Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Рыпарова, Й. Микеш, Отображения и преобразования поворота, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 180, 91–95

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-180-91-95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:29:39

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 91–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-91-95

УДК 514.76

ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВОРОТА

© 2020 г. Л. РЫПАРОВА, Й. МИКЕШ

Аннотация. В статье изложены некоторые результаты, полученные для отображений и преобразований поворота. Здесь также приводятся новые уравнения изопериметрических экстремалей поворота. Устранен ошибочный результат С. Г. Лейко, полученный для отображений поворота.

Ключевые слова: отображение поворота, преобразование поворота, изопериметрическая экстремаль поворота.

ROTATION MAPPINGS AND ROTATION TRANSFORMATIONS

© 2020 L. RÝPAROVÁ, J. MIKEŠ

ABSTRACT. In this paper, we present some results obtained for rotation mappings and rotation transformations. We also obtain new equations for isoperimetric rotation extremals. Moreover, we propose a correction of an erroneous result of S. G. Leiko for rotation mappings.

Keywords and phrases: rotation mapping, rotation transformation, isoperimetric rotation extremal.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A05

1. Введение. Диффеоморфизмы поворота поверхностей $\mathcal{S}_2$ в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_3$, а также двумерных римановых многообразий $\mathbb{V}_2$ изучались в работах С. Г. Лейко [1–3, 5, 6, 8–10, 14]. Эти результаты являются локальными и основаны на известном факте, что двумерное риманово многообразие $\mathbb{V}_2$ локально реализуется как поверхность $\mathcal{S}_2$ в $\mathbb{E}_3$.

Работа посвящена изложению результатов, полученных авторами в теории отображений поворота и преобразований поворота. Мы предлагаем более короткие решения по сравнению с указанными выше результатами Лейко. Кроме того, что в работе Лейко [1] нами обнаружена ошибка, которая, к сожалению, имеет влияние на последующие исследования.

Так как изучение отображений и преобразований поворота является предметом внутренней геометрии, ограничимся исследованием двумерного риманова пространства, при этом не исключаем псевдоримановы пространства $\mathbb{V}_2$.

2. Изопериметрические экстремали поворота. В этом разделе мы приводим результаты существования и единственности изопериметрических экстремалей поворота на двумерных (псевдо)римановых многообразиях $\mathbb{V}_2$ и на поверхностях $\mathcal{S}_2$ в евклидовом пространстве.

Изопериметрическая экстремаль поворота представляет собой кривую, определяемую следующим образом (см. [1]).

Работа выполнена при поддержке гранта Университета им. Ф. Палацкого (Оломоуц, Чехия) «Алгебраические и геометрические структуры», IGA PrF 2019015.

Определение 1. Кривую ℓ называют *изопериметрической экстремалью поворота*, если ℓ является экстремальной для $\theta[\ell]$ и $s[\ell] = \text{const}$ с фиксированными концами, где

$$s[\ell] = \int_{t_0}^{t_1} |\lambda| dt, \quad \theta[\ell] = \int_{t_0}^{t_1} k(t) dt,$$

k и λ — кривизна и касательный вектор кривой соответственно.

С. Г. Лейко доказал (см. [1]), что в (неплоском) пространстве $\mathbb{V}_2$ кривая является изопериметрической экстремалью вращения тогда и только тогда, когда ее кривизна Френе k_g и гауссова кривизна K пропорциональны:

$$k_g = c \cdot K, \quad (1)$$

где $c = \text{const}$. Также было доказано, что условие $k_g = c \cdot K$ можно записать в виде следующих уравнений внутреннего характера:

$$\lambda_2 = -\frac{g(\lambda_1, \lambda_1)}{g(\lambda, \lambda)} \cdot \lambda + \frac{\nabla_\alpha K \cdot \lambda^\alpha}{K} \cdot \lambda_1, \quad (2)$$

где $g(\lambda, \lambda_1) = 0$, $\nabla_i K$ — градиентный вектор гауссовой кривизны ($K \neq 0$) и

$$\lambda_2^h = \nabla_t \lambda_1^h \equiv \frac{d\lambda_1^h}{dt} + \lambda_1^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^h(x(t)) \lambda^\beta.$$

Эти уравнения требуют, чтобы метрика пространства принадлежала классу C^3 , а единственность гарантирована при C^4 .

