Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Султанова, Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 180, 103–108

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-180-103-108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:01:20

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 103–108
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-103-108

УДК 514.76

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ

© 2020 г. Г. А. СУЛТАНОВА

Аннотация. В работе исследуются максимальные размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта над пространствами полусимметрической связности.

Ключевые слова: касательное расслоение, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли, полусимметрическая связность.

LIE ALGEBRAS OF INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS OF TANGENT BUNDLES

© 2020 G. A. SULTANOVA

ABSTRACT. In this paper, we examine maximal dimensions of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of tangent bundles with a complete lift connection over spaces with a semisymmetric connection.

Keywords and phrases: tangent bundle, infinitesimal affine transform, Lie algebra, semisymmetric connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A55

1. Введение. Касательные расслоения первого порядка TM гладких многообразий возникли в середине 1930-х гг. прошлого столетия в связи с созданием теории расслоенных пространств. Первые результаты по теории касательных расслоений принадлежали А. Моримото, Ш. Сасаки, К. Яно, С. Исихара. Среди отечественных ученых касательные расслоения и их обобщения исследовали А. П. Широков, В. В. Вишневский, В. В. Шурыгин, Б. Н. Шапуков, Ф. И. Каган и другие.

Вопросами аффинных преобразований в касательных расслоениях занимались К. Яно, Ш. Кобаяси, К. Сато, Ш. Танно. Исследованию касательных расслоений и их обобщений, а также их автоморфизмов, снабженных различными геометрическими структурами, посвящены работы В. Г. Подольского, Х. Шадыева. В настоящее время автоморфизмы расслоений А. Вейля рассматриваются А. Я. Султановым.

В данной работе исследуются максимальные размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях, снабженных полным лифтом полусимметрической связности, заданной на многообразии.

2. Основные понятия. Пусть M — связное гладкое многообразие класса C^∞ размерности n ($n \geq 2$), $C^\infty(M)$ — алгебра вещественнозначных функций класса C^∞ на M .

Рассмотрим линейную связность ∇ , заданную на M . С этой связностью связаны два тензорных поля T и R кручения и кривизны, соответственно, определяемые тождествами

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

Линейная связность ∇ позволяет задавать на M еще одну линейную связность $\hat{\nabla}$ условием (см. [2])

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M)$. Линейные связности $\hat{\nabla}$ и ∇ удовлетворяют тождеству

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - T(X, Y).$$

Тензорные поля кручения T и $\hat{T}$ связностей ∇ и $\hat{\nabla}$ связаны между собой соотношением $\hat{T} + T = 0$. Ясно, что если $T = 0$, то $\hat{\nabla} = \nabla$. С помощью линейных связностей $\hat{\nabla}$, ∇ определим линейную связность $\overset{0}{\nabla}$ на M условием

$$\overset{0}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \hat{\nabla}_X Y).$$

Прямые вычисления позволяют установить, что ее тензорное поле $\overset{0}{T}$ кручения равно нулю.

Линейную связность $\overset{0}{\nabla}$ принято называть сопутствующей связностью без кручения для связности ∇ (см. [2]).

Пространство линейной связности с ненулевым тензорным полем кручения T обозначим, следуя И. П. Егорову, через Λ_n .

Определение 1 (см. [3]). Пространство Λ_n называется пространством полусимметрической линейной связности, если тензорное поле кручения T удовлетворяет условию

$$T = \varphi \otimes I - I \otimes \varphi, \quad (1)$$

где φ — некоторая 1-форма на M , I — единичный аффино́р на M .

