Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Султанов, О. А. Монахова, О полусимметрических горизонтальных лифтах линейных связностей с базы в расслоение дважды ковариантных тензоров, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 180, 96–102

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-180-96-102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:55:36

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 96–102
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-96-102

УДК 514.76

О ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЛИФТАХ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ С БАЗЫ В РАССЛОЕНИЕ ДВАЖДЫ КОВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ

© 2020 г. А. Я. СУЛТАНОВ, О. А. МОНАХОВА

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия того, чтобы горизонтальный лифт линейной связности на расслоении дважды ковариантных тензоров являлся полусимметрической связностью.

Ключевые слова: расслоение дважды ковариантных тензоров, горизонтальный лифт линейной связности, полусимметрическая связность.

SEMISYMMETRIC HORIZONTAL LIFTS OF LINEAR CONNECTIONS FROM THE BASE TO THE BUNDLE OF DOUBLY COVARIANT TENSORS

© 2020 А. YA. SULTANOV, O. A. MONAKHOVA

ABSTRACT. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions under which the horizontal lift of a linear connection on the bundle of doubly covariant tensors is a semisymmetric connection.

Keywords and phrases: bundle of doubly covariant tensors, horizontal lift of a linear connection, semisymmetric connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A55

1. Введение. В теории движений И. П. Егоров установил (см. [1]), что в случае, когда линейная связность имеет кручение, максимальная размерность групп аффинных преобразований достигается в пространствах с полусимметрической линейной связностью. В связи с этим изучение полусимметрических линейных связностей имеет интерес и перспективу развития в направлении изучения инфинитезимальных аффинных преобразований.

Раздел 2 настоящей работы посвящен определениям лифтов функций и тензорных полей в расслоение дважды ковариантных тензоров. Приведены свойства построенных лифтов (см. [2]). В разделе 3 описывается построение горизонтального лифта линейной связности, заданной на базе, в ее расслоение дважды ковариантных тензоров (см. [2]). Горизонтальный лифт линейной связности строится с помощью другой линейной связности, заданной на базе расслоенного пространства. Приведены тождества, которым удовлетворяют тензоры кручения и кривизны построенного горизонтального лифта линейной связности. Раздел 4 посвящен исследованию свойств полусимметрических горизонтальных лифтов линейных связностей.

2. Лифты функций и векторных полей с базы в ее расслоение дважды ковариантных тензоров. Пусть M_n — гладкое класса C^∞ многообразие размерности n ($n > 1$), p — произвольная точка на нем, T_p^* — кокасательное пространство к M_n в этой точке. Обозначим через $(T_2^0)_p = T_p^* \otimes T_p^*$ пространство дважды ковариантных тензоров в точке p многообразия M_n . Объединение всех пространств $(T_2^0)_p$ называется тензорным расслоением типа $(0, 2)$ над базой M_n :

$$T_2^0(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} (T_2^0)_p.$$

Элементом расслоения $T_2^0(M_n)$ является совокупность точки p и тензора t типа $(0, 2)$ в этой точке; введем обозначение $\tilde{p} = (p, t) \in T_2^0(M_n)$, $p \in M_n$, $t \in (T_2^0)_p$. Канонической проекцией служит отображение $\pi: T_2^0(M_n) \rightarrow M_n$, определяемое по закону: для каждой точки $\tilde{p}$ расслоения $T_2^0(M_n)$ образ есть $\pi(\tilde{p}) = p$. Каноническая проекция позволяет ввести понятие вертикального лифта функций с базы в расслоенное пространство, так же как для касательных и кокасательных расслоений (см. [5]).

Обозначим через $C^\infty(M_n)$ алгебру C^∞ -гладких функций над полем действительных чисел, заданных на базе расслоенного пространства.

Определение 1. Для любой функции $f \in C^\infty(M_n)$ функция f^V на расслоении $T_2^0(M_n)$, определенная условием: $f^V = f \circ \pi$, называется вертикальным лифтом функции f .

Для любой точки $\tilde{p} = (p, t)$ расслоенного пространства

$$f^V(\tilde{p}) = (f \circ \pi)(\tilde{p}) = f(\pi(\tilde{p})) = f(p).$$

Отметим некоторые свойства вертикальных лифтов функций. Из определения вертикального лифта функций следует, что функции f^V постоянны на слоях. Имеет место следующая теорема.

