Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Омелян, Геометризация пучка связностей первого типа, порожденно-го композиционным оснащением на распределении плоскостей, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 180, 69–73

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-180-69-73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:00:35

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 69–73
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-69-73

УДК 514.75

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ПУЧКА СВЯЗНОСТЕЙ ПЕРВОГО ТИПА, ПОРОЖДЕННОГО КОМПОЗИЦИОННЫМ ОСНАЩЕНИЕМ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

© 2020 г. О. М. ОМЕЛЯН

Аннотация. В работе продолжается исследование распределения плоскостей в многомерном проективном пространстве, с которым ассоциировано главное расслоение. Производится композиционное оснащение распределения, представляющее собой аналог оснащения Картана и нормализации второго рода Нордена. Доказано, что распределение плоскостей и его композиционное оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении групповую связность. Приведена геометрическая характеристика индуцированной связности с помощью параллельных переносов оснащающих плоскостей. Построен пучок связностей первого типа и описаны параллельные переносы в пучке связностей и его подсвязностях.

Ключевые слова: распределение, расслоение, связность, оснащение Картана, нормализация Нордена, композиционное оснащение, пучок связностей.

GEOMETRIZATION OF A SHEAF OF FIRST-TYPE CONNECTIONS GENERATED BY A COMPOSITIONAL FRAME ON A DISTRIBUTION OF PLANES

© 2020 O. M. OMEL'YAN

ABSTRACT. In this paper, we continue the study of distributions of planes in the multidimensional projective space with an associated principal bundle. We perform compositional framing of the distribution, which is an analog of the Cartan framing and the Norden normalization of the second kind. We prove that a distribution of planes and its compositional framing induce a group connection in the associated bundle. A geometric characteristic of the induced connection by parallel transfers of framing planes is given. Also, a sheaf of connections of the first type is constructed and parallel transfers in the sheaf of connections and its subconnections are described.

Keywords and phrases: distribution, bundle, connection, Cartan equipment, Norden normalization, compositional equipment, sheaf of connections.

AMS Subject Classification: 58A05, 58R65

1. Расслоение, ассоциированное с распределением. Будем относить n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R = \{A, A_I\}$, $I, \dots = \overline{1, n}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A; \quad (1)$$

базисные формы ω^I , ω_I , ω_I^J проективной группы $GP(n)$, действующей эффективно в P_n , удовлетворяют структурным уравнениям Картана (см. [2])

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \quad D\omega_I^J = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \quad (2)$$

Продолжим рассмотрение распределения 1-го рода (см. [3]) NS_n m -мерных плоскостей P_m . В работе будем использовать следующее разбиение значений индекса $I = (i, a)$: $i, \dots = \overline{1, m}$; $a, \dots = \overline{m+1, n}$. Уравнения распределения NS_n имеют вид

$$\omega_i^a = \Lambda_{iJ}^a \omega^J,$$

где формы $\omega^I = \{\omega^i, \omega^a\}$ являются базисными формами распределения NS_n , а совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_{iJ}^a\}$ образует фундаментальный объект 1-го порядка.

Структурными уравнениями главного расслоения $G(NS_n)$, ассоциированного с распределением NS_n , являются уравнения

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^a \wedge \omega_a^i, \quad (3)$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge (\omega_b^a - \Lambda_{ib}^a \omega^i) + \Lambda_{ij}^a \omega^i \wedge \omega^j, \quad (4)$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^K \wedge \omega_{jK}^i, \quad (5)$$

$$D\omega_j = \omega_j^k \wedge \omega_k + \omega^K \wedge \omega_{jK}, \quad (6)$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^K \wedge \omega_{bK}^a, \quad (7)$$

$$D\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^K \wedge \omega_{aK}^i, \quad (8)$$

$$D\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b, \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \omega_{jK}^i &= \Lambda_{jK}^a \omega_a^i - \delta_{jK}^i \omega_K - \delta_K^i \omega_j, & \omega_{jK} &= \Lambda_{jK}^a \omega_a, \\ \omega_{bK}^a &= -\Lambda_{iK}^a \omega_b^i - \delta_b^K \omega_K - \delta_K^a \omega_b, & \omega_{aK}^i &= -\delta_K^i \omega_a. \end{aligned}$$

