Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Полякова, Нормали высшего порядка на многообразии, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 180, 85–90

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-180-85-90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:32:31

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 85–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-85-90

УДК 514.76

НОРМАЛИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА НА МНОГООБРАЗИИ

© 2020 г. К. В. ПОЛЯКОВА

Аннотация. На n -мерном гладком многообразии рассмотрены нормали высших порядков двух видов, т.е. пространства, дополняющие касательное пространство порядка 1 или $r - 1$ до касательного пространства порядка r . Показано, что производные одних базисных векторов по направлению данных базисных векторов первого (второго) порядка равны значениям дифференциалов первого (второго) порядка первых векторов на данных векторах. С помощью дифференциалов базисных касательных векторов первого и второго порядков построены отображения из множества касательных векторов первого порядка во множество векторов нормалей второго и третьего порядков. Заданы отображения, порождающие горизонтальные векторы второго и третьего порядков для канонической аффинной связности первого и второго порядков соответственно.

Ключевые слова: дифференциальная форма, касательное пространство, нормаль на многообразии, аффинная связность.

HIGHER-ORDER NORMALS ON MANIFOLDS

© 2020 К. V. POLYAKOVA

ABSTRACT. On an n -dimensional smooth manifold, we consider higher-order normals of two types, i.e., the spaces that complement the tangent space of orders 1 or $r - 1$ to the tangent space of order r . We prove that the derivatives of some basic vectors in the direction of the given first-order (second-order) basis vectors are equal to the values on these vectors of the first-order (second-order) differentials of the first vectors. Using the differentials of basic tangent vectors of the first and second orders, we construct mappings from the set of first-order tangent vectors to the set of second- and third-order normal vectors. Also, we introduce mappings that generate horizontal second- and third-order vectors for the canonical first- and second-order affine connections, respectively.

Keywords and phrases: differential form, tangent space, normal on a manifold, affine connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 58A10

1. Введение. Данная работа относится к дифференциальной геометрии, а методика исследования основана на применении способа Г. Ф. Лаптева (см. [7, 8]) задания связности в главных расслоениях и разработанного им метода продолжений и охватов, который обобщает метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана. Применение метода Картана—Лаптева, оперирующего структурными уравнениями и деривационными формулами, позволяет эффективно использовать тангенциальнозначные формы, т.е. дифференциальные формы со значениями в касательных пространствах различных порядков. Указанные формы широко применяются во многих разделах современной физики (см., например, [2, 15]).

Отправным пунктом для построения различных тангенциальнозначных форм на расслоении линейных реперов является каноническая форма на этом расслоении; связывая касательное и кокасательное пространства этого расслоенного многообразия, она соответствует тождественным

отображениям этих пространств. При этом действия тангенциальнозначных форм имеют двойственный характер: они действуют как в пространстве касательных векторов к расслоению линейных реперов, так и в пространстве ковекторов. Все тангенциальнозначные формы, возникающие в результате продолжения (внешнего дифференцирования и последующего разрешения по лемме Э. Картана), дают возможность строить касательные пространства 2-го и более высоких порядков, кроме того, эти формы задают важные отображения как касательных, так и кокасательных пространств различных порядков. В частности, отображения, определяемые дифференциалами базисных касательных векторных полей, переводят касательные векторы в нормальные векторы (см. [13]), т.е. векторы второго порядка, дополняющие касательное пространство 1-го порядка до касательного пространства 2-го порядка.

Метод Лаптева, базируясь на операции внешнего дифференцирования обычных (а также тангенциальнозначных) форм, с применением координатного задания векторов и форм дает возможность шире использовать деривационные формулы на многообразии.

