Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Бодренко, Об условиях параллельности тензора нормальной кривизны подмногообразий, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 3–8

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-3-8>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:43:17

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 3–8
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-3-8

УДК 514.76

ОБ УСЛОВИЯХ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ТЕНЗОРА НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

© 2020 г. И. И. БОДРЕНКО

Аннотация. В работе получены достаточные условия параллельности тензора нормальной кривизны подмногообразий в пространствах постоянной кривизны.

Ключевые слова: подмногообразие, пространство постоянной кривизны, вторая фундаментальная форма, тензор нормальной кривизны, вектор нормальной кривизны, вектор нормального кручения.

CONDITIONS FOR THE PARALLELISM OF THE NORMAL CURVATURE TENSOR OF SUBMANIFOLDS

© 2020 I. I. BODRENKO

ABSTRACT. In this paper, sufficient conditions for the parallelism of the normal curvature tensor of submanifolds in spaces of constant curvature are obtained.

Keywords and phrases: submanifold, space of constant curvature, second fundamental form, normal curvature tensor, normal curvature vector, normal torsion vector.

AMS Subject Classification: 53B25, 53C40

1. Введение. Пусть M^{n+p} — $(n + p)$ -мерное ($n \geq 2$, $p \geq 2$) гладкое риманово многообразие, $\tilde{g}$ — риманова метрика на M^{n+p} , $\tilde{\nabla}$ — риманова связность, согласованная с $\tilde{g}$, $\tilde{R}$ — преобразование кривизны связности $\tilde{\nabla}$. Пусть F^n — n -мерное гладкое подмногообразие в M^{n+p} . Обозначим через g индуцированную риманову метрику на F^n , через ∇ — риманову связность на F^n , согласованную с g , через R — преобразование кривизны связности ∇ . Вторая фундаментальная форма b подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}$ определяется по формуле Гаусса

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + b(X, Y) \quad (1)$$

для любых векторных полей X, Y , касательных к F^n .

Пусть D — нормальная связность, $R^\perp$ — тензор нормальной кривизны подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}$. Нормальная связность D называется плоской, если $R^\perp \equiv 0$ на F^n .

Для любого векторного поля ξ , нормального к F^n , и любого векторного поля X , касательного к F^n , формула Вейнгартена имеет вид

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi, \quad (2)$$

где A_ξ — второй фундаментальный тензор, соответствующий ξ .

Оператор Вейнгартена A_ξ удовлетворяет равенству

$$\tilde{g}(b(X, Y), \xi) = g(A_\xi X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y , касательных к F^n , и векторного поля ξ , нормального к F^n .

Обозначим через $\bar{\nabla} = \nabla \oplus D$ связность ван дер Вардена—Бортолотти. Ковариантные производные $\bar{\nabla}b$, $(\bar{\nabla}A)_\xi$, $\bar{\nabla}R^\perp$ определяются соответственно равенствами

$$(\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) = D_X(b(Y, Z)) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z),$$

$$(\bar{\nabla}_X A)_\xi Y = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{D_X \xi} Y,$$

$$(\bar{\nabla}_X R^\perp)(Y, Z)\xi = D_X(R^\perp(Y, Z)\xi) - R^\perp(\nabla_X Y, Z)\xi - R^\perp(Y, \nabla_X Z)\xi - R^\perp(Y, Z)D_X \xi,$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n , и векторного поля ξ , нормального к F^n .

Уравнения Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи имеют соответственно вид

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + \tilde{g}(b(X, Z), b(Y, W)) - \tilde{g}(b(X, W), b(Y, Z)),$$

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y b)(X, Z),$$

$$\tilde{R}(X, Y, \xi, \eta) = R^\perp(X, Y, \xi, \eta) - g([A_\xi, A_\eta]X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z, W , касательных к F^n , и векторных полей ξ, η , нормальных к F^n .

Риманово многообразие M^{n+p} называется пространством постоянной кривизны $\tilde{c}$ ($\tilde{c} = \text{const}$) и обозначается $M^{n+p}(\tilde{c})$, если преобразование кривизны $\tilde{R}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \tilde{c}(\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z})\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Z})\tilde{Y}) \quad (3)$$

для любых векторных полей $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$, касательных к M^{n+p} .