В расслоении $G(NS_n)$ выделяются четыре главных фактор-расслоения с базой NS_n и структурными уравнениями:

- (i) уравнения (3)–(5) — расслоение линейных реперов $L(NS_n)$, типовым слоем которого является линейная факторгруппа $L = \mathbf{GL}(m)$, действующая во множестве всех направлений плоскости P_m^* , исходящих из точки A ;
- (ii) уравнения (3)–(6) — расслоение центропроективных реперов $A^*(NS_n)$, типовым слоем которого является центропроективная (коаффинная) факторгруппа $A^* = GA^*(m)$, действующая в плоскости P_m^* ;
- (iii) уравнения (3), (4), (7) — расслоение двойственных (нормальных) линейных реперов $L^*(NS_n)$, типовым слоем которого является факторгруппа $L^* = \mathbf{GL}(n-m)$, действующая в проективной факторплоскости $P_{n-m-1} = P_n/P_m^*$;
- (iv) уравнения (3)–(5), (7), (8) — расслоение $H(NS_n)$ с типовым слоем — факторгруппой H , являющейся аффинной частью (см. [6]) группы G и действующей во множестве всех направлений, исходящих из точки A .

2. Связности и параллельные перенесения оснащающих плоскостей. В расслоении $G(NS_n)$ связность [1, 4] зададим с помощью форм

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_j^i &= \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k - \Gamma_{ja}^i \omega^a, & \tilde{\omega}_i &= \omega_i - \Gamma_{ij} \omega^j - \Gamma_{ia} \omega^a, \\ \tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \omega^i - \Gamma_{bc}^a \omega^c, & \tilde{\omega}_a^i &= \omega_a^i - \Gamma_{aj}^i \omega^j - \Gamma_{ab}^i \omega^b, \\ \tilde{\omega}_a &= \omega_a - \Gamma_{ai} \omega^i - \Gamma_{ab} \omega^b, \end{aligned}$$

причем компоненты объекта связности

$$\Gamma = \left\{ \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ab}^i, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab} \right\}$$

удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям:

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{ja}^i - \Gamma_{jk}^i\omega_a^k + \omega_{ja}^i &\equiv 0, \\
\Delta\Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^k\omega_k + \omega_{ij} &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{ia} - \Gamma_{ij}\omega_a^j + \Gamma_{ia}^j\omega_j + \omega_{ia} &\equiv 0, \\
\Delta\Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{bc}^a - \Gamma_{bi}^a\omega_c^i + \omega_{bc}^a &\equiv 0, \\
\Delta\Gamma_{aj}^i - \Gamma_{kj}^i\omega_a^k + \Gamma_{aj}^b\omega_b^i + \omega_{aj}^i &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{ab}^i - \Gamma_{aj}^i\omega_b^j - \Gamma_{jb}^i\omega_a^j + \Gamma_{ab}^c\omega_c^i &\equiv 0, \\
\Delta\Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^j\omega_j + \Gamma_{ai}^b\omega_b - \Gamma_{ji}\omega_a^j &\equiv 0, & \Delta\Gamma_{ab} - \Gamma_{ai}\omega_b^i + \Gamma_{ab}^i\omega_i + \Gamma_{ab}^c\omega_c - \Gamma_{ib}\omega_a^i &\equiv 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^I .

Объект Γ будем называть объектом ассоциированной связности. Из сравнений (10) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Объект групповой связности Γ в главном расслоении $G(NS_n)$ содержит следующие подобъекты (см. [4]: объект плоскостной линейной связности $\{\Gamma_{jK}^i\}$, объект центропроективной связности $\{\Gamma_{jK}^i, \Gamma_{iJ}\}$, объект нормальной линейной связности $\{\Gamma_{bI}^a\}$ и объект аффинно-групповой связности $\{\Gamma_{jK}^i, \Gamma_{bI}^a, \Gamma_{aJ}^i\}$, задающие связности в указанных выше фактор-расслоениях.*

Ранее (см. [4]) произведено композиционное оснащение распределения NS_n , т.е. к каждой плоскости P_m^* распределения присоединены:

- (а) плоскость Картана $C_{n-m-1} : P_m^* \oplus C_{n-m-1} = P_n$;
- (б) нормаль 2-го рода Нордена $N_{m-1} : A \oplus N_{m-1} = P_m^*$.