В карте (U, x^i) компоненты тензорного поля T кручения, удовлетворяющего условию (1), представимы в виде

$$T_{jk}^i = \delta_j^i T_k - \delta_k^i T_j, \quad (2)$$

где δ_j^i — символ Кронекера.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы пространство линейной связности с кручением было пространством с полусимметрической линейной связностью, является выполнение в каждой системе координат равенств (см. [1]):

$$T_{jk}^i = 0, \quad i \neq j, k.$$

Определение 2 (см. [1]). Векторное поле X называется инфинитезимальным аффинным преобразованием связности ∇ , если

$$L_X \nabla = 0,$$

где $L_X \nabla$ — тензорное поле типа $(1, 2)$, называемое производной Ли и задаваемое тождеством

$$L_X \nabla(Y, Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Известно, что если X — инфинитезимальное аффинное преобразование связности ∇ , то выполняются следующие условия

$$L_X \nabla^m R = 0, \quad L_X \nabla^m T = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\nabla^m R$, $\nabla^m T$ — ковариантные дифференциалы тензорных полей кривизны R и кручения T связности ∇ . Здесь $\nabla^0 R = R$, $\nabla^0 T = T$.

Исходя из определения линейных связностей $\hat{\nabla}, \overset{0}{\nabla}$, можно доказать, что уравнение $L_X \nabla = 0$ равносильно системе уравнений

$$L_X \overset{0}{\nabla} = 0, \quad L_X T = 0. \quad (4)$$

Тогда равенства (3) оказываются равносильными для связности $\overset{0}{\nabla}$ следующим соотношениям:

$$L_X \overset{0}{\nabla}^m \overset{0}{R} = 0, \quad L_X \nabla^m T = 0, \quad (5)$$

где $\overset{0}{R}$ — тензорное поле кривизны связности $\overset{0}{\nabla}$.

Соотношения (5) называются условиями интегрируемости уравнения $L_X \nabla = 0$. При $m = 0$ соответствующая система представляет собой первую серию условий интегрируемости (см. [1]).

3. Касательные расслоения. Для связного дифференцируемого многообразия M обозначим через TM его касательное расслоение. Атлас естественной гладкой структуры на TM состоит из карт $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$. Приведем определения лифтов некоторых объектов, которые нам понадобятся в дальнейшем. Все рассматриваемые объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$, где $\pi: TM \rightarrow M$ — каноническая проекция, называется вертикальным лифтом, а функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ — полным лифтом функции f с многообразия M в его касательное расслоение TM .

Если на многообразии M задано векторное поле $X \in \mathfrak{X}_0^1(M)$, то на касательном расслоении TM существуют векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$, называемые вертикальным и полным лифтами векторного поля X , соответственно, и в локальных координатах имеющие вид

$$X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1, \quad X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1$$

(см. [7]).

Определение 3 (см. [4]). Полным лифтом линейной связности ∇ , заданной на многообразии M , называется единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$ на TM , удовлетворяющая условиям

$$\nabla_{X^{(0)}}^{(0)} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)}, \quad \nabla_{X^{(0)}}^{(0)} Y^{(1)} = \nabla_{X^{(1)}}^{(0)} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)}, \quad \nabla_{X^{(1)}}^{(0)} Y^{(1)} = 0,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M)$.

В локальной системе координат (x_0^i, x_1^i) компоненты полного лифта линейной связности $\nabla^{(0)}$ будут следующие:

$$\Gamma_{ij0}^{00k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}, \quad \Gamma_{ij1}^{00k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(1)}, \quad \Gamma_{ij1}^{10k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}, \quad \Gamma_{ij1}^{01k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)},$$

все остальные коэффициенты связности $\nabla^{(0)}$ равны нулю.

Составляющие тензорных полей кручения $T^{(0)}$ и кривизны $\overset{0}{R}^{(0)}$ связности $\nabla^{(0)}$ относительно естественного подвижного репера $(\partial_i^\alpha)(\alpha = 0, 1)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} T_{ij0}^{00k} &= (T_{ij}^k)_{(0)}, & T_{ij1}^{10k} &= (T_{ij}^k)_{(0)}, & T_{ij1}^{01k} &= (T_{ij}^k)_{(0)}, & T_{ij1}^{00k} &= (T_{ij}^k)_{(1)}, \\ \overset{0}{R}_{ijk0}^{000i} &= (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(0)}, & \overset{0}{R}_{ijk1}^{000i} &= (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(1)}, & \overset{0}{R}_{ijk1}^{100i} &= (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(0)}, \\ \overset{0}{R}_{ijk1}^{010i} &= (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(0)}, & \overset{0}{R}_{ijk1}^{001i} &= (\overset{0}{R}_{ijk}^i)_{(0)}, \end{aligned}$$

остальные компоненты равны нулю.

4. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательных расслоений полного лифта полусимметрической связности. В этом разделе будем исследовать инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения TM , снабженного связностью $\nabla^{(0)}$ полного лифта полусимметрической связности ∇ , заданной на многообразии M .

В координатной форме уравнение $L_{\tilde{X}}\nabla^{(0)} = 0$ равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta X_\sigma^i + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} \partial_j^\alpha X_\tau^m + \Gamma_{j\sigma\tau}^{\alpha\tau i} \partial_k^\beta X_\tau^m - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} \partial_m^\tau X_\sigma^i + X_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \quad (6)$$

Здесь X_α^i — координаты векторного поля $\tilde{X} = X_\alpha^i \partial_i^\alpha$.

Систему (6) можно представить в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, введя новые неизвестные и полагая $A_{k\sigma}^{\alpha i} = \partial_k^\alpha X_\sigma^i$:

$$\partial_j^\alpha A_{k\sigma}^{\beta i} + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} A_{j\tau}^{\alpha m} + \Gamma_{j\sigma\tau}^{\alpha\tau i} A_{k\tau}^{\beta m} - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} A_{m\sigma}^{\tau i} + X_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \quad (7)$$

Первую серию условий интегрируемости системы (7) представляют собой соотношения

$$L_{\tilde{X}}T^{(0)} = 0, \quad L_{\tilde{X}}\overset{0}{R}^{(0)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для оценки сверху размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ мы ограничимся исследованием условия $L_{\tilde{X}}T^{(0)} = 0$. В локальных координатах это равенство равносильно системе

$$T_{mk\sigma}^{\tau\beta i} A_{j\tau}^{\alpha m} + T_{j\sigma\tau}^{\alpha\tau i} A_{k\tau}^{\beta m} - T_{jk\tau}^{\alpha\beta m} A_{m\sigma}^{\tau i} + X_\tau^m \partial_m^\tau T_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \quad (8)$$

Систему (8) мы рассмотрим, учитывая структуру инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X}$.

Так как линейная связность $\overset{0}{\nabla}$ не имеет кручения, то воспользуемся результатами Х. Шадыева (см. [6]), что векторное поле $\tilde{X}$ в пространстве $(TM, \overset{0}{\nabla}^{(0)})$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) существуют векторные поля X, Y , тензорные поля G, F типа $(1, 1)$ на M такие, что

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + G^{V\gamma} + F^{H\gamma}, \quad (9)$$

где

$$G^{V\gamma} = (G_i^j)_{(0)} x_1^i \partial_j^1, \quad F^{H\gamma} = (F_m^r)_{(0)} x_1^m (\partial_r^0 - (\Gamma_{rj}^k)_{(0)} x_1^j \partial_k^1);$$

(2) имеют место равенства

$$\begin{aligned} L_X \overset{0}{\nabla} &= 0, \quad L_Y \overset{0}{\nabla} = 0; \quad \overset{0}{\nabla} G = 0, \quad \overset{0}{\nabla} F = 0; \\ \overset{0}{R}_{mkl}^i F_j^m &= F_m^i \overset{0}{R}_{jkl}^m = 0; \quad \overset{0}{R}_{mkl}^i G_j^m - G_m^i \overset{0}{R}_{jkl}^m = 0. \end{aligned}$$