В силу (3) для подмногообразия F^n в пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$ уравнения Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи имеют соответственно вид

$$R(X, Y, Z, W) = \tilde{c}(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) + \tilde{g}(b(X, W), b(Y, Z)) - \tilde{g}(b(X, Z), b(Y, W)), \quad (4)$$

$$(\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y b)(X, Z), \quad (5)$$

$$R^\perp(X, Y, \xi, \eta) = g([A_\xi, A_\eta]X, Y), \quad (6)$$

для любых векторных полей X, Y, Z, W , касательных к F^n , и векторных полей ξ, η , нормальных к F^n .

Определение 1. Тензор нормальной кривизны $R^\perp \neq 0$ называется параллельным, если для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n , и векторного поля ξ , нормального к F^n , выполняется равенство

$$(\bar{\nabla}_Z R^\perp)(X, Y)\xi = 0.$$

Замечание 1. Основным инвариантом нормальной связности D двумерной поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^4 является гауссово кручение $\varkappa$. В [11] установлено, что поверхность $F^2 \subset E^4$ имеет постоянное гауссово кручение $\varkappa \equiv \text{const} \neq 0$ тогда и только тогда, когда тензор нормальной кривизны $R^\perp \neq 0$ параллелен.

В геометрии погруженных многообразий значительное место занимают исследования подмногообразий со специальными свойствами второй фундаментальной формы. Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется параллельной, если $\bar{\nabla}b = 0$.

Определение 2. Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется рекуррентной, если на F^n существует такая 1-форма μ , что $\bar{\nabla}b = \mu \otimes b$.

Свойства кэлеровых подмногообразий с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной голоморфной секционной кривизны исследовались в [1].

Определение 3. Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется циклически рекуррентной, если на F^n существует такая 1-форма μ , что

$$(\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) = \mu(X)b(Y, Z) + \mu(Y)b(Z, X) + \mu(Z)b(X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n .

Подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой $b \neq 0$ (или короче циклически рекуррентные подмногообразия) являются естественными обобщениями поверхностей Дарбу в трехмерном евклидовом пространстве E^3 (см. [8]). Класс циклически рекуррентных подмногообразий содержит подклассы параллельных подмногообразий и непараллельных рекуррентных подмногообразий, но не исчерпывается ими. Некоторые свойства гиперповерхностей F^n с циклически рекуррентной непараллельной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах E^{n+1} установлены в [2, 6, 7]. Подмногообразия F^n с непараллельной рекуррентной второй фундаментальной формой $b \neq 0$ и плоской нормальной связностью в пространствах постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$ описаны в [9]. Циклически рекуррентные подмногообразия F^n с плоской нормальной связностью в евклидовых пространствах E^{n+p} классифицированы в [5, 10].

Пусть $x \in F^n$ — произвольная точка, $T_x F^n$ и $N_x F^n$ — соответственно касательное и нормальное пространства к F^n в x :

$$T_x M^{n+p}(\tilde{c}) = T_x F^n \oplus N_x F^n.$$

Пусть γ — кривая на F^n , проходящая через точку x в направлении вектора $t \in T_x F^n$, $T_{(\gamma)}$ — единичное векторное поле, касательное к γ . Введем обозначение $T_{(\gamma)}(x) = \tau$, где $\tau = t/|t|$. Обозначим через $\tilde{X}_{(\gamma)}$ поле вектора первой кривизны кривой γ в $M^{n+p}(\tilde{c})$:

$$\tilde{\nabla}_{T_{(\gamma)}} T_{(\gamma)} = \tilde{X}_{(\gamma)}.$$

Пусть $k_T \in T_x F^n$ и $k_N \in N_x F^n$ — соответственно касательная и нормальная составляющие вектора $\tilde{X}_{(\gamma)}(x) \in T_x M^{n+p}(\tilde{c})$. Тогда в силу формулы Гаусса (1) имеем

$$k_T = \nabla_{T_{(\gamma)}} T_{(\gamma)}(x), \quad k_N = b(\tau, \tau).$$

Вектор $k_N \in N_x F^n$, нормальный к F^n в точке x , зависит от точки x и направления t и не зависит от выбора кривой γ . Будем использовать обозначение $k_N \equiv k_N(x, t)$.