Эти плоскости зададим совокупностями точек

$$B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A, \quad B_i = A_i + \lambda_i A,$$

причем

$$\Delta\lambda_a^i + \omega_a^i = \lambda_{aJ}^i\omega^J, \quad \Delta\lambda_a + \lambda_a^i\omega_i + \omega_a = \lambda_{aI}\omega^I, \quad \Delta\lambda_i + \omega_i = \lambda_{iJ}\omega^J.$$

Выражения для дифференциалов точек B_a, B_i записываются в виде

$$\begin{aligned}
dB_a &= (\dots)_a^b B_b + (t_{aj}^i\omega^j + t_{ab}^i\omega^b)B_i + ((t_{ai} - \lambda_j t_{ai}^j)\omega^i + (t_{ab} - \lambda_i t_{ab}^i)\omega^b)A, \\
dB_i &= (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + (t_{ij}\omega^j + t_{ia}\omega^a)A.
\end{aligned}$$

Определение 1. Объект $t = \{t_{aj}^i, t_{ab}^i, t_{ai}, t_{ab}, t_{ij}, t_{ia}\}$, компоненты которого выражаются через компоненты оснащающего тензора $\lambda = \{\lambda_a^i, \lambda_a, \lambda_i\}$, его пфаффовы производные $\lambda' = \{\lambda_{aJ}^i, \lambda_{aI}, \lambda_{iJ}\}$ и фундаментальный объект Λ по формулам

$$\begin{aligned}
t_{aj}^i &= \lambda_{aj}^i - \Lambda_{kj}^b \lambda_b^i \lambda_a^k + \delta_j^i \lambda_a, & t_{ab}^i &= \lambda_{ab}^i - \Lambda_{jb}^c \lambda_c^i \lambda_a^j - \lambda_b^i \lambda_a, \\
t_{ai} &= \lambda_{ai} - \Lambda_{ji}^b \lambda_b^j \lambda_a, & t_{ab} &= \lambda_{ab} - \Lambda_{ib}^c \lambda_a^i \lambda_c - \lambda_a \lambda_b, \\
t_{ij} &= \lambda_{ij} + \Lambda_{ij}^a (\lambda_k \lambda_a^k - \lambda_a) - \lambda_i \lambda_j, & t_{ia} &= \lambda_{ia} + \Lambda_{ia}^b (\lambda_j \lambda_b^j - \lambda_b) + \lambda_a^j \lambda_i \lambda_j - \lambda_i \lambda_a,
\end{aligned} \tag{11}$$

назовем тензором неспециальных смещений (см. [4]).

Обращение тензора t в нуль влечет охваты $\lambda' = f(\lambda, \Lambda)$ компонент совокупности пфаффовых производных λ' объекта λ , а также специальные смещения оснащающих плоскостей. Например, из (11) видно, что при $t_{aj}^i = 0, t_{ab}^i = 0$ плоскость Картана смещается в нормали 1-го рода $N_{n-m} = [A, B_a]$. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Распределение плоскостей NS_n и его композиционное оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G(NS_n)$ групповую связность $\overset{0}{\Gamma}$.*