Каноническая форма 1-го порядка $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ ($i, j, k, \dots = 1, \dots, m$) на многообразии X_m связывает касательное $TX_m = \text{span}(\varepsilon_i)$ и кокасательное $T^*X_m = \text{span}(\omega^i)$ пространства к этому многообразию в его текущей точке M , а также соответствует тождественным преобразованиям этих пространств, т.е. (см. [12])

$$\theta = \text{id}_{TX_m}, \quad \theta = \text{id}_{T^*X_m}.$$

Каноническая форма является тензорнозначной (см. [2, 5]), точнее, тангенциальнозначной. Дифференциальные 1-формы $\{\omega^i\}$ образуют кобазис, сопряженный подвижному базису $\{\varepsilon_i\}$, т.е. $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$. Фактически $\theta = \omega^i \otimes \varepsilon_i \in T^*X_m \otimes TX_m$, но значок тензорного умножения в форме $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ будем опускать.

Реализуем подход, связанный с координатным выражением базисных и слоевых форм, а также векторов репера в слоях. Рассмотрим некоторую окрестность m -мерного многообразия X_m , в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i . Слойные координаты x_j^i , x_{jk}^i , x_{jkl}^i на многообразии X_m (см. [8, с. 149]) удовлетворяют соотношениям $\det(x_j^i) \neq 0$, $x_k^i x_j^k = \delta_j^i$ и симметричны по нижним индексам. При этом базисные ω^i и слоевые ω_j^i , ω_{jk}^i формы имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^i &= x_j^i dx^j, \\ \omega_j^i &= -x_j^{*k} dx_k^i - x_{jk}^i \omega^k, \\ \omega_{jk}^i &= dx_{jk}^i + x_{jk}^l \omega_l^i - x_{lk}^i \omega_j^l - x_{jl}^i \omega_k^l + (x_{jk}^s x_{sl}^i - x_{jkl}^i) \omega^l. \end{aligned} \quad (1)$$

Структурные уравнения совокупности базисных ω^i и слоевых ω_j^i , ω_{jk}^i форм главного расслоения реперов 2-го порядка, построенного над многообразием X_m , находятся внешним дифференцированием форм (1) (см. [8]).

Относительно натурального (голономного) репера $\{\partial_i = \partial/\partial x^i, \partial_{ij} = \partial^2/\partial x^i \partial x^j\}$ векторы ε_i и ε_{ij} раскладываются по формулам (см. [9])

$$\varepsilon_i = x_i^j \partial_j, \quad \varepsilon_{ij} = x_i^{*k} x_j^{*l} \partial_{kl} + x_{ij}^k x_k^l \partial_l. \quad (2)$$

Пространство $T^2X_m = \text{span}(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ в текущей точке M многообразия X_m называется касательным пространством порядка 2, а также соприкасающимся пространством порядка 1 (см., например, [13]). Слойные формы интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера ε_i , ε_{ij} , удовлетворяющего деривационным уравнениям

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i &= \varepsilon_j \omega_i^j + \omega^j \varepsilon_{ij}, \\ d\varepsilon_{ij} &= \omega_i^k \varepsilon_{kj} + \omega_j^k \varepsilon_{ik} + \omega_{ij}^k \varepsilon_k + \omega^k \varepsilon_{ijk}, \end{aligned} \quad (3)$$

которые получены дифференцированием векторов (2).

Дифференцируя каноническую форму $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ обычным образом, получим каноническую форму 2-го порядка на многообразии X_m (см., например, [1, 9, 16])

$$d\theta = (d\omega^i + \omega^j \omega_j^i) \varepsilon_i + \omega^i \omega^j \varepsilon_{ij},$$

причем $d\theta \in (T^2 X_m)^* \otimes T^2 X_m$, поскольку

$$d\omega^i + \omega^j \omega_j^i, \omega^i \omega^j \in (T^2 X_m)^*, \quad \varepsilon_{ij} \in T^2 X_m.$$

Пространство $(T^2 X_m)^*$, сопряженное касательному пространству 2-го порядка $T^2 X_m$, называется кокасательным пространством 2-го порядка. Репер $\{\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}\}$ и корепер $\{d\omega^i + \omega^j \omega_j^i, \omega^i \omega^j\}$ 2-го порядка являются сопряженными. Условия сопряженности для произвольных (не являющихся натуральными) базиса и кобазиса 2-го порядка имеют вид

$$(d\omega^i + \omega^j \omega_j^i)(\varepsilon_k) = \delta_k^i, \quad \omega^i \omega^j(\varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j), \quad (d\omega^i + \omega^j \omega_j^i)(\varepsilon_{kl}) = 0, \omega^i \omega^j(\varepsilon_k) = 0.$$

