Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Цыренова, Поверхности в квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 180, 109–112

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-180-109-112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:59:25

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 180 (2020). С. 109–112
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-180-109-112

УДК 514.753

ПОВЕРХНОСТИ В КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ${}^{11}S_3^1$

© 2020 г. В. Б. ЦЫРЕНОВА

Аннотация. Квазигиперболические пространства являются проективными пространствами с распадающимся абсолютном. В работе рассмотрены поверхности в одном из таких пространств методами внешних форм и подвижного репера. Найдены геометрические характеристики для инвариантов линии на поверхности. Получены аналоги поверхностей Фосса.

Ключевые слова: квазигиперболическое пространство, абсолют, поверхность, канонический репер, инвариант, линия на поверхности, геодезическая линия.

SURFACES IN THE QUASI-HYPERBOLIC SPACE ${}^{11}S_3^1$

© 2020 V. B. TSYRENOVA

ABSTRACT. Quasi-hyperbolic spaces are projective spaces with decomposable absolute. In this paper, we analyze surfaces in such spaces using the method of external forms and the method of movable frames. Geometric characteristics of invariants of lines on such surfaces are found. Analogs of Foss surfaces are obtained.

Keywords and phrases: quasi-hyperbolic space, absolute, surface, canonical frame, invariant, line on the surface, geodesic line.

AMS Subject Classification: 53A35

1. Введение. Квазигиперболические пространства изучались многими учениками Б. А. Розенфельда и Р. Н. Щербакова (см. [1, 3]). Автором была наиболее полно изучена дифференциальная геометрия квазиэллиптического пространства. Построена теория поверхностей, регулюсов, конгруэнций и комплексов методом внешних форм. Далее, во всех перечисленных пространствах нами изучены линейчатые поверхности и конгруэнции, построены и геометрически характеризованы их канонические реперы, получены геометрические характеристики инвариантов и простейшие классы. В данной работе продолжим рассмотрение поверхности в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$, линий на поверхности.

2. Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$. Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$ — проективное 3-пространство, в котором метрика определяется абсолютном, заданным совокупностью пары действительных плоскостей и пары действительных точек на прямой их пересечения.

Будем пользоваться такой системой координат, в которой абсолютные плоскости q_1 , q_2 , абсолютная прямая T_0 и абсолютные точки на ней Q_1 , Q_2 имеют соответственно уравнения

$$(X, X)_1 = (x^0)^2 + 2x^0x^1 = 0, \quad x^0 = x^1 = 0, \quad (X, X)_2 = (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0.$$

Абсолютные плоскости пространства ${}^{11}S_3^1$ разбивают многообразие точек проективного пространства, не принадлежащих абсолютном, на две связные области. Мы рассматриваем ту область, для

точек которой $(X, X)_1 > 0$, а их координаты и координаты точек абсолютной прямой будем нормировать соответственно условиям $(X, X)_1 = 1$ и $(X, X)_2 = 1$.

Расстояния δ_0 , d и δ_1 между точками X и Y с нормированными координатами гиперболической, абсолютной и евклидовой прямых находятся по формулам

$$\operatorname{ch} \delta_0 = (X, Y)_1, \quad \operatorname{ch} \delta_1 = (X, Y)_2, \quad d^2 = (X, Y)_2.$$

Деривационные формулы наиболее общего репера пространства имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0(A_0 - A_1) + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, & dA_2 &= \omega_2^3 A_3, \\ dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3, & dA_3 &= \omega_2^3 A_2. \end{aligned}$$

3. Поверхности в пространстве $^{11}S_3^1$. В [5] автором был построен полуканонический и два канонических репера поверхности. При этом поверхность задавалась параметрическим уравнением $A = A(u^1, u^2)$. Точка поверхности и касательная плоскость (а следовательно, и нормаль) были включены в репер в качестве точки A_0 и плоскости $(A_0 A_1 A_2)$. Деривационные формулы полуканонического репера поверхности были получены в следующем виде:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 - \omega_0^0 A_1 + \omega_0^2 A_2, \\ dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + (\mu \omega_0^0 + \nu \omega_0^2) A_2 + (\alpha \omega_0^0 + \beta \omega_0^2) A_3, \\ dA_2 &= (-\beta \omega_0^0 + \gamma \omega_0^2) A_3, \\ dA_3 &= (-\beta \omega_0^0 + \gamma \omega_0^2) A_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Для базисных форм ω_0^0 и ω_0^2 имеем

$$D\omega_0^0 = 0, \quad D\omega_0^2 = (1 - \nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2,$$