Предложение 1. Для произвольных гладких функций f и g , заданных на M_n , выполняются следующие равенства:

$$(f + g)^V = f^V + g^V, \quad (Cf)^V = Cf^V, \quad (f \cdot g)^V = f^V \cdot g^V,$$

где C — произвольная константа.

На расслоении $T_2^0(M_n)$ естественным образом возникает структура гладкого многообразия, индуцированная соответствующей структурой на базе. А именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. Расслоение $T_2^0(M_n)$ является гладким многообразием размерности $n + n^2$.

Построим отображение $f: \pi^{-1}(U) \rightarrow W \subset \mathbb{R}^{n+n^2}$ с помощью координатных функций $(x^i)^V$, x_{jk} , $i, j, k = 1, \dots, n$. В каждой точке $\tilde{p} = (p, t) \in \pi^{-1}(U)$ положим

$$f(\tilde{p}) = ((x^i)^V(\tilde{p}), x_{jk}(\tilde{p})),$$

где $(x^i)^V(\tilde{p}) = p^i$ — координаты точки p в карте (U, x^i) ; $x_{jk}(\tilde{p}) = t_{jk}$ — компоненты тензора t в точке $p \in U$. Получили карту $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ на $T_2^0(M_n)$, индуцированную картой (U, x^i) на M_n . Совокупность таких карт, построенных для всех областей атласа A , образует атлас на $T_2^0(M_n)$. Пусть $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ и $(\pi^{-1}(V), x^{i'}, x_{j'k'})$ — две карты, имеющие непустое пересечение их областей. Тогда закон преобразования координатных функций на $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ имеет вид

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad x_{j'k'} = x_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}. \quad (1)$$

Функции в правых частях равенств (1) являются C^∞ -гладкими. Соответствующая якобиева матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^s} & x_{jk} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{s'}} \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'} \partial x^{s'}} \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s} \right) \\ 0 & \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \end{pmatrix}.$$

Якобиан преобразования (1) не равен нулю, откуда следует, что построенное отображение f является гомеоморфизмом. Тем самым доказали, что $T_2^0(M_n)$ — гладкое класса C^∞ многообразие размерности $n + n^2$.

Векторные поля

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_{jk}}, \quad i, j, k = \overline{1, n},$$

образуют поле натурального репера на $\pi^{-1}(U) \subset T_2^0(M_n)$. Дуальный ему корепер образуют 1-формы dx^i, dx_{jk} на $T_2^0(M_n)$. Закон преобразования полей натурального репера имеет вид

$$\partial_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i + x_{j'k'} \left(\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \right) \partial^{jk}, \quad \partial^{j'k'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \partial^{jk}.$$

Ковекторные поля dx^i, dx_{jk} преобразуются по закону

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \quad dx_{j'k'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx_{jk} + x_{jk} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_q^p(M_n)$ модуль тензорных полей типа (p, q) , заданных на многообразии M_n над алгеброй гладких функций $C^\infty(M_n)$.

На расслоении $T_2^0(M_n)$ определим функции, порожденные тензорными полями типа $(2, 0)$ на базе расслоенного пространства. Пусть $T \in \mathfrak{T}_0^2(M_n)$ в карте (U, x^i) имеет вид $T = T^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$. Для каждой точки $\tilde{p} = (p, t)$ значение $\gamma T(p)$ определим следующим образом. Выберем область локальной карты $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$, содержащую точку $\tilde{p}$, и положим

$$\gamma T(\tilde{p}) = T^{ij}(p) x_{ij}.$$

Определенная таким образом функция не зависит от выбора локальной карты.

Определим вертикальный лифт тензорных полей типа $(0, 2)$ с базы M_n в расслоение $T_2^0(M_n)$. Пусть в локальной карте (U, x^i) тензорное поле $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ имеет разложение $Q = Q_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

Определение 2. Вертикальным лифтом тензорного поля $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, назовем векторное поле Q^V , заданное на расслоении $T_2^0(M_n)$, удовлетворяющее следующему условию:

$$Q^V(\gamma T) = (Q \circ T)^V, \quad \text{где} \quad Q \circ T = Q_{ij} T^{ij}.$$

Предложение 3. Для произвольных тензорных полей $Q, W \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ и любых функций $f \in C^\infty(M_n)$ выполнены следующие равенства:

$$Q^V(f^V) = 0, \quad Q^V + W^V = (Q + W)^V, \quad (f^Q)^V = f^V Q^V, \quad [Q^V, W^V] = 0.$$