Известно (см. [17]), что $\{d^2 x^i, dx^i dx^j\}$ — натуральный корепер (см. [6, с. 54], [4, с. 175]) кокасательного пространства 2-го порядка $(T^2 X_m)^*$, $\{\partial_i, \partial_{ij}\}$ — натуральный корепер касательного пространства 2-го порядка $T^2 X_m$. Ненулевые условия сопряженности можно записать следующим образом:

$$d^2 x^i(\partial_j) = \delta_j^i, \quad dx^i dx^j(\partial_{kl}) = \frac{1}{2}(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j).$$

При этом

$$TX_m \subset T^2 X_m, \quad \{\partial_i\} \in \{\partial_i, \partial_{ij}\}; \\ T^* X_m \not\subset (T^2 X_m)^*, \quad \{dx^i\} \notin \{d^2 x^i, dx^i dx^j\}.$$

Выражение обычного дифференциала канонической формы $\theta = \omega^i \varepsilon_i$ многообразия X_m относительно натуральных репера и корепера 2-го порядка принимает следующий вид:

$$d\theta = d^2 x^i \partial_i + dx^i dx^j \partial_{ij}.$$

2. Нормали на многообразии. *Нормалью* (см. [13, 14]) *порядка r* в точке M многообразия называется такое подпространство N^r соприкасающегося пространства $O^r X_m$, которое имеет пересечение нулевой размерности с пространством $O^{r-1} X_m$, и размерность которого является дополнительной по отношению к размерности $O^{r-1} X_m$, т.е.

$$N^r \oplus O^{r-1} X_m = O^r X_m.$$

Для определения порядка нормали будем использовать порядки касательных, а не соприкасающихся пространств, полагая, что соприкасающееся пространство r -го порядка — это касательное пространство $(r+1)$ -го порядка, т.е. $T^{r+1} X_m = O^r X_m$. Кроме того, в качестве нормалей будем рассматривать также пространства, дополняющие пространство TX_m (а не только пространство $T^r X_m$) до пространства $T^{r+1} X_m$.

Нормалью порядка r касательного пространства TX_m (многообразия X_m) в точке M будем называть подпространство N_1^r , дополняющее пространство TX_m до пространства $T^r X_m$, т.е.

$$N_1^r \oplus TX_m = T^r X_m.$$

В частности, для пространства TX_m имеем следующие две нормали N_1^2 и N_1^3 :

$$N_1^2 \oplus TX_m = T^2 X_m; \quad N_1^3 \oplus TX_m = T^3 X_m.$$

Нормаль N_1^r можно представить в следующем виде: $N_1^r = T^r X_m \setminus TX_m$; тогда $N_1^2 = T^2 X_m \setminus TX_m$, $N_1^3 = T^3 X_m \setminus TX_m$.

Нормалью порядка $r+1$ касательного пространства $T^r X_m$ в точке M будем называть подпространство N_r^{r+1} , дополняющее пространство $T^r X_m$ до пространства $T^{r+1} X_m$, т.е. (ср. [13])

$$N_r^{r+1} \oplus T^r X_m = T^{r+1} X_m.$$

Например, для пространства $T^2 X_m$ имеем нормаль $N_2^3 = T^3 X_m \setminus T^2 X_m$.

Если в равенстве $\varepsilon_j(f) = df(\varepsilon_j)$ заменить функцию f векторами ε_i , то будет иметь место следующая лемма.

