Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. П. Бурлаков, В. М. Бурлаков, Бесконечные произведения биномов и разбиения чисел, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 9–15

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-9-15>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:20:08

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 9–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-9-15

УДК 519.1

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ И РАЗБИЕНИЯ ЧИСЕЛ

© 2020 г. М. П. БУРЛАКОВ, В. М. БУРЛАКОВ

Аннотация. В статье рассматриваются разложения функций в бесконечные произведения степенных биномов. Приведены также формула для представления экспоненты такими произведениями и вывод формул для вычисления количества разбиений натуральных чисел на слагаемые.

Ключевые слова: бесконечное произведение, бесконечная система линейных уравнений, разбиение числа.

INFINITE PRODUCTS OF BINOMIALS AND PARTITIONS OF NUMBERS

© 2020 M. P. BURLAKOV, V. M. BURLAKOV

ABSTRACT. In this paper, we consider expansions of functions into infinite products of power binomials. We also propose a formula for representing the exponential function by such products and formulas for calculating the number of partitions of natural numbers.

Keywords and phrases: infinite product, infinite system of linear equations, partition of a number.

AMS Subject Classification: 05E06, 11A06

Леонард Эйлер в своей знаменитой работе «Введение в анализ бесконечных» показал, что произведения степенных биномов связаны с количеством различных разбиений натуральных чисел на слагаемые (см. [5]). В частности, в тождествах

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)x^n \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n, \quad (1)$$

функция натурального аргумента $L(n)$ дает количество неупорядоченных представлений числа $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы равных или неравных натуральных слагаемых, а значения функции натурального аргумента $l(n)$ — это количества неупорядоченных представлений числа $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы неравных натуральных слагаемых (см. [4]). Эти примеры показывают пользу изучения бесконечных произведений степенных биномов для решения задач в разных областях математики.

Обобщая произведения, приведенные в тождествах (1), поставим задачу представления функций бесконечными произведениями степенных биномов следующего вида:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{a_n} \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)^{b_n},$$

которые будем называть *мультипликативными агрегатами* (или просто *агрегатами*) соответственно *первого* и *второго рода* (см. [1, 2]), а показатели степени a_n и b_n — их коэффициентами.

1. Рассмотрим произвольную гладкую функцию $f(x)$, для которой $f(0) = 1$, и попробуем найти коэффициенты a_n ее представления агрегатом первого рода. Пусть

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{a_n}. \quad (2)$$

Прологарифмировав и продифференцировав тождество (2), получим следующее соотношение:

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n x^{n-1}}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{nk} \right). \quad (3)$$

Если теперь представить отношение $-f'(x)/f(x)$ рядом Маклорена, положив

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (4)$$

то из (3) получим бесконечную систему линейных уравнений для определения коэффициентов a_n . Используя суммирование по делителям числа n , можно записать эту систему в следующем виде:

$$\sum_{m \setminus n} ma_m = q_{n-1}. \quad (5)$$

Начало этой системы в явном виде выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 = q_0, & a_1 + 7a_7 = q_6, \\ a_1 + 2a_2 = q_1, & a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 = q_7, \\ a_1 + 3a_3 = q_2, & a_1 + 3a_3 + 9a_9 = q_8, \\ a_1 + 2a_2 + 4a_4 = q_3, & a_1 + 2a_2 + 5a_5 + 10a_{10} = q_9, \\ a_1 + 5a_5 = q_4, & a_1 + 11a_{11} = q_{10}, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 6a_6 = q_5, & a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 6a_6 + 12a_{12} = q_{11}, \quad \dots \end{array} \right. \quad (6)$$

Для примера представления функции агрегатом первого рода возьмем экспоненту $f(x) = e^x$, для которой $-f'(x)/f(x) = -1$. Подставляя $q_0 = 1$ и $q_1 = q_2 = \dots = 0$ в систему (5), получим следующую замечательную формулу (см. [2]):

$$e^x = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-\mu(n)/n}, \quad (7)$$

где $\mu(n)$ — теоретико-числовая функция Мебиуса (см. [3]).

Система (5) — это треугольная бесконечная система линейных уравнений, все частичные определители которой отличны от нуля. Поэтому система (5) всегда имеет единственное решение. Однако найти это решение в общем виде бывает затруднительно, поскольку для коэффициентов уравнений системы (5) нет явного выражения.

Чтобы исправить эту ситуацию, введем в рассмотрение так называемые *мигающие функции* натурального аргумента

$$\beta_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = km, \\ 0, & \text{если } n \neq km. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что систему (5) можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^m na_n \beta_n(m) = q_{m-1}. \quad (8)$$

Эту систему мы будем называть *определяющей системой* для мультипликативных агрегатов первого рода. Начало этой системы имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1\beta_1(1) = q_0, \\ a_1\beta_1(2) + 2a_2\beta_2(2) = q_1, \\ a_1\beta_1(3) + 2a_2\beta_2(3) + 3a_3\beta_3(3) = q_2, \\ a_1\beta_1(4) + 2a_2\beta_2(4) + 3a_3\beta_3(4) + 4a_4\beta_4(4) = q_3, \\ a_1\beta_1(5) + 2a_2\beta_2(5) + 3a_3\beta_3(5) + 4a_4\beta_4(5) + 5a_5\beta_5(5) = q_4, \quad \dots, \end{array} \right. \quad (9)$$

а ее решение в общем виде дается следующей формулой:

$$a_n = \frac{1}{n!} \left| \begin{array}{cccccc} \beta_1(1) & 0 & 0 & \dots & 0 & q_0 \\ \beta_1(2) & 2\beta_2(2) & 0 & \dots & 0 & q_1 \\ \beta_1(3) & 2\beta_2(3) & 3\beta_3(3) & \dots & 0 & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_1(k-1) & 2\beta_2(k-1) & 3\beta_3(k-1) & \dots & (k-1)\beta_{k-1}(k-1) & q_{k-2} \\ \beta_1(k) & 2\beta_2(k) & 3\beta_3(k) & \dots & (k-1)\beta_{k-1}(k) & q_{k-1} \end{array} \right|. \quad (10)$$

Формула (10) полностью решает задачу представления функций мультипликативными агрегатами первого рода.