Представив систему (8) в развернутой форме (индексы α, β, σ могут принимать только два значения: 0 или 1) и подставив в получившиеся уравнения разложение (9), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} L_X T &= 0, \quad L_Y T = 0, \\ T_{jk}^m F_m^i &= T_{mk}^i F_j^m = T_{jm}^i F_k^m = 0, \\ T_{mk}^i G_j^m &= T_{jm}^i G_k^m = T_{jk}^m G_m^i. \end{aligned}$$

Совокупность всевозможных инфинитезимальных аффинных преобразований образует алгебру Ли относительно естественных операций сложения и умножения на скаляр из $\mathbb{R}$ и операции коммутирования. Обозначив через $\tilde{L}$ алгебру Ли векторных полей вида (9), а через L^p ($p = 0, 1, 2, 3$) — множество векторных полей вида $X^{(0)}, Y^{(1)}, G^{V\gamma}, F^{H\gamma}$, можно показать, что подпространства L^p , $p = 0, 1, 2, 3$, являются подалгебрами алгебры Ли $\tilde{L}$ и

$$\dim \tilde{L} = \dim L^0 + \dim L^1 + \dim L^2 + \dim L^3,$$

причем размерности подалгебр L^0 и L^1 равны размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(M, \overset{0}{\nabla})$ (см. [5]). Таким образом, чтобы исследовать размерность алгебры Ли $\tilde{L}$, необходимо и достаточно оценить размерность каждой из подалгебр L^p , $p = 0, 1, 2, 3$.

Оценим размерность подалгебр L^0 и L^1 . И. П. Егоровым доказано, что пространства полусимметрической линейной связности с нулевым или ненулевым тензорным полем кривизны R и ненулевым тензорным полем кручения T имеют максимальную размерность n^2 (см. [1]). Для доказательства точности оценки рассматривается пространство $(\mathbb{R}^n, \nabla)$, где линейная связность ∇ определяется следующими коэффициентами

$$\begin{aligned}\Gamma_{1n}^1 &= \Gamma_{2n}^2 = \dots = \Gamma_{n-1n}^{n-1} = a + b, \\ \Gamma_{n1}^1 &= \Gamma_{n2}^2 = \dots = \Gamma_{nn}^{n-1} = a - b, \\ \Gamma_{nn}^n &= 2a,\end{aligned}$$

другие $\Gamma_{jk}^i = 0$. Инфинитезимальные аффинные преобразования данного пространства будут иметь вид

$$\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n, x^i \partial_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad x^n \partial_1, x^n \partial_2, \dots, x^n \partial_{n-1}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что $\dim L^0 + \dim L^1 = 2n^2$. Базис подалгебры L^0 составляют векторные поля:

$$\begin{aligned}\partial_1^0, \partial_2^0, \dots, \partial_n^0, x_0^i \partial_j^0 + x_1^i \partial_j^1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \\ x_0^n \partial_1^0 + x_1^n \partial_1^1, x_0^n \partial_2^0 + x_1^n \partial_2^1, \dots, x_0^n \partial_{n-1}^0 + x_1^n \partial_{n-1}^1,\end{aligned}$$

а базисом подалгебры L^1 являются векторные поля

$$\partial_1^1, \partial_2^1, \dots, \partial_n^1, x_0^i \partial_j^1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad x_0^n \partial_1^1, x_0^n \partial_2^1, \dots, x_0^n \partial_{n-1}^1.$$

Оценим размерность подалгебры L^2 . Для этого рассмотрим пространство решений уравнения $\overset{0}{\nabla} G = 0$, где $G \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, равносильное в локальных координатах следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_j G_k^i - G_p^i \overset{0}{\Gamma}_{kj}^p + G_k^p \overset{0}{\Gamma}_{pj}^i = 0. \quad (11)$$