Лемма 1. *Для базисных касательных векторов 1-го порядка ε_i справедливо равенство $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(\varepsilon_i)$.*

При линейном отображении $d\varepsilon_i$, определяемом соотношением (3), имеем

$$d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_k \omega_i^k(\varepsilon_j) + \varepsilon_{ik} \omega^k(\varepsilon_j) = \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Кроме того,

$$\varepsilon_j(\varepsilon_i) = \partial_{\varepsilon_j} \varepsilon_i = \partial_{x_j^l \partial_l} \left(x_i^k \partial_k \right) = x_i^k x_j^l \partial_{kl} = \varepsilon_{ij} - x_{ij}^k \varepsilon_k = \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij}$ удовлетворяют уравнениям $\Delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ijk} \omega^k$, т.е. инвариантны в совокупности, причем $\dot{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} - x_{ij}^l \dot{\varepsilon}_{lk} - x_{ijk}^l \varepsilon_l$, где векторы

$$\varepsilon_{ijk} = x_i^l x_j^s x_k^t \partial_{lst} + x_{ijk}^l \varepsilon_l + \left(x_l^p x_j^q x_{ik}^l + x_i^p x_l^q x_{jk}^l + x_l^p x_k^q x_{ij}^l \right) \partial_{pq}$$

принадлежат касательному пространству 3-го порядка $T^3 X_m$. Дифференциальный тензорный оператор Δ имеет вид (см., например, [1, 3, 16])

$$\Delta t_{jk}^i = dt_{jk}^i + t_{jk}^l \omega_l^i - t_{lk}^i \omega_j^l - t_{jl}^i \omega_k^l.$$

Линейные отображения

$$d\varepsilon_i: TX_m \rightarrow N_1^2 = T^2 X_m \setminus TX_m$$

определяют нормаль 2-го рода $N_1^2 = \text{span}(\dot{\varepsilon}_{ij})$ для пространства TX_m .

Базисные векторы $\dot{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - x_{ij}^k \varepsilon_k$ нормали 2-го порядка N_1^2 являются:

- (i) производными векторов ε_i по их направлениям, т.е. $\dot{\varepsilon}_{ij} = \partial_{\varepsilon_j} \varepsilon_i$,
- (ii) образами векторов ε_j при отображениях $d\varepsilon_i$, т.е. $\dot{\varepsilon}_{ij} = d\varepsilon_i(\varepsilon_j)$.

Для касательных векторов $u = u^i \varepsilon_i$, $v = v^i \varepsilon_i$ справедливо:

$$du(v) = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x^k} x_i^k \varepsilon_j + u^j \dot{\varepsilon}_{ji} \right) v^i.$$

Теорема 1. Пусть $u: X_m \rightarrow TX_m$ — векторное поле, тогда $du: TX_m \rightarrow T^2 X_m$ — линейное отображение из касательного пространства 1-го порядка TX_m в касательное пространство 2-го порядка $T^2 X_m$. Причем для базисных векторов $\varepsilon_i: X_m \rightarrow TX_m$ линейное отображение $d\varepsilon_i: TX_m \rightarrow N_1^2 \subset T^2 X_m$ поднимает касательный вектор 1-го порядка в нормаль 2-го порядка N_1^2 .

Отображение $d\varepsilon_i$ всем касательным векторам ставит в соответствие векторы нормали 2-го порядка N_1^2 . Такое расщепление соприкасающегося пространства $T^2 X_m$ определяет простейшую (каноническую) аффинную связность $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i$ с формами $\overset{\circ}{\omega}_j^i = \omega_j^i|_{\omega^i=0}$ (см. [10]). Эта связность является плоской и симметричной. Векторы $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ являются горизонтальными векторами для простейшей связности 1-го порядка (см. [10]), а нормаль N_1^2 — горизонтальным подпространством простейшей (канонической) связности, т.е. $HT^2 X_m = N_1^2$ (см. [13, 16]).

3. Нормали 3-го порядка. Обобщим равенство $\partial_{\varepsilon_j} \varepsilon_i = d\varepsilon_i(\varepsilon_j)$, справедливое для базисных касательных векторов 1-го порядка, на случай базисных касательных векторов 2-го порядка.