Полный лифт векторных полей с базы в тензорное расслоение типа (p, q) определен Б. Н. Шапурковым в [4]. Для расслоения $T_2^0(M_n)$ компоненты полного лифта векторного поля X в локальной карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ имеют вид

$$X^C = X^k \partial_k + (-\partial_i X^m x_{mj} - \partial_j X^t x_{it}) \partial^{ij}.$$

Теорема 1. На расслоенном пространстве $T_2^0(M_n)$ полный лифт X^C является единственным векторным полем, удовлетворяющим условию

$$X : C(\gamma T) = \gamma(L_X T),$$

где $L_X T$ — производная Ли тензорного поля T типа $(2, 0)$ вдоль векторного поля X .

Предложение 4. Для любых тензорных полей $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$, $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ выполняются следующие равенства:

$$[X^C, Q^V] = (L_X Q)^V, \quad [X^C, Y^C] = [X, Y]^C.$$

Определим лифты V_1, V_2 тензорных полей типа $(1, 1)$ с базы в расслоение $T_2^0(M_n)$. Пусть тензорное поле S типа $(1, 1)$ в локальной карте (U, x^i) на базе имеет представление $S = S_j^i \partial_i \otimes dx^j$.

Определение 3. Лифтом V_1 тензорного поля $S \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ назовем векторное поле S^{V_1} на $T_2^0(M_n)$, имеющее следующий вид в локальной карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$:

$$S^{V_1} = S_j^i x_{ik} \partial^{jk}.$$

Определение 4. Лифтом V_2 тензорного поля $S \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ назовем векторное поле S^{V_2} на $T_2^0(M_n)$, имеющее следующий вид в локальной карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$:

$$S^{V_2} = S_j^i x_{ki} \partial^{kj}.$$

Предложение 5. Для любых тензорных полей $S \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$, $T \in \mathfrak{T}_0^2(M_n)$ выполняются следующие равенства:

$$S^{V_1}(\gamma T) = \gamma(T^1 \circ S), \quad S^{V_2}(\gamma T) = \gamma(T^2 \circ S),$$

где свертки определены следующим образом для произвольных 1-форм ω, τ на базе:

$$(T^1 \circ S)(\omega, \tau) = T(\omega \circ S, \tau); \quad (T^2 \circ S)(\omega, \tau) = T(\omega, \tau \circ S).$$

Предложение 6. Для произвольных тензорных полей

$$S, Q \in \mathfrak{T}_1^1(M_n), \quad X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n), \quad T \in \mathfrak{T}_0^2(M_n), \quad D \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$$

выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [S^{V_1}, Q^{V_2}] &= 0, \quad [S^{V_1}, Q^{V_1}] = [S, Q]^{V_1}, \quad [S^{V_2}, Q^{V_2}] = [S, Q]^{V_2}, \quad [X^C, Q^{V_1}] = (L_X Q)^{V_1}, \\ [X^C, Q^{V_2}] &= (L_X Q)^{V_2}, \quad [D^V, S^{V_1}](\gamma T) = (D \circ (T^1 \circ S))^V, \quad [D^V, S^{V_2}](\gamma T) = (D \circ (T^2 \circ S))^V. \end{aligned}$$

Пусть на базе M_n расслоения дважды ковариантных тензоров задана линейная связность ∇ , и в локальной карте (U, x^i) компонентами связности ∇ являются функции Γ_{ij}^k , так что

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Б. Н. Шапуков в [4] определил горизонтальный лифт векторного поля X с базы M_n в расслоенное пространство $T_2^0(M_n)$, как векторное поле, имеющее следующее локальное представление в карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$:

$$X^H = X^k \partial_k + X^s (\Gamma_{si}^m x_{mj} + \Gamma_{sj}^m x_{im}) \partial^{ij}.$$

Теорема 2. На расслоенном пространстве $T_2^0(M_n)$ горизонтальный лифт X^H является единственным векторным полем, удовлетворяющим условию

$$X^H(\gamma T) = \gamma(\nabla_X T).$$

Предложение 7. Для любых тензорных полей $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$, $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, $S \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$ и любых функций $f \in C^\infty(M_n)$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} (X + Y)^H &= X^H + Y^H, \quad (fX)^H = f^V X^H, \quad [X^H, Q^V] = (\nabla_X Q)^V, \\ [X^H, Y^H] &= [X, Y]^H + R(X, Y)^{V_1} + R(X, Y)^{V_2}, \\ [X^H, S^{V_1}] &= (\nabla_X S)^{V_1}, \quad [X^H, S^{V_2}] = (\nabla_X S)^{V_2}. \end{aligned}$$

где R — тензор кривизны связности ∇ на базе расслоенного пространства.