Доказательство. Действительно, справедливы формулы

$$\begin{aligned}\overset{0}{\Gamma}_{jk}^i &= \Lambda_{jk}^a \lambda_a^i - \delta_j^i \lambda_k - \delta_k^i \lambda_j, & \overset{0}{\Gamma}_{ja}^i &= \Lambda_{ja}^b \lambda_b^i - \delta_j^i \lambda_a + \delta_j^i \lambda_k \lambda_a^k + \lambda_a^i \lambda_j, & \overset{0}{\Gamma}_{ij} &= \Lambda_{ij}^a \lambda_a - \lambda_i \lambda_j, \\ \overset{0}{\Gamma}_{ia} &= \Lambda_{ia}^b \lambda_b + \lambda_i \lambda_j \lambda_a^j, & \overset{0}{\Gamma}_{bi}^a &= -\Lambda_{ji}^a \lambda_b^j - \delta_b^a \lambda_i, & \overset{0}{\Gamma}_{bc}^a &= -\Lambda_{ic}^a \lambda_b^i - \delta_b^a \lambda_c - \delta_c^a \lambda_b + \delta_b^a \lambda_c^i \lambda_i, \\ \overset{0}{\Gamma}_{aj}^i &= -\Lambda_{kj}^b \lambda_b^i \lambda_a^k + \delta_j^i \lambda_a^k \lambda_k - \delta_j^i \lambda_a, & \overset{0}{\Gamma}_{ab}^i &= -\Lambda_{jb}^c \lambda_c^i \lambda_a^j - \lambda_b^i \lambda_a^j \lambda_j, \\ \overset{01}{\Gamma}_{ai} &= -\Lambda_{ji}^b \lambda_a^j \lambda_b + \lambda_i (\lambda_a^j \lambda_j - \lambda_a), & \overset{01}{\Gamma}_{ab} &= -\Lambda_{ib}^c \lambda_a^i \lambda_c - \lambda_b^i \lambda_i (\lambda_a^j \lambda_j - \lambda_a) - \lambda_a \lambda_b,\end{aligned}$$

дающие охват $\overset{0}{\Gamma} = \Gamma(\Lambda, \lambda)$. □

Объект $\overset{0}{\Gamma}$ является объектом индуцированной связности (см. [4]).

Замечание 1. В [4] построены три типа охватов, отличные от данного.

Выражения

$$\begin{aligned}dB_a &= (\dots)_a^b B_b + \overset{0}{\nabla} \lambda_a^i B_i + \left(\overset{0}{\nabla} \lambda_a - \lambda_i \overset{0}{\nabla} \lambda_a^i \right) A, \\ dB_i &= (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + \overset{0}{\nabla} \lambda_i A\end{aligned}$$

для дифференциалов точек B_a и B_i , записанные с помощью ковариантных дифференциалов $\overset{0}{\nabla} \lambda$ оснащающего тензора λ в индуцированной связности $\overset{0}{\Gamma}$, позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Связность $\overset{0}{\Gamma}$ и ее подсвязности характеризуются следующими параллельными перенесениями:

- (i) нормаль 2-го рода N_{m-1} переносится параллельно $\left(\overset{0}{\nabla} \lambda_i|_\rho = 0 \right)$ в индуцированной центро-проективной связности $\left\{ \overset{0}{\Gamma}_{jK}^i, \overset{0}{\Gamma}_{iJ} \right\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости Бортолотти $P_{n-1} = [B_i, B_a]$;
- (ii) плоскость Картана переносится параллельно $\left(\overset{0}{\nabla} \lambda_a^i|_\rho = 0 \right)$ в индуцированной аффинно-групповой связности $\left\{ \overset{0}{\Gamma}_{jK}^i, \overset{0}{\Gamma}_{bI}^a, \overset{0}{\Gamma}_{aJ}^i \right\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в нормали 1-го рода $N_{n-m} = [A, B_a]$;
- (iii) плоскость C_{n-m-1} переносится параллельно $\left(\overset{0}{\nabla} \lambda_a^i|_\rho = 0, \overset{0}{\nabla} \lambda_a|_\rho = 0 \right)$ в индуцированной связности $\overset{0}{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда она неподвижна, т.е. параллельное перенесение связано вырожденное (см. [4]).

Теорема 3 дает полное представление о геометрической характеристике связности $\overset{0}{\Gamma}$ и ее подсвязностей.

Обращая в нуль ковариантные производные $\nabla_J \lambda$ оснащающего тензора λ в ассоциированной связности Γ , получим

$$\begin{aligned}\overset{1}{\Gamma}_{ij} &= \lambda_{ij} + \lambda_k \Gamma_{ij}^k, & \overset{1}{\Gamma}_{ia} &= \lambda_{ia} + \lambda_j \Gamma_{ia}^j, \\ \overset{1}{\Gamma}_{aj}^i &= \lambda_{aj}^i - \lambda_a^k \Gamma_{kj}^i + \lambda_b^i \Gamma_{aj}^b, & \overset{1}{\Gamma}_{ab}^i &= \lambda_{ab}^i - \lambda_a^j \Gamma_{jb}^i + \lambda_c^i \Gamma_{ab}^c, \\ \overset{1}{\Gamma}_{ai} &= \lambda_{ai} - \lambda_a^j \overset{1}{\Gamma}_{ji} + \lambda_b \Gamma_{ai}^b, & \overset{1}{\Gamma}_{ab} &= \lambda_{ab} - \lambda_a^i \overset{1}{\Gamma}_{ib} + \lambda_c \Gamma_{ab}^c.\end{aligned} \tag{12}$$