Теорема 2 (см. [12]). Для базисных касательных векторов 1-го и 2-го порядка $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon' = \{\varepsilon'_{ij}\}$ справедливы равенства

$$\partial_\varepsilon \varepsilon' = d\varepsilon'(\varepsilon), \quad \partial_{\varepsilon'} \varepsilon = d^2 \varepsilon(\varepsilon'), \quad \partial_{\varepsilon'} \varepsilon' = d^2 \varepsilon'(\varepsilon').$$

т.е. производные одних базисных векторов по направлению данных базисных векторов 1-го (2-го) порядка равны значениям дифференциалов 1-го (2-го) порядка первых векторов на данных векторах.

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_i} \varepsilon_{pq} = \varepsilon_i(\varepsilon_{pq})$ или действуя линейным отображением $d\varepsilon_{pq}$ на касательные векторы ε_i , получим следующие равные выражения:

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon_k} \varepsilon_{ij} &= x_i^s x_j^p x_k^q \partial_{spq} + x_{ij}^s x_k^q x_s^p \partial_{pq}, \\ d\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_{ijk} - \varepsilon_s x_{ijk}^s - \dot{\varepsilon}_{sj} x_{ik}^s - \dot{\varepsilon}_{is} x_{jk}^s, \end{aligned}$$

которые обозначим $\partial_{\varepsilon_k} \varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k) = \varepsilon_{ij,k}$.

Второй дифференциал касательных векторов ε_i , т.е. обычный дифференциал деривационной формулы (3) имеет вид (см. [11])

$$d^2\varepsilon_i = \varepsilon_{ijk}\omega^j\omega^k + \varepsilon_{ij}\left(d\omega^j + \omega_k^j\omega^k\right) + 2\varepsilon_{jk}\omega^k\omega_i^j + \varepsilon_j\left(d\omega_i^j + \omega_k^j\omega_i^k + \omega^k\omega_{ik}^j\right). \quad (4)$$

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{pq}}\varepsilon_i = \varepsilon_{pq}(\varepsilon_i)$ или действуя линейным отображением $d^2\varepsilon_i$, определяемым по закону (4), на соприкасающиеся векторы ε_{pq} , получим следующие равные выражения:

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon_{ij}}\varepsilon_k &= x_i^s x_j^p x_k^q \partial_{spq} + x_{ij}^s x_k^q x_s^p \partial_{qp}, \\ d^2\varepsilon_k(\varepsilon_{ij}) &= \varepsilon_{kij} - \varepsilon_s x_{kij}^s - \dot{\varepsilon}_{sj} x_{ki}^s - \dot{\varepsilon}_{si} x_{kj}^s, \end{aligned}$$

которые обозначим $\partial_{\varepsilon_{ij}}\varepsilon_k = d^2\varepsilon_k(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{k,ij}$.

Вычисляя $\partial_{\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kl}(\varepsilon_{ij})$ или действуя линейным отображением $d\varepsilon_{ij}$ на соприкасающиеся векторы ε_{kl} , также получим равные выражения.

Поскольку слоевые координаты x_{jk}^i, x_{jkl}^i симметричны по нижним индексам, то $\varepsilon_{ij,k} = \varepsilon_{k,ij}$, причем $\Delta\varepsilon_{ij,k} = \omega_{ij}^l \dot{\varepsilon}_{lk}$. Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{kl,p}$ инвариантны в совокупности и определяют нормаль 3-го порядка $N_1^3 = T^3X_m \setminus TX_m$ пространства TX_m , т.е. $N_1^3 = \text{span}(\dot{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{kl,p})$.