Определение 4. Вектор $k_N(x, t) \in N_x F^n$ называется вектором нормальной кривизны подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

Обозначим через $\gamma(x, t)$ геодезическую на F^n , проходящую через точку $x \in F^n$ в направлении $t \in T_x F^n$. Пусть в каждой точке $y \in \gamma(x, t)$ в $M^{n+p}(\tilde{c})$ однозначно определен единичный вектор первой нормали $\eta = \eta(y)$. Обозначим через $|k_g(x, t)|$ первую кривизну геодезической $\gamma(x, t)$ в $M^{n+p}(\tilde{c})$, вычисленную в точке x . Тогда

$$\tilde{\nabla}_{T_{(\gamma)}} T_{(\gamma)} = |k_g(y, T_{(\gamma)}(y))| \eta(y) \quad \forall y \in \gamma(x, t),$$

где $T_{(\gamma)} = T_{(\gamma)}(y)$ — единичный касательный вектор к геодезической $\gamma(x, t)$ в точке y , $T_{(\gamma)}(x) = t/|t|$, $|k_g(y, T_{(\gamma)}(y))|$ — первая кривизна геодезической $\gamma(x, t)$ в точке y . Учитывая, что $\nabla_{T_{(\gamma)}} T_{(\gamma)} = 0$ вдоль геодезической $\gamma(x, t)$, имеем

$$|k_g(y, T_{(\gamma)}(y))| \eta(y) = b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)}) \quad \forall y \in \gamma(x, t).$$

Так как $\eta(y) \in N_y F^n$, то, используя формулу Вейнгартена (2), вдоль $\gamma(x, t)$ получим

$$\tilde{\nabla}_{T_{(\gamma)}} \eta = -A_\eta T_{(\gamma)} + D_{T_{(\gamma)}} \eta.$$

Обозначим через $\varkappa_N \in N_x F^n$ нормальную составляющую вектора $\tilde{\nabla}_{T_{(\gamma)}} \eta$ в точке x , т.е. $\varkappa_N = D_{T_{(\gamma)}} \eta(x)$. Вектор $\varkappa_N \in N_x F^n$, нормальный к F^n в точке x , зависит от точки $x \in F^n$ и направления $t \in T_x F^n$. Будем использовать обозначение $\varkappa_N \equiv \varkappa_N(x, t)$.

Определение 5. Вектор $\varkappa_N(x, t) \in N_x F^n$ называется вектором нормального кручения подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

Определение 6. Инварианты $|k_N(x, t)|$ и $|\varkappa_N(x, t)|$ называются соответственно нормальной кривизной и нормальным кручением подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

Свойства двумерных поверхностей F^2 с нулевым нормальным кручением в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 изучались в [13]. Исследования свойств подмногообразий F^n с нулевым нормальным кручением в евклидовых пространствах E^{n+p} для произвольных n и p продолжены в [4].

Замечание 2. Для двумерных поверхностей в четырехмерном римановом пространстве понятие нормального кручения поверхности F^2 в точке x по неасимптотическому направлению t ввел В. Т. Фоменко в [12]. Понятие вектора нормального кручения подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по неасимптотическому направлению $t \in T_x F^n$ в случае $n \geq 2$, $p \geq 2$ введено в [3].

Имеет место следующая формула (см. [3]):

$$\kappa_N(x, t) = \frac{(\bar{\nabla}_\tau b)(\tau, \tau)}{|b(\tau, \tau)|} - \frac{b(\tau, \tau)\tilde{g}(b(\tau, \tau), (\bar{\nabla}_\tau b)(\tau, \tau))}{|b(\tau, \tau)|^3}, \quad (7)$$

где $\tau = t/|t|$; формула (7) имеет смысл, если t — неасимптотическое направление.

На $F^n \subset M^{n+p}(c)$ определены специальные классы нормальных векторных полей в терминах второй фундаментальной формы b .

Определение 7. Нормальное векторное поле $b(T, T)$, определенное для любого единичного векторного поля T , касательного к F^n , называется полем вектора нормальной кривизны подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в направлении T .

Пусть f — функция на F^n , $f(x) \neq 0$ для всех $x \in F^n$. Рассмотрим вдоль кривой γ нормальное векторное поле

$$f|_\gamma b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)}),$$

где $f|_\gamma(u) = f(u)$ для всех $u \in \gamma$.

Определение 8. Поле вектора нормальной кривизны $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ вдоль кривой γ называется рекуррентным, если существует такая функция f на F^n ($f(x) \neq 0$ для всех $x \in F^n$), что

$$D_{T_{(\gamma)}}(f|_\gamma b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)})) = 0.$$

Замечание 3. Для подмногообразий F^n в евклидовом пространстве E^{n+p} понятие рекуррентного вектора нормальной кривизны ввел В. Т. Фоменко в [14]. Понятие рекуррентного поля вектора нормальной кривизны подмногообразия F^n вдоль кривой γ в пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$ введено в [3].

