3)^2} < 1.$$

Тогда необходимо $k_2^2 - k_1 k_3 \geq 0$ и $(k_1 + k_3)^2 - 4k_2^2 > 0$. $\square$

Теорема 9. *Трехмерная неунимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{B})$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ и $k_1 = -3k_2 = -3k_3 \geq 0$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ и $k_1 = -3k_2 \geq 0$.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}s^2 & qs & ps - q^2 - qt \\ 0 & \frac{3}{4}s^2 & -qs \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}s^2 \end{pmatrix}.$$

Если $s = q = 0$ или $s = 0, q = -t$, то матрица оператора $\mathcal{K}$ тривиальна.

Если $ps - qt = 0$, то матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $k_1 = 3s^2/4, k_2 = k_3 = -s^2/4$.

Иначе, матрица оператора $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с собственными значениями $k_1 = 3s^2/4, k_2 = -s^2/4$. $\square$

Теорема 10. *Трехмерная неунимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{C}_1)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $k_2 \leq 0, k_3 \leq 0, k_2^2 + k_3^2 > 0, |k_1| \leq \sqrt{k_2 k_3}$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$, причем $|k_1| \leq -\frac{k_2 + k_3}{2}$.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагонализируема, а ее собственные значения k_1, k_2, k_3 равны

$$\begin{aligned} k_1 &= qs, \\ k_2 &= -\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}|q+s|\sqrt{(q-s)^2 - 4p^2}, \\ k_3 &= -\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}|q+s|\sqrt{(q-s)^2 - 4p^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим величину $k_2k_3 - k_1^2 = (q+s)^2p^2 \geq 0$. Если выполняется равенство нулю, то

$$p = 0, \quad s = \pm\sqrt{-k_2}, \quad q = \pm\sqrt{-k_3}, \quad k_1 = qs \quad \text{или} \quad q = -s, \quad k_1 = k_2 = k_3 = -s^2 < 0.$$

В противном случае

$$k_2k_3 - k_1^2 > 0, \quad p^2 = \frac{k_2k_3 - k_1^2}{(q+s)^2}.$$

Далее рассмотрим систему

$$k_1 = qs, \quad k_2 + k_3 = -q^2 - s^2 < 0,$$

имеющую решение

$$s = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{(k_2 + k_3)^2 - 4k_1^2} - 2(k_2 + k_3)}, \quad q = \frac{k_1}{s},$$

с необходимым условием $(k_2 + k_3)^2 - 4k_1^2 \geq 0$.

Отметим, что даже если k_2, k_3 — комплексно сопряженные собственные значения, то k_2k_3 и $k_2 + k_3$ действительны. $\square$

Теорема 11. *Трехмерная неунимодулярная лоренцева группа Ли $(G, \mathcal{C}_2)$ с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $\left| \frac{k_2 + k_3}{2} \right| < -k_1$ с точностью до переобозначения;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$, причем $\left| \frac{k_2 + k_3}{2} \right| < -k_1$.

Доказательство. В данном случае матрица оператора секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагонализируема с собственными значениями k_1, k_2, k_3 равными

$$\begin{aligned} k_1 &= -q^2 - \frac{1}{4}(p+r)^2 < 0, \\ k_2 &= \frac{1}{4}(p+r)^2 - q^2 + \frac{1}{2}|p+r|\sqrt{(p-r)^2 - 4q^2}, \\ k_3 &= \frac{1}{4}(p+r)^2 - q^2 - \frac{1}{2}|p+r|\sqrt{(p-r)^2 - 4q^2}. \end{aligned}$$

Имеем

$$k_2 + k_3 + 2k_1 = -4q^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad q = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-k_2 - k_3 - 2k_1}.$$

Пусть $x = p + r \neq 0$, $y = p - r$. Тогда

$$x^2 = k_2 + k_3 - 2k_1 > 0, \quad 4k_1^2 - 4k_2k_3 = y^2x^2 \geq 0.$$

Данная система имеет решение

$$x = \pm \sqrt{k_2 + k_3 - 2k_1}, \quad y = \pm 2 \frac{\sqrt{k_1^2 - k_2k_3}}{\sqrt{k_2 + k_3 - 2k_1}}.$$

Отметим, что даже если k_2, k_3 — комплексно сопряженные собственные значения, то k_2k_3 и $k_2 + k_3$ действительны. $\square$

4. Трехмерные локально симметричные лоренцевы многообразия. Теорема 3 позволяет разделить задачу изучения оператора секционной кривизны трехмерных локально симметричных лоренцевых многообразий на три подзадачи. В то же время, очевидно, что оператор секционной кривизны $\mathcal{K}$ диагоналируем для лоренцевых многообразий постоянной секционной кривизны $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{S}_1^3$ и $\mathbb{H}_1^3$ (т.е. $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$) и $\mathcal{K}$ имеет три совпадающих собственных значения (равных нулю, положительных или отрицательных соответственно).

В случае прямых произведений (случай (II) теоремы 3) оператор секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с двумя равными нулю и третьим ненулевым собственными значениями.