а основная система дифференциальных уравнений [5] имеет вид

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge \omega_0^0 + d\beta \wedge \omega_0^2 &= \gamma\mu + \beta(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \\ d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 &= \gamma(1 - \nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \\ d\mu \wedge \omega_0^0 + d\nu \wedge \omega_0^2 &= (\nu^2 - 2\nu + \alpha\gamma + \beta^2)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение этой системы существует с произволом в две функции двух аргументов, что соответствует произволу существования поверхности, отнесенной к произвольному семейству линий (см. [5]).

Полную систему инвариантов поверхности образуют инварианты γ , $I = \beta^2 + 2\alpha\gamma$ и значения μ и ν при какой-либо канонизации репера. При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ и $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ получаются канонические реперы R_1 и R_2 .

Полную систему инвариантов линии $\omega_0^2 = 0$ на поверхности составляют значения коэффициентов α , β , μ , вычисленных вдоль этой линии. Линии $\omega_0^0 = 0$ высекаются на поверхности евклидовыми плоскостями и называются евклидовыми сечениями (см. [6]). В [3] они названы изотропными линиями кривизны.

На поверхности определены две первые квадратичные формы

$$\varphi_1 = (dA_0, dA_0)_1 = -(\omega_0^0)^2, \quad \varphi_1' = (dA_0, dA_0)_2 = -(\omega_0^2)^2.$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$\varphi_2 = (d^2 A_0, A_0, A_1, A_2) = -\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2.$$

Геометрическое значение второй квадратичной формы получается из соотношения

$$\varphi_2 = \pm 2\delta,$$

где δ — расстояние между точками A_0 и

$$B = \operatorname{pr}_{A_0 A_1 A_2}^{A_3} \left(A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2 A_0 + \dots \right).$$

Уравнения торсов конгруэнции $\{A_0 A_3\}$ нормалей поверхности имеют вид

$$\omega_0^0 = 0, \quad \beta\omega_0^0 - \gamma\omega_0^2 = 0,$$

фокусами образующих являются точки

$$F_1 = A_0 + \frac{1}{\gamma}A_3, \quad F_2 = A_3;$$

это означает, что одна из эволют вырождается в абсолютную прямую.

Инвариант $a = \varphi_2/\varphi_1$ называют нормальной кривизной линии $\omega_0^0 : \omega_0^2$ на поверхности (см. [5]). Для линии $\omega_0^0 = 0$ имеем $\varphi_1 = 0$, а нормальная кривизна равна

$$a = \frac{\varphi_2}{\varphi_1'} = \gamma.$$

Поверхности $\nu = 0$ характеризуются тем, что евклидово сечение $\omega_0^0 = 0$ является горловой линией регулюса $\{A_0A_1\}$ касательных к асимптотической линии $\omega_0^2 = 0$ и существуют с произволом трех функций одного аргумента.

4. Линии на поверхности. Полагая $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^0 = ds$, $\mu = m$, $\alpha = a$, $\beta = b$, получим деривационные формулы канонического репера линии на поверхности в виде

$$\frac{dA_0}{ds} = A_0 - A_1, \quad \frac{dA_1}{ds} = -A_1 + mA_2 + aA_3, \quad \frac{dA_2}{ds} = -bA_3, \quad \frac{dA_3}{ds} = -bA_2.$$

Формулы Френе пространственной кривой имеют вид

$$\frac{dA_0}{ds} = A_0 - A_1, \quad \frac{dA_1}{ds} = -A_1 + kA_2, \quad \frac{dA_2}{ds} = kA_3, \quad \frac{dA_3}{ds} = kA_2.$$