2. Формулировка результатов. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть нормальная связность поверхности F^2 в пространстве $M^4(\tilde{c})$ постоянной кривизны не является плоской ($R^\perp \neq 0$) и поверхность F^2 не имеет асимптотических направлений. Если поверхность $F^2 \subset M^4(\tilde{c})$ имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму b , то тензор нормальной кривизны $R^\perp$ поверхности F^2 параллелен.

Теорема 2. Пусть нормальная связность поверхности F^2 в пространстве $M^4(\tilde{c})$ постоянной кривизны не является плоской ($R^\perp \neq 0$) и поверхность F^2 не имеет асимптотических направлений. Если поверхность $F^2 \subset M^4(\tilde{c})$ имеет рекуррентное поле вектора нормальной кривизны вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$, то тензор нормальной кривизны $R^\perp$ поверхности F^2 параллелен.

Теорема 3. Пусть нормальная связность подмногообразия F^n , $n \geq 2$, в пространстве $M^{n+p}(\tilde{c})$ постоянной кривизны не является плоской ($R^\perp \neq 0$) и подмногообразие F^n не имеет асимптотических направлений. Если $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ имеет рекуррентную вторую фундаментальную форму b , то тензор нормальной кривизны $R^\perp$ подмногообразия F^n параллелен.

3. Основные леммы.

Лемма 1. Пусть F^n — подмногообразие в пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$. Тогда для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n , и векторного поля ξ , нормального к F^n , справедливо равенство

$$(\bar{\nabla}_Z R^\perp)(X, Y)\xi = (\bar{\nabla}_Z b)(X, A_\xi Y) + b(X, (\bar{\nabla}_Z A)_\xi Y) - (\bar{\nabla}_Z b)(Y, A_\xi X) - b(Y, (\bar{\nabla}_Z A)_\xi X).$$

Используя лемму 1, получим следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть F^n — подмногообразие в пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$. Тогда для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n , и векторных полей ξ, η , нормальных к F^n , справедливо равенство

$$(\bar{\nabla}_Z R^\perp)(X, Y, \xi, \eta) = g([\bar{\nabla}_Z A]_\xi, A_\eta X, Y) + g([A_\xi, (\bar{\nabla}_Z A)_\eta]X, Y)$$

Лемма 3. Пусть нормальная связность поверхности F^2 в пространстве $M^4(\tilde{c})$ постоянной кривизны не является плоской ($R^\perp \neq 0$) и поверхность F^2 не имеет асимптотических направлений. Если на F^2 выполняется соотношение

$$|\varkappa_N(x, t)| \equiv 0 \quad \forall x \in F^2, \quad \forall t \in T_x F^2, \quad (8)$$

то на F^2 справедливо равенство

$$(\bar{\nabla}_X A)_\xi = 0 \quad (9)$$

для любого векторного поля X , касательного к F^2 , и векторного поля ξ , нормального к F^2 .

Доказательство. В силу [12, теорема 2] соотношение (8) выполняется на F^2 тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (i) F^2 лежит в пространстве $M^4(\tilde{c})$ постоянной положительной кривизны $\tilde{c} = 3\lambda_0^2$, $\lambda_0 = \text{const}$,
- (ii) F^2 имеет постоянную положительную внутреннюю кривизну $K_i = \lambda_0^2$,
- (iii) индикатриса нормальной кривизны поверхности F^2 в каждой точке $x \in F^2$ является окружностью радиуса $\lambda_0 > 0$ с центром в точке x .

Отсюда, учитывая уравнение Гаусса (4), на F^2 имеем

$$(\bar{\nabla}_Z b)(X, Y) = 0 \quad (10)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^2 . Учитывая, что (10) равносильно равенству (9), приходим к утверждению леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1. Если поверхность F^2 без асимптотических направлений в пространстве постоянной кривизны $M^4(\tilde{c})$ имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму b , то в соответствии с [3, теорема 1] поверхность F^2 имеет нулевой вектор нормального кручения $\varkappa_N(x, t) \equiv 0$ в каждой точке $x \in F^2$ по любому направлению $t \in T_x F^2$. Тогда на F^2 выполняется условие (8). Следовательно, в силу леммы 3 на F^2 справедливо равенство (9). Применение леммы 2 завершает доказательство теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 2. Если поверхность F^2 без асимптотических направлений в $M^4(\tilde{c})$ имеет рекуррентное поле вектора нормальной кривизны вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$, то в силу [3, теорема 2] поверхность F^2 имеет нулевой вектор нормального кручения $\varkappa_N(x, t) \equiv 0$ в каждой точке $x \in F^2$ по любому направлению $t \in T_x F^2$. Тогда на F^2 выполняется условие (8). Отсюда, в силу леммы 3, из леммы 2 получим утверждение теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ имеет рекуррентную вторую фундаментальную форму b , т.е. на F^n существует такая 1-форма μ , что выполняется соотношение

$$(\bar{\nabla}_Z b)(X, Y) = \mu(Z)b(X, Y) \quad (11)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n . Условие (11) эквивалентно условию

$$(\bar{\nabla}_X A)_\xi = \mu(X)A_\xi \quad (12)$$

для любого векторного поля X , касательного к F^n , и векторного поля ξ , нормального к F^n .