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij,k} = \varepsilon_{ij,k} - x_{ij}^l \dot{\varepsilon}_{kl}$ инвариантны сами по себе, причем для отображения, определяемого базисными векторами нормали 2-го порядка, имеем

$$d\dot{\varepsilon}_{ij}: \varepsilon_k \in TX_m \rightarrow d\dot{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k) = \dot{\varepsilon}_{ij,k} \in N_2^3 = T^3X_m \setminus T^2X_m.$$

Векторы $\dot{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{ij,k}$ являются горизонтальными векторами для простейшей (канонической) связности 2-го порядка (см. [10, 11]). Эта связность является плоской, а ее тензор кручения 2-го порядка равен нулю. Действительно, горизонтальные векторы 3-го порядка

$$\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{lj} \Gamma_{ik}^l + \varepsilon_{il} \Gamma_{jk}^l + \varepsilon_l \Gamma_{ijk}^l \quad (\tilde{\varepsilon}_{ijk} \in T^3X_m)$$

для простейшей аффинной связности 2-го порядка $\overset{\circ}{\Gamma}^2$ с компонентами

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i, \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{jkl}^i = -x_{jkl}^i + x_{sk}^i x_{jl}^s + x_{js}^i x_{kl}^s,$$

имеют вид $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$. Формы $\overset{\circ}{\tilde{\omega}}_{jk}^i = \omega_{jk}^i|_{\omega^i=0}$, $\overset{\circ}{\omega}_j^i = \omega_j^i|_{\omega^i=0}$ являются формами канонической связности 2-го порядка.

Для горизонтальных векторов простейшей связности 2-го порядка $\overset{\circ}{\Gamma}^2$ справедливо разложение

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ijk} = x_{jk}^l \dot{\varepsilon}_{li} + \dot{\varepsilon}_{jk,i}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$$

по базисным векторам $\dot{\varepsilon}_{ij} \in N_1^2$ и $\dot{\varepsilon}_{jk,i} \in N_2^3$.

Теорема 3. Пусть $U: X_m \rightarrow T^2X_m$ — векторное поле. Тогда $dU: TX_m \rightarrow T^3X_m$ — линейное отображение из касательного пространства 1-го порядка TX_m в касательное пространство 3-го порядка T^3X_m . При этом для базисных векторов $\dot{\varepsilon}_{ij}: X_m \rightarrow N_1^2 \subset T^2X_m$ нормали 2-го порядка линейное отображение $d\dot{\varepsilon}_{ij}: TX_m \rightarrow N_2^3 \subset T^3X_m$ поднимает касательный вектор 1-го порядка в нормаль 3-го порядка N_2^3 пространства T^2X_m .

Обобщая данный результат, можно утверждать, что отображения, задаваемые дифференциалами базисных векторов нормали N_{r-1}^r , переводят базисные касательные векторы 1-го порядка в базисные векторы нормали N_r^{r+1} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин, 1977.
2. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. Математические основы современной теории гравитации. — М.: Прометей, 2012.
3. Белова О. О. Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей // Мат. заметки. — 2018. — 104, № 6. — С. 812–822.

4. Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. — М.: ИЛ, 1949.
5. Восиллюс Р. В. Контравариантная теория дифференциального продолжения в модели пространства со связностью// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1983. — 14. — С. 101–176.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1933.
7. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1979. — 9. — С. 5–246.
8. Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии// Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1966. — 1. — С. 139–189.
9. Полякова К. В. Двойственные методы исследования дифференциально-геометрических структур// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — 45. — С. 92–104.
10. Полякова К. В. Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — 46. — С. 114–128.
11. Полякова К. В. О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2016. — 47. — С. 108–125.
12. Полякова К. В. Тангенциальнозначные формы 2-го порядка// Мат. заметки. — 2019. — 105, № 1. — С. 84–94.
13. Рыбников А. К. Об аффинных связностях второго порядка// Мат. заметки. — 1981. — 29, № 2. — С. 279–290.
14. Рыбников А. К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка// Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 73–80.
15. Сарданашвили Г. А. Геометрия и классические поля. Современные методы теории поля. Т. 1. — М.: УРСС, 1996.
16. Шевченко Ю. И. Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. — Калининград, 1998.
17. Catuogno P. A geometric Itô formula// Mat. Contemp. — 2005. — 33. — P. 85–99.

Полякова Катерина Валентиновна

Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград

E-mail: KaPolyakova@kantiana.ru