Сравнивая эти формулы, видим, что s — длина дуги линии на поверхности, а для кривизн k^* , κ^* линии на поверхности получаем

$$(k^*)^2 = a^2 + m^2, \quad \kappa^* = -b.$$

Из деривационных формул канонического репера линии на поверхности получаются вычислительные формулы для инвариантов линии на поверхности

$$\begin{aligned} a &= (-\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2) : (\omega_0^0)^2, \\ b &= (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2) : \omega_0^0, \\ m &= (\mu\omega_0^0 + (1 - \nu)\omega_0^2) : \omega_0^0 - (\omega_0^0d\omega_0^2 - \omega_0^2d\omega_0^0) : (\omega_0^0)^3. \end{aligned}$$

Видим отсюда, что только инвариант m является инвариантом второго порядка.

Можно выделить следующие три основных класса линий на поверхности:

- (1) $a = 0$ — асимптотические линии, для них репер совпадает с каноническим репером, а также может служить каноническим репером пространственной кривой, рассматриваемой независимо от поверхности;
- (2) $b = 0$ — конические линии, конусы имеют вершины на абсолютной прямой; нормаль также описывает такой конус;
- (3) $m = 0$ — квазигиперболические геодезические линии с гиперболическими касательными.

5. Аналоги поверхностей Фосса. Поверхности $\mu = 0$ (в каноническом репере R_2) характеризуются тем, что только на этих поверхностях существуют конические линии с вершинами конусов на абсолютной прямой, т.е. линии $b = 0$, являющиеся одновременно линиями $m = 0$. Так как линии $\omega_0^0 = 0$ являются геодезическими с евклидовыми касательными, то поверхности $\mu = 0$ можно назвать поверхностями Фосса (см. [6]). Такие поверхности существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Найдем более общий аналог поверхностей Фосса, несущих сопряженные сети квазигиперболических геодезических линий, оба семейства которых имеют гиперболические касательные.

Будем решать задачу в полуканоническом репере. Координатному семейству $\omega_0^2 = 0$ будет сопряжено семейство

$$\alpha\omega_0^0 + \beta\omega_0^2 = 0,$$

причем $\alpha \neq 0$. Если координатные линии $\omega_0^2 = 0$ — геодезические, то $\mu = 0$. Соприкасающаяся плоскость линии

$$\alpha\omega_0^0 + \beta\omega_0^2 = 0$$

будет проходить через нормаль (A_0A_3) только при условии

$$\alpha\beta^2\nu - \alpha\beta^2 - \beta^2\alpha_1 - \alpha\beta\alpha_2 + \alpha\beta\beta_1 - \alpha^2\beta_2 = 0, \quad (3)$$

где

$$d\alpha = \alpha_1\omega_0^0 + \alpha_2\omega_0^2, \quad d\beta = \beta_1\omega_0^0 + \beta_2\omega_0^2.$$

Присоединяя условие (3) к основной системе внешних дифференциальных уравнений (2), получим стандартную систему, имеющую старший характер $s_1 = 4$. Следовательно, поверхности Фосса, несущие сопряженные сети квазигиперболических геодезических линий, оба семейства которых имеют гиперболические касательные, в квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$ существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурьева В. П., Абдурахманова Х. К. К теории поверхностей в трехмерных квазиэллиптическом и квазигиперболических пространствах // Геом. сб. — 1976. — № 17. — С. 132–139.
2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
3. Слободской В. И. Теория поверхностей в трехмерном квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$ // Геом. сб. — 1980. — № 21. — С. 55–67.
4. Цыренова В. Б. К теории поверхностей в квазиэллиптическом пространстве // Геом. сб. — 1978. — № 19. — С. 96–108.
5. Цыренова В. Б. Поверхности в квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$ // Мат. 5 науч. конф., посв. 100-летию проф. Р. Н. Щербакова «Геометрия многообразий и ее приложения». — Улан-Удэ, 2018. — С. 56–60.
6. Цыренова В. Б., Щербаков Р. Н. Основы теории поверхностей трехмерного квазиэллиптического пространства // Геом. сб. — 1975. — № 15. — С. 183–204.
7. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1960.

Цыренова Валентина Бабасановна

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ

E-mail: v.ts@mail.ru