В силу уравнений Риччи (6) из условия $R^\perp \neq 0$ следует, что в каждой точке $x \in F^n$ найдутся такие векторы $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T_x F^n$, что векторы $b(t_1, t_2), b(t_3, t_4) \in N_x F^n$ линейно независимы. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\mu(t_1)\mu(t_2)b(t_3, t_4) - \mu(t_3)\mu(t_4)b(t_1, t_2) \in N_x F^n$. Учитывая уравнения Петерсона—Кодацци (5) и соотношение (11), получим:

$$\mu(t_1)\mu(t_2)b(t_3, t_4) - \mu(t_3)\mu(t_4)b(t_1, t_2) = \mu(t_1)\mu(t_3)b(t_2, t_4) - \mu(t_3)\mu(t_4)b(t_1, t_2) = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости векторов $b(t_1, t_2), b(t_3, t_4) \in N_x F^n$ имеем

$$\mu(t_1)\mu(t_2) = \mu(t_3)\mu(t_4) = 0.$$

Тогда для любого вектора $t \in T_x F^n$ выполняются равенства

$$\mu(t)b(t_1, t_2) = \mu(t_1)b(t, t_2) = \mu(t_2)b(t_1, t) = 0.$$

Следовательно, $\mu(t) = 0$ для всех $t \in T_x F^n$, и из (12) получим равенство

$$(\bar{\nabla}_X A)_\xi = 0$$

для любого векторного поля X , касательного к F^n , и векторного поля ξ , нормального к F^n . Применение леммы 2 завершает доказательство теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко И. И. Некоторые свойства кэлеровых подмногообразий с рекуррентными тензорными полями // Вестн. Волгоград. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2006. — 10, № 1. — С. 11–21.
2. Бодренко И. И. О гиперповерхностях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве // Вестн. Волгоград. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2010. — 13. — С. 23–35.
3. Бодренко И. И. О подмногообразиях с нулевым вектором нормального кручения в пространствах постоянной кривизны // в кн.: Ломоносовские чтения на Алтае. — Барнаул, 2015. — С. 461–465.
4. Бодренко И. И. О подмногообразиях с нулевым нормальным кручением в евклидовом пространстве // Сиб. мат. ж. — 1994. — 35, № 3. — С. 527–536.
5. Бодренко И. И. О подмногообразиях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах // Обзор. прикл. пром. мат. — 2011. — 18, № 5. — С. 746.
6. Бодренко И. И. Об аналоге поверхностей Дарбу в многомерных евклидовых пространствах // Вестн. Волгоград. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2013. — № 1 (18). — С. 24–30.
7. Бодренко И. И. Обобщение теоремы Бонне о поверхностях Дарбу // Мат. заметки. — 2014. — 95, № 6. — С. 812–820.
8. Бодренко И. И. Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны. — Saarbrücken: LAP LAMBERT, 2013.
9. Бодренко И. И. Подмногообразия с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны // Обзор. прикл. пром. мат. — 2007. — 14, № 4. — С. 679–682.
10. Бодренко И. И. Строение подмногообразий с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве // Вестн. Волгоград. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2011. — № 1 (14). — С. 10–17.
11. Бодренко И. И. Характеристический признак поверхностей с постоянным гауссовым кручением в E^4 // Вестн. Волгоград. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2013. — № 2 (19). — С. 13–17.
12. Фоменко В. Т. Классификация двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в четырехмерном пространстве постоянной кривизны // Мат. заметки. — 2004. — 75, № 5. — С. 744–756.
13. Фоменко В. Т. Некоторые свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 // Мат. сб. — 1978. — 106 (148), № 4 (8). — С. 589–603.
14. Фоменко В. Т. Об одном обобщении поверхностей Дарбу // Мат. заметки. — 1990. — 48, № 2. — С. 107–113.

Бодренко Ирина Ивановна

ООО «Интерактивные системы», Волгоград

E-mail: irina@bodrenko.org