3. Горизонтальный лифт линейной связности на расслоение дважды ковариантных тензоров. Пусть на базе M_n в карте (U, x^i) задана линейная связность $\overset{\circ}{\nabla}$ с компонентами $\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i$ и связность ∇ с компонентами Γ_{jk}^i в натуральном репере. С помощью связности $\overset{\circ}{\nabla}$ можно построить горизонтальные лифты векторных полей, а также горизонтальный лифт ∇^H связности ∇ на расслоение дважды ковариантных тензоров (см. [2]).

Теорема 3. На расслоении $T_2^0(M_n)$ существует единственная линейная связность ∇^H , удовлетворяющая следующим условиям:

$$\nabla_{Q^V}^H W^V = 0, \quad \nabla_{X^H}^H Y^H = (\nabla_X Y)^H, \quad \nabla_{Q^V}^H X^H = 0, \quad \nabla_{X^H}^H Q^V = (\nabla_X Q)^V$$

для любых тензорных полей $Q, W \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$.

Найдем тензоры кривизны и кручения построенной связности ∇^H на $T_2^0(M_n)$. Пусть на базе расслоенного пространства связность $\overset{\circ}{\nabla}$ имеет тензоры кручения $\overset{\circ}{T}$ и кривизны $\overset{\circ}{R}$, а связность ∇ — тензоры кручения T и кривизны R . Для тензора кручения построенного горизонтального лифта связности ∇^H имеет место следующее утверждение.

Предложение 8. Пусть $\tilde{T}$ — тензор кручения связности ∇^H , тогда для произвольных тензорных полей $Q, W \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{T}(Q^V, W^V) &= 0, \quad \tilde{T}(X^H, Q^V) = -\tilde{T}(Q^V, X^H) = (\nabla_X Q - \overset{\circ}{\nabla}_X Q)^V, \\ \tilde{T}(X^H, Y^H) &= (T(X, Y))^H - (\overset{\circ}{R}(X, Y))^{V_1} - (\overset{\circ}{R}(X, Y))^{V_2}.\end{aligned}$$

Для тензора кривизны построенной связности имеет место

Предложение 9. Пусть $\tilde{R}$ — тензор кривизны связности ∇^H , тогда для произвольных тензорных полей $Q, U, W \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{R}(Q^V, W^V)U^V &= 0, \quad \tilde{R}(Q^V, X^H)Y^H = 0, \quad \tilde{R}(Q^V, W^V)Y^H = 0, \quad \tilde{R}(Q^V, X^H)W^V = 0, \\ \tilde{R}(X^H, Y^H)Z^H &= (R(X, Y)Z)^H, \quad \tilde{R}(X^H, Y^H)Q^V = (-Q^1 \bullet R(X, Y) - Q^2 \bullet R(X, Y))^V.\end{aligned}$$

Свертки $Q^1 \bullet R(X, Y)$, $Q^2 \bullet R(X, Y)$ — тензорные поля типа $(0, 2)$ на базе определяются следующим образом: для любых векторных полей $A, B \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ выполняются равенства

$$(Q^1 \bullet R(X, Y))(A, B) = Q(R(X, Y)A, B), \quad (Q^2 \bullet R(X, Y))(A, B) = Q(A, R(X, Y)B).$$

4. Полусимметрические горизонтальные лифты линейных связностей. Полусимметрическая линейная связность ∇ на гладком многообразии M_n по А. П. Нордену (см. [3]) характеризуется тем, что тензор кручения T этой связности имеет следующее строение

$$T = \phi \otimes I - I \otimes \phi$$

для некоторой 1-формы ϕ , заданной на M_n . Это условие в локальных координатах равносильно выполнимости следующих соотношений

$$T_{ij}^k = \varphi_i \delta_j^k - \varphi_j \delta_i^k,$$

где δ_i^k — символ Кронекера. Отсюда следует, что $T \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\phi \neq 0$.