Определение 2. Пучком связностей $\overset{1}{\Gamma}$ с параметрами $\Gamma_0 = \{\Gamma_{jJ}^i, \Gamma_{bI}^a\}$ будем называть множество групповых связностей, определяемых объектом $\overset{1}{\Gamma}$, компоненты которого удовлетворяют соотношениям (12).

Определение 3. Композиционное оснащение распределения NS_n назовем специальным (см. [4]) в случае обращения тензора t в нуль:

$$(a) \ t_{iJ} = 0; \quad (b) \ t_{aJ}^i = 0; \quad (c) \ t_{aI} = 0.$$

Такое оснащение назовем абс-специальным. В случае выполнения части условий в названии специального оснащения будут упоминаться только соответствующие буквы.

Выражения для дифференциалов точек B_a, B_i , записанные с помощью ковариантных дифференциалов $\overset{1}{\nabla}\lambda$ оснащающего тензора λ в пучке (12) связностей $\overset{1}{\Gamma}$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dB_a &= (\dots)_a^b B_b + \left(\overset{1}{\nabla}\lambda_a^i + t_{aJ}^i \omega^J \right) B_i + \left(\overset{1}{\nabla}\lambda_a - \lambda_i \overset{1}{\nabla}\lambda_a^i + (t_{aI} - \lambda_j t_{aI}^j) \omega^I \right) A, \\ dB_i &= (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + \left(\overset{1}{\nabla}\lambda_i + t_{iJ} \omega^J \right) A. \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Плоскость Картана C_{n-m-1} переносится параллельно тогда и только тогда, когда она смещается в нормали 1-го рода Нордена P_{n-m} , причем перенесение $\left(\overset{1}{\nabla}\lambda_a^i|_\rho = 0 \right)$ осуществляется в пучке групповых подсвязностей $\left\{ \Gamma_0, \overset{1}{\Gamma}_{aJ}^i \right\}$, если композиционное оснащение b -специальное. Нормаль 2-го рода Нордена N_{m-1} переносится параллельно в пучке групповых подсвязностей $\left\{ \overset{0}{\Gamma}_{jK}^i, \overset{1}{\Gamma}_{iJ} \right\}$ тогда и только тогда, когда она смещается:

- (a) в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} , если композиционное оснащение a -специальное: $\left(\overset{1}{\nabla}\lambda_i|_\rho = 0 \right)$;
- (b) произвольно в случае a -неспециального композиционного оснащения.

Замечание 2. Отметим (см. [5]), что все полученные выше теоремы нашли применение при осуществлении внутреннего композиционного оснащения распределения (в предположении существования относительного инварианта, охваченного подобъектом фундаментального объекта 1-го порядка распределения плоскостей) и построения внутренней связности и ее геометрической характеристики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик Л. Е., Омелян О. М. Теоретико-категорный подход, естественно расширяющий фундаментальное понятие связности, и его приложение к геометрии дифференциальных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 1. — С. 55–63.
2. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
3. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения t -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности// Тр. геом. семин. — 1971. — 3. — С. 49–94.
4. Омелян О. М. Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей// Тр. Междунар. конф. по геометрии и анализу. — Пенза, 2003. — С. 63–69.
5. Омелян О. М. О совпадении групповых связностей, индуцированных внутренним композиционным оснащением распределения// Мат. заметки. — 2017. — 102, № 6. — С. 896–907.
6. Шевченко Ю. И. Аффинная, коаффинная и линейная факторгруппы в подгруппе проективной группы// в кн.: Проблемы математических и физических наук. — Калининград, 2002. — С. 38–39.

Омелян Ольга Михайловна

Балтийский Федеральный Университет им. И. Канта, Калининград

E-mail: olga_omelyan2002@mail.ru