В случае (III) теоремы 3 матрица оператора секционной кривизны имеет вид

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha/\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда либо оператор секционной кривизны $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с собственными значениями $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ для $\alpha = 0$; либо $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с $k_1 = k_2 = 0$ для $\alpha \neq 0$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Трехмерное лоренцево локально симметричное многообразие с оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с равными собственными значениями;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{111\}$ с двумя нулевыми и третьим ненулевым собственными значениями;
- (iii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ с нулевыми собственными значениями.

5. Оператор секционной кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях. В данном разделе, используя результаты предыдущих разделов, мы определим возможный вид оператора секционной кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях. Начнем со случая недиагоналируемого оператора секционной кривизны.

Теорема 13. *Трехмерное локально однородное лоренцево многообразие (M, g) с недиагоналируемым оператором секционной кривизны $\mathcal{K}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

- (i) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{12\}$ и
 - (a) оба собственных значения равны нулю или
 - (b) $k_2 < 0$;
- (ii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{3\}$ с отрицательным собственным значением;
- (iii) $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$ и
 - (a) комплексно сопряженные собственные значения имеют отрицательную действительную часть, или
 - (b) $0 \leq \frac{k_2 + k_3}{2} < -k_1$.

Доказательство. Тип Сегре $\{12\}$ возможен только для трехмерных лоренцевых групп Ли $(G, \mathcal{A}_2)$, $(G, \mathcal{A}_3)$ и $(G, \mathcal{B})$ и для лоренцева локально симметричного пространства из теоремы 3 (случай (III)). Тогда случай (i) теоремы 13 следует из теорем 5, 6, 9 и 12.

Среди всех вариантов, перечисленных выше, тип Сегре $\{3\}$ возможен только для трехмерной группы Ли $(G, \mathcal{A}_3)$. Тогда из теоремы 6 следует случай (ii) данной теоремы.

Если $\mathcal{K}$ имеет тип Сегре $\{1z\bar{z}\}$, то (M, g) локально изометрично трехмерной лоренцевой группе Ли $(G, \mathcal{A}_4)$, $(G, \mathcal{C}_1)$ или $(G, \mathcal{C}_2)$. Тогда случай (iii) данной теоремы следует из теорем 7, 10 и 11.

□

Следующая теорема является следствием результатов предыдущих разделов.

Теорема 14. *Трехмерное локально однородное лоренцево многообразие (M, g) с недиагонализируемым оператором секционной кривизны K с типом Сегре $\{111\}$ существует тогда и только тогда, когда собственные значения k_1, k_2, k_3 удовлетворяют одному (или более) из следующих условий:*

- (i) *все собственные значения равны друг другу;*
- (ii) *два собственных значения равны нулю, а третье ненулевое;*
- (iii) *ровно два из чисел $k_1 + k_2, k_1 + k_3$ и $k_2 + k_3$ равны нулю;*
- (iv) *$(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3) < 0$;*
- (v) *с точностью до переобозначения*

$$k_2 k_3 \leq k_1^2 < \left(\frac{k_2 + k_3}{2} \right)^2 \quad \text{и} \quad k_1 < \frac{k_2 + k_3}{2};$$

- (vi) *с точностью до переобозначения*

$$k_2 < 0, \quad k_3 < 0, \quad |k_1| \leq \sqrt{k_2 k_3};$$

- (vii) *с точностью до переобозначения*

$$k_1 < - \left| \frac{k_2 + k_3}{2} \right|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Изв. АлтГУ. — 2013. — 1-1 (77). — С. 19–23.
2. *Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д.* О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Докл. РАН. — 2013. — 450, № 3. — С. 271–273.
3. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Мат. тр. — 2006. — 9, № 1. — С. 130–168.
4. *Bueken P., Djorić M.* Three-dimensional Lorentz metrics and curvature homogeneity of order one // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2000. — 18. — P. 85–103.
5. *Calvaruso G.* Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — 57. — P. 1279–1291.
6. *Calvaruso G.* Pseudo-Riemannian 3-manifolds with prescribed distinct constant Ricci eigenvalues // Differ. Geom. Appl. — 2008. — 26. — P. 419–433.
7. *Calvaruso G., Kowalski O.* On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — 7, № 1. — P. 124–139.
8. *Cordero L. A., Parker P. E.* Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. — 1997. — 17. — P. 129–155.
9. *Kowalski O.* Nonhomogeneous Riemannian 3-manifolds with distinct constant Ricci eigenvalues // Nagoya Math. J. — 1993. — 132. — P. 1–36.
10. *Kowalski O., Nikčević S.* On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedic. — 1996. — № 1. — P. 65–72.
11. *Mikeš J., Stepanova E., Vanžurová A. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacký University, 2015.
12. *Mikeš J., Vanžurová A.* Reconstruction of an affine connection in generalized Fermi coordinates // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2017. — 40, № 1. — P. 205–213.
13. *Milnor J.* Curvature of left invariant metric on Lie groups // Adv. Math. — 1976. — 21. — P. 293–329.

Клепикова Светлана Владимировна
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: klepikova.svetlana.math@gmail.com

Хромова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: khromova.olesya@gmail.com