В [16] эти уравнения упрощены так, что применимы для метрик класса дифференцируемости C^2 . Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение изопериметрической экстремали поворота можно записать в виде

$$\nabla_s \lambda = c \cdot K \cdot F \lambda, \quad c = \text{const}. \quad (3)$$

Структура F в $\mathbb{V}_2$ определена формулами

$$F_i^h = g^{h\alpha} \varepsilon_{\alpha i}, \quad \varepsilon_{ij} = \sqrt{|g_{11}g_{22} - g_{12}^2|} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

она удовлетворяет условиям $F^2 = \pm \text{Id}$ и $\nabla F = 0$.

Уравнения (3) проще, чем уравнения (2). Они имеют решение для метрик класса C^2 .

Дальнейшим анализом приведенного выше уравнения были даны условия единственности изопериметрических экстремалей поворота.

Теорема 2 (см. [16]). Пусть $\mathbb{V}_2$ — (не плоское) риманово многообразие класса C^3 . Тогда существует точно одна изопериметрическая экстремаль поворота, проходящая через точку $x_0 \in \mathbb{V}_2$ в заданном неизотропном направлении $\lambda_0 \in T\mathbb{V}_2$ для постоянной c .

3. Диффеоморфизм поворота. Определение диффеоморфизма поворота было введено в [1, 7] для поверхностей в евклидовом пространстве и двумерного собственно риманова многообразия $\mathbb{V}_2$.

Определение 2. Диффеоморфизм между двумерными римановыми многообразиями называется *отображением поворота*, если любая геодезическая отображается на изопериметрическую экстремаль поворота.

Понятие диффеоморфизма поворота обобщено в [12] следующим образом.

Пусть $\mathbb{V}_2 = (M, g)$ — двумерное риманово многообразие M с метрикой g и $\bar{\mathbb{A}}_2 = (\bar{M}, \bar{\nabla})$ — двумерное многообразие $\bar{M}$ с аффинной связностью $\bar{\nabla}$.

Определение 3. Диффеоморфизм $f: \mathbb{V}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ называется *отображением поворота*, если любая геодезическая из $\bar{\mathbb{A}}_2$ отображается на изопериметрическую экстремаль поворота на $\mathbb{V}_2$.

Дальнейшие исследования были сосредоточены на поиске условий, характеризующих отображения поворота. Доказана следующая теорема.

Теорема 3 (см. [12]). Пусть $\mathbb{V}_2$ допускает отображение поворота f на $\bar{\mathbb{A}}_2$. Если $\mathbb{V}_2$ и $\bar{\mathbb{A}}_2$ в общей системе координат принадлежат классам C^2 и C^1 соответственно, то гауссова кривизна K на $\mathbb{V}_2$ дифференцируема.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Если гауссова кривизна $K \notin C^1$, то диффеоморфизма поворота $\mathbb{V}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$ не существует.

Далее найдены фундаментальные уравнения диффеоморфизма поворота $\mathbb{V}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{A}}_2$, которые вытекают из определения 2, когда $\mathbb{V}_2 \in C^2$ и $\bar{\mathbb{A}}_2 \in C^1$. Более того, теорема 3 налагает необходимое условие на гауссову кривизну: $K \in C^1$.

После более глубокого анализа (см. [12]) доказана следующая теорема.

Теорема 5. Риманово многообразие $\mathbb{V}_2$ допускает отображение поворота на $\bar{\mathbb{A}}_2$ тогда и только тогда, когда в $\mathbb{V}_2$ выполняется следующее уравнение:

$$\nabla_X \theta = (\mathcal{A}(X) + \nabla_X K/K) \cdot \theta + \nu \cdot X \quad (4)$$

для любого касательного вектора X , где ∇ — связность Леви-Чивиты, K — гауссова кривизна, $\mathcal{A}$ — такая линейная форма, что $\mathcal{A}(X) = g(X, \theta)$, g — метрический тензор, ν — некоторая функция на $\mathbb{V}_2$.

С. Г. Лейко установил (см. [1]) уравнения (4) как необходимые условия существования отображения поворота двумерных римановых пространств. Эти условия (4) характеризуют θ как частный случай торсообразующего векторного поля.

В [1] (см. также [2, 5, 8]) Лейко утверждает, что из уравнений (4) вытекает, что $\mathbb{V}_2$ изометрично поверхности вращения. В [11] доказано, что это утверждение неверно, но справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Существует риманово пространство $\mathbb{V}_2$, которое не изометрично поверхности вращения, и в нем существует векторное поле, удовлетворяющее уравнениям (4).