Компоненты G_k^i тензорного поля G удовлетворяют условиям

$$G_k^m T_{mj}^i - G_m^i T_{kj}^m = 0.$$

Учитывая строение тензорного поля кручения T пространств полусимметрической связности, приходим к соотношениям

$$G_k^m (\delta_m^i T_j - \delta_j^i T_m) - G_m^i (\delta_k^m T_j - \delta_j^m T_k) = 0$$

или, раскрыв скобки, к соотношениям

$$G_j^i T_k - G_k^m \delta_j^i T_m = 0. \quad (12)$$

Для аффинора G справедливы равенства

$$G_j^m T_{km}^i - G_m^i T_{kj}^m = 0.$$

С учетом равенств (2) получаем следующие соотношения:

$$\delta_k^i G_j^m T_m - G_k^i T_j = 0. \quad (13)$$

Свернув формулы (13) по индексам i и k и обозначив $g = G_m^m$, приходим к равенствам

$$n G_j^m T_m - g T_j = 0,$$

откуда

$$G_j^m T_m = \frac{1}{n} g T_j. \quad (14)$$

Из равенств (14) и (12) следует, что

$$\left(\frac{1}{n}\delta_j^i g - G_j^i\right) T_k = 0. \quad (15)$$

Так как для тензорного поля T найдется компонента $T_k \neq 0$, то будем иметь

$$G_j^i = \frac{1}{n}g\delta_j^i.$$

Подставив найденные компоненты G_j^i в уравнения (11), получим, что $\partial_k g = 0$, следовательно, g — произвольная постоянная. Таким образом, размерность пространства решений уравнения $\overset{0}{\nabla} G = 0$ равна 1, отсюда заключаем, что $\dim L^2 = 1$. Базис алгебры L^2 на TM составляет векторное поле Лиувилля

$$x_1^k \partial_k^1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Оценим размерность подалгебры L^3 . Для аффинора F справедливы равенства

$$F_j^m T_{mk}^i = 0, \quad F_k^m T_{jm}^i = 0, \quad F_m^i T_{jk}^m = 0. \quad (16)$$

Учитывая строение тензорного поля кручения T , соотношения (16) дают

$$F_j^i T_k - F_j^m \delta_k^i T_m = 0, \quad F_k^i T_j - F_k^m \delta_j^i T_m = 0, \quad F_j^i T_k - F_k^i T_j = 0. \quad (17)$$

Равенства $F_j^i T_k - F_j^m \delta_k^i T_m = 0$ свернем по индексам i и k , получим:

$$F_j^m T_m - F_j^m T_m n = 0.$$

Отсюда следует, что $F_j^m T_m = 0$. Подставляя их в первую группу уравнений системы (17), получим, что $F_j^i T_k = 0$.

Поскольку $T \neq 0$, то найдется компонента $T_k \neq 0$, поэтому $F_j^i = 0$. Следовательно, размерность пространства решений уравнения $\nabla F = 0$ равна нулю, т.е. $\dim L^3 = 0$. Тогда

$$\dim \tilde{L} = \dim L^0 + \dim L^1 + \dim L^2 = 2n^2 + 1.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений со связностью полного лифта над пространствами полусимметрической линейной связности с нулевым и ненулевым тензорным полем кривизны равна $2n^2 + 1$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров И. П. Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965.
2. Егоров И. П. Геометрия. — М.: Просвещение, 1979.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
4. Султанов А. Я. Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 9. — С. 64–72.
5. Султанова Г. А. О некоторых подалгебрах алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта // Сб. науч. статей Междунар. конф. «Ломоносовские чтения на Алтае: Фундаментальные проблемы науки и образования». — Барнаул: Изд-во Алтайск. ун-та, 2014. — С. 378–381.
6. Шадыев Х. Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Тр. геом. семин. — 1984. — 16. — С. 117–127.
7. Yano K. Tangent and Cotangent Bundles. — New York: Marcel Dekker, 1973.

Султанова Галия Алиевна

Филиал Военной Академии материально-технического обеспечения, Пенза

E-mail: sultgaliya@yandex.ru