Выясним, при каких условиях линейная связность ∇^H , заданная на $T_2^0(M_n)$, является полусимметрической. Для этого обратимся к тождествам, которым удовлетворяет тензор кручения $\tilde{T}$ связности ∇^H . Эти тождества перечислены в предложении 8.

Выберем координатную окрестность $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ произвольной точки $\tilde{p} \in T_2^0(M_n)$ и адаптированный к ∇^H подвижной репер на $\pi^{-1}(U)$ с векторными полями

$$\partial_i^H = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^H, \quad D^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_{jk}}.$$

Предположим, что $\tilde{T} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\phi}$, где $\tilde{\phi}$ — 1-форма, а $\tilde{I}$ — единичный аффинор на $T_2^0(M_n)$. Для векторных полей D^{jk}, D^{lm} имеем

$$\tilde{T}(D^{jk}, D^{lm}) = \tilde{\phi}^{jk} D^{lm} - \tilde{\phi}^{lm} D^{jk}, \quad \text{где } \tilde{\phi}^{jk} = \tilde{\phi}(D^{jk}).$$

В силу предложения 8 и определения 2 вертикального лифта тензорного поля типа $(0, 2)$, а также в силу представления векторного поля

$$D^{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} = (dx^i \otimes dx^j)^V$$

имеем $\tilde{T}(D^{jk}, D^{lm}) = 0$, поэтому

$$(\tilde{\phi}^{jk} \delta_s^l \delta_t^m - \tilde{\phi}^{lm} \delta_s^j \delta_t^k) D^{st} = 0.$$

В силу линейной независимости в каждой точке $\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ векторных полей D^{st} , из полученных соотношений следует, что

$$\tilde{\phi}^{jk} \delta_s^l \delta_t^m - \tilde{\phi}^{lm} \delta_s^j \delta_t^k = 0.$$

Свернув эти соотношения по s и j , t и k , получим

$$\tilde{\phi}^{lm} - n^2 \tilde{\phi}^{lm} = 0.$$

Учитывая ограничение $n > 1$ для размерности базы M_n , имеем, что $\tilde{\phi}^{lm} = 0$. Теперь обратимся ко второму тождеству предложения 8:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\partial_i^H, D^{jk}) &= (\nabla_{\partial_i}(dx^j \otimes dx^k) - \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i}(dx^j \otimes dx^k))^V = \\ &= (\nabla_{\partial_i} dx^j \otimes dx^k + dx^j \otimes \nabla_{\partial_i} dx^k - \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^j \otimes dx^k - dx^j \otimes \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^k)^V = \\ &= ((\nabla_{\partial_i} dx^j - \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^j) \otimes dx^k + dx^j \otimes (\nabla_{\partial_i} dx^k - \overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^k))^V. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\nabla_{\partial_i} dx^j = -\Gamma_{it}^j dx^t$, $\overset{\circ}{\nabla}_{\partial_i} dx^j = -\overset{\circ}{\Gamma}_{it}^j dx^t$, получим

$$\tilde{T}(\partial_i^H, D^{jk}) = (S_{it}^j dx^t \otimes dx^k + S_{it}^k dx^j \otimes dx^t)^V = S_{it}^j D^{tk} + S_{it}^k D^{jt} = (S_{it}^j \delta_l^k + S_{it}^k \delta_t^j) D^{tl},$$

где $S_{it}^j = -\Gamma_{it}^j + \overset{\circ}{\Gamma}_{it}^j$ — компоненты тензора деформации S . С другой стороны,

$$\tilde{T}(\partial_i^H, D^{jk}) = \tilde{\phi}_i D^{jk} - \tilde{\phi}^{jk} \partial_i^H.$$

Учитывая, что $\tilde{\phi}^{jk} = 0$, из последних соотношений следует

$$S_{it}^j \delta_l^k + S_{it}^k \delta_t^j = \tilde{\phi}_i \delta_l^j \delta_t^k. \quad (2)$$

Свернем обе части соотношений (2) по j и t . Тогда

$$s_i \delta_l^k + n S_{il}^k = n \tilde{\phi}_i \delta_l^k, \quad (3)$$

где $s_i = S_{it}^t$. Полученные соотношения (3) свернем по индексам k и l . В результате чего получим $2s_i = n \tilde{\phi}_i$. Отсюда находим $\tilde{\phi}_i = \frac{2}{n} s_i$. Учитывая эти равенства, из (3) получим, что

$$S_{il}^k = \frac{1}{n} s_i \delta_l^k.$$

Прямые вычисления позволяют заключить, что соотношения (2) будут выполняться тождественно, если в (2) заменим $\tilde{\phi}_i$ и S_{il}^k по полученным формулам.