Уравнения (4) можно записать в следующем виде:

$$\theta_j^h = \theta^h (\theta_j + \partial_j \ln |K|) + \nu \delta_j^h. \quad (5)$$

Очевидно, что θ является специальным торсообразующим векторным полем. Как известно, в любом $\mathbb{V}_2$ существуют торсообразующие векторные поля. В пространстве $\mathbb{V}_2$, метрика которого имеет вид

$$ds^2 = (dx^1)^2 + f(x^1, x^2)(dx^2)^2,$$

где

$$f = c(x^2) \cdot \exp \int F dx^1,$$

функция F удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\partial_1 F = -\frac{F^2}{2} + \frac{F}{\varkappa} - 2\frac{\varkappa'}{\varkappa^2}.$$

Это уравнение — хорошо известное дифференциальное уравнение Бернулли относительно неизвестной функции F ; переменная x^2 играет роль параметра. Общее решение этого уравнения зависит от одной произвольной функции параметра x^2 , которая играет роль постоянной интегрирования. Поэтому не в каждом $\mathbb{V}_2$ существует вышеуказанное векторное поле. С другой стороны, имеет место следующая теорема.

Теорема 7 (см. [17]). *Двумерное (псевдо)риманово многообразие $\mathbb{V}_2$ допускает векторное поле поворота θ в том и только в том случае, когда в нем следующая замкнутая система типа Коши уравнений в ковариантных производных имеет решение относительно функций $\theta_i(x)$ и $\nu(x)$:*

$$\begin{aligned}\theta_{i,j} &= \theta_i(\theta_j + \partial_j K/K) + \nu g_{ij}, \\ \nu_i &= \nu(\theta_i - \partial_i K/K) - K\theta_i - \theta_\alpha \theta_\beta g^{\alpha\beta} \partial_i K/K + \theta_i g^{\alpha\beta} \theta_\alpha \partial_\beta K/K.\end{aligned}\quad (6)$$

Для начальных условий Коши

$$\theta_i(x_0) = \theta_i^0, \quad \nu(x_0) = \nu_0, \quad (7)$$

где $x_0 \in \mathbb{V}_2 \in C^3$, система (6) имеет не более одного решения $\theta_i(x)$, $\nu(x)$. Также можно заменить условие $\mathbb{V}_2 \in C^3$ более слабым условием: $g \in C^2$ и $K \in C^1$.

Отметим, что общее решение (6) для начальных условий (7) зависит не более чем от трех вещественных параметров, в качестве которых могут быть выбраны, например, числа θ_i^0 и ν_0 .

4. Отображения поворота поверхностей вращения. Далее рассмотрим риманово многообразие, которое изометрично поверхности вращения. С. Г. Лейко (см. [1]) изучил уравнения отображений поворота поверхностей вращения и определил особые случаи поверхностей вращения, которые допускают эти отображения. Л. Рыпарова и Й. Микеш доказали (см. [19]), что любая поверхность вращения с дифференцируемой гауссовой кривизной допускает диффеоморфизм поворота, и то же самое верно для (псевдо)римановых пространств (эти результаты верны локально).

В статье Лейко [1] метрики поверхности вращения $\mathcal{S}_2$ представлены в виде

$$ds^2 = f(r)dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (8)$$

Он доказал, что отображение поворота римановых пространств $\mathbb{V}_2$ и $\bar{\mathbb{V}}_2$ существует тогда и только тогда, когда эти пространства являются изометрическими поверхностям вращения, а метрики $\mathbb{V}_2$ и $\bar{\mathbb{V}}_2$ имеют следующую форму:

$$\begin{aligned}(\tilde{g}_{ij}) &= \frac{f(r)}{A^2(B + \sqrt{f(r)})^2} \text{diag}(f(r), r^2), \\ (\tilde{g}_{ij}) &= B^2 f(r) \text{diag}(f(r), r^2), \quad A \neq 0, \quad B = \text{const}\end{aligned}\quad (9)$$

(см. [1, теорема 2]).

Мы рассмотрели метрику поверхности вращения в более общем виде:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + f(x^1)(dx^2)^2. \quad (10)$$

Эта метрика, в отличие от метрики (9), включает в себя горловые окружности.

Теорема 8 (см. [18]). *Любая поверхность вращения $\mathcal{S}_2$ с дифференцируемой гауссовой кривизной K допускает отображение поворота на $\bar{\mathbb{A}}_2$.*

Более того, эта теорема справедлива даже для псевдоримановых пространств, имеющих неопределенную метрику в случае, когда $f(x^1) < 0$.

5. Бесконечно малые поворотные преобразования. Бесконечно малые преобразования (псевдо)римановых пространств V_n можно в координатной форме определить следующим образом:

$$\bar{x}^h = x^h + \varepsilon \xi^h(x), \quad (11)$$

где x^h — координаты определенной точки в V_n , и $\bar{x}^h$ являются координатами его изображения при бесконечно малом преобразовании, ε является бесконечно малым параметром, не зависящим от x^h , и ξ^h — вектор смещения (см. [13, 15]).

В заключение в [19] доказана следующая теорема, которая значительно улучшает результат [4].

Теорема 9. Дифференциальный оператор $\xi = \xi^\alpha(x)\partial_\alpha$ ($\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$) определяет бесконечно малое преобразование поворота (псевдо)риманова пространства $\mathbb{V}_2$ тогда и только тогда, когда ξ удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma_{ij}^h = \delta_{(i}^h \psi_{j)} + \theta^h g_{ij}, \quad \theta_i^h = \theta^h (\theta_i + K_i/K) + \nu \delta_i^h, \quad (12)$$

где ψ_i — ковектор, δ_i^h — символ Кронекера, θ^h — векторное поле, g — метрический тензор, K ($K \neq 0$) — гауссова кривизна и $\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли относительно ξ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейко С. Г. Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства // Мат. заметки. — 1990. — 47, № 3. — С. 52–57.
2. Лейко С. Г. Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств // Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 10. — С. 9–17.
3. Лейко С. Г. Экстремали функционалов поворота кривых псевдориманова пространства и траекторий спин-частиц в гравитационных полях // Докл. РАН. — 1992. — 325, № 4. — С. 659–663.
4. С. Г. Лейко Инфинитезимальные поворотные преобразования и деформации поверхностей евклидова пространства // Докл. РАН. — 1995. — 344, № 2. — С. 162–164.
5. Лейко С. Г. Изопериметрические экстремали поворота на поверхностях в евклидовом пространстве E^3 // Изв. вузов. Мат. — 1996. — № 6. — С. 25–32.
6. Лейко С. Г. О конформных, конциркулярных и спиновых отображениях гравитационных полей // Мат. методы физ.-мех. поля. — 1997. — 40, № 2. — С. 44–47.
7. Лейко С. Г. Поворотные преобразования поверхностей // Мат. физ., анал., геом. — 1998. — 5, № 3/4. — С. 203–211.
8. Лейко С. Г. Изопериметрические задачи для функционалов поворота первого и второго порядков в (псевдо)римановых многообразиях // Изв. вузов. Мат. — 2005. — № 5. — С. 49–55.
9. Лейко С. Г., Федченко Ю. С. Інфінітезимальні поворотні деформації поверхонь та їх застосування в теорії пружних оболонок // Укр. мат. ж. — 2003. — 55, № 12. — С. 1697–1703.
10. Лейко С. Г., аль Хуссен С. Поворотные квазиконциркулярные диффеоморфизмы на (псевдо)римановых пространствах // Мат. методы физ.-мех. поля. — 2001. — 44, № 1. — С. 22–27.
11. Микеш Й., Рыпарова Л., Худа Г. К теории поворотных отображений // Мат. заметки. — 2018. — 104, № 4. — С. 637–640.
12. Chudá H., Mikeš J., Sochor M. Rotary diffeomorphism onto manifolds with affine connection // in: Geometry, Integrability, and Quantization. — Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 2017. — Vol. 18. — P. 130–137.
13. Hinterleitner I. Special mappings of equidistant spaces // J. Appl. Math. — 2008. — 2. — P. 31–36.
14. Leiko S. G. Conservation laws for spin trajectories generated by isoperimetric extremals of rotation // Grav. Theor. Relativ. — 1988. — 26. — P. 117–124.
15. Mikeš J. et al. Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc, Czech Republic: Palacky Univ. Press, 2015.
16. Mikeš J., Sochor M., Stepanova E. On the existence of isoperimetric extremals of rotation and the fundamental equations of rotary diffeomorphisms // Filomat. — 2015. — 29, № 3. — P. 517–523.
17. Rýparová L., Křížek J., Mikeš J. On fundamental equations of rotary vector fields // Proc. 18th Conf. APLIMAT. — 2019. — P. 1030–1034.
18. Rýparová L., Mikeš J. On rotary mappings of surfaces of revolution // Proc. Int. Conf. “MITAV-2017” (Brno, June 15–16, 2017). — Brno, 2017. — P. 208–216.
19. Rýparová L., Mikeš J. Infinitesimal rotary transformation // Filomat — 2019. — 33, № 4.

Рыпарова Ленка

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: lenka.ryparova01@upol.cz

Микеш Йозеф

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: josef.mikes@upol.cz