На основании третьего тождества предложения 8 имеем:

$$\tilde{T}(\partial_i^H, \partial_j^H) = T_{ij}^k \partial_k^H - (\overset{\circ}{R}_{lij}^k \partial_k \otimes dx^l)^{V_1} - (\overset{\circ}{R}_{lij}^k \partial_k \otimes dx^l)^{V_2} = T_{ij}^k \partial_k^H - (\overset{\circ}{R}_{lij}^k x_{kt} + \overset{\circ}{R}_{tij}^k x_{lk}) D^{lt}.$$

Но $\tilde{T}(\partial_i^H, \partial_j^H) = \tilde{\phi}_i \partial_j^H - \tilde{\phi}_j \partial_i^H = (\tilde{\phi}_i \delta_j^k - \tilde{\phi}_j \delta_i^k) \partial_k^H$. Из полученных соотношений следует, что

$$T_{ij}^k = \tilde{\phi}_i \delta_j^k - \tilde{\phi}_j \delta_i^k, \quad \overset{\circ}{R}_{lij}^k x_{kt} + \overset{\circ}{R}_{tij}^k x_{lk} = 0. \quad (4)$$

Дифференцируя тождества (4) по переменным x_{sm} , получим

$$\overset{\circ}{R}_{lij}^k \delta_k^s \delta_t^m + \overset{\circ}{R}_{tij}^k \delta_l^s \delta_k^m = 0,$$

или

$$\overset{\circ}{R}_{lij}^s \delta_t^m + \overset{\circ}{R}_{tij}^m \delta_l^s = 0.$$

Свернув эти равенства по s и t , находим, что $\overset{\circ}{R}_{lij}^m = 0$. Таким образом, если $\tilde{T} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\phi}$ для некоторой 1-формы $\tilde{\phi}$, то

$$T = \frac{2}{n} (s \otimes I - I \otimes s), \quad \overset{\circ}{R} = 0, \quad (5)$$

где s — 1-форма, полученная сверткой $C_2^1 S$ тензора деформации связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$. Обратно, если выполняются условия (5), то

$$\tilde{T} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\phi}.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Линейная связность ∇^H является полусимметрической тогда и только тогда, когда связность ∇ — полусимметрическая и тензор кривизны линейной связности $\overset{\circ}{\nabla}$ тождественно равен 0.*

Из этой теоремы получаем еще несколько утверждений.

Следствие 1. *Если $\nabla = \overset{\circ}{\nabla}$, то следующие условия эквивалентны:*

- (а) ∇^H — полусимметрическая связность;
- (б) линейная связность ∇ — локально плоская связность.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б). Для тензора деформации имеем $S = 0$, поэтому $s_i = 0$, т.е. $T = 0$; второе условие $R = \overset{\circ}{R} = 0$. Значит, связность ∇ — локально плоская.

Импликация (б) $\Rightarrow$ (а) очевидна: если $T = 0$ и $R = 0$, то $\tilde{T} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\phi} = 0$. $\square$

Следствие 2. *Если линейная связность ∇ не является полусимметрической или $\overset{\circ}{R} \neq 0$, то линейная связность ∇^H не является полусимметрической.*

Отметим также следующий частный случай.

Следствие 3. *Пусть $\nabla = \overset{\circ}{\nabla}$. Если $T \neq 0$ или $R \neq 0$, то линейная связность ∇^H не является полусимметрической.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров И. П. Движения в пространствах аффинной связности. — М.: Либроком, 2016.
2. Монахова О. А. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Пенза: Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, 2004.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
4. Шапужов Б. Н. Структуры на расслоенных многообразиях и вопросы редукции/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Казань: Казанский государственный университет, 1990.
5. Yano K., Ishihara S. Tangent and Cotangent Bundles. — New York: Marcel Dekker, 1973.

Султанов Адгам Яхиевич

Пензенский государственный университет

E-mail: sultanovaya@rambler.ru

Монахова Оксана Александровна

Пензенский государственный университет

E-mail: oxmonakh@mail.ru