2. Рассмотрим теперь представление функций мультипликативными агрегатами второго рода. Прологарифмировав и продифференцировав тождество

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)^{b_n}, \quad (11)$$

с учетом (4) получим следующую систему линейных уравнений для определения коэффициентов b_n :

$$\sum_{m \setminus n} m\eta(n, m)a_m = q_{n-1}, \quad (12)$$

где $\eta(m) = \pm 1$. Приведем начало этой системы в явном виде:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -b_1 = q_0, & -b_1 - 7b_7 = q_6, \\ b_1 - 2b_2 = q_1, & b_1 + 2b_2 + 4b_4 - 8b_8 = q_7, \\ -b_1 - 3b_3 = q_2, & -b_1 - 3b_3 - 9b_9 = q_8, \\ b_1 + 2b_2 - 4b_4 = q_3, & b_1 - 2b_2 + 5b_5 - 10b_{10} = q_9, \\ -b_1 - 5b_5 = q_4, & -b_1 - 11b_{11} = q_{10}, \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 - 6b_6 = q_5, & b_1 + 2b_2 + 3b_3 - 4b_4 + 6b_6 - 12b_{12} = q_{10}, \quad \dots \end{array} \right. \quad (13)$$

Функция двух натуральных аргументов $\eta(n, m)$, которая задает распределения знаков в уравнениях системы (12), устроена достаточно сложно; мы не будем здесь описывать ее строение, так как систему (12) целесообразно переписать в другом виде, где будут явно указаны коэффициенты ее уравнений (подобно тому, как систему (5) мы переписали в виде (8)). Для этого вместо $\beta_m(n)$ нам понадобятся *мигающие функции второго рода*

$$\gamma_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2km, \\ -1, & \text{если } n = (2k+1)m, \\ 0, & \text{если } n = hm, \end{cases} \quad (14)$$

при помощи которых систему (12) можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^m nb_n\gamma_n(m) = q_{m-1}. \quad (15)$$

Эту систему будем называть *определяющей системой* для мультипликативных агрегатов второго рода. Начало этой системы имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1\gamma_1(1) = q_0, \\ b_1\gamma_1(2) + 2b_2\gamma_2(2) = q_1, \\ b_1\gamma_1(3) + 2b_2\gamma_2(3) + 3b_3\gamma_3(3) = q_2, \\ b_1\gamma_1(4) + 2b_2\gamma_2(4) + 3b_3\gamma_3(4) + 4b_4\gamma_4(4) = q_3, \\ b_1\gamma_1(5) + 2b_2\gamma_2(5) + 3b_3\gamma_3(5) + 4b_4\gamma_4(5) + 5b_5\gamma_5(5) = q_4, \quad \dots, \end{array} \right. \quad (16)$$

а ее решение в общем виде дается следующей формулой:

$$a_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \gamma_1(1) & 0 & 0 & \dots & 0 & q_0 \\ \gamma_1(2) & 2\gamma_2(2) & 0 & \dots & 0 & q_1 \\ \gamma_1(3) & 2\gamma_2(3) & 3\gamma_3(3) & \dots & 0 & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1(k-1) & 2\gamma_2(k-1) & 3\gamma_3(k-1) & \dots & (k-1)\gamma_{k-1}(k-1) & q_{k-2} \\ \gamma_1(k) & 2\gamma_2(k) & 3\gamma_3(k) & \dots & (k-1)\gamma_{k-1}(k) & q_{k-1} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Формула (17) полностью решает задачу представления функций мультипликативными агрегатами первого рода.

3. Применим теперь формулы (10) и (17) для вывода некоторых соотношений теории чисел и комбинаторики.

Например, из представления (7) экспоненты с учетом (10) получаем формулу для вычисления функции Мебиуса:

$$\mu(n) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1(2) & \beta_2(2) & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1(3) & \beta_2(3) & \beta_3(3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1(n-1) & \beta_2(n-1) & \beta_3(n-1) & \dots & \beta_{n-1}(n-1) \\ \beta_1(n) & \beta_2(n) & \beta_3(n) & \dots & \beta_{n-1}(n) \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Выведем некоторые формулы для функций $L(n)$. С этой целью введем функцию

$$H(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} \quad (19)$$

и запишем ее логарифмическую производную:

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^{n-1}. \quad (20)$$

Выясним природу коэффициентов $\sigma(n)$. Если эти коэффициенты подставить в систему (8), то получим

$$\sigma(m) = \sum_{n=1}^m n\beta_n(m), \quad (21)$$

откуда видно, что $\sigma(m)$ — это сумма делителей числа m .

Разделим теперь фактически $H'(x)$ на $H(x)$:

$$\frac{L(1) + 2L(2)x + 3L(3)x^2 + \dots + nL(n)x^{n-1} + \dots}{1 + L(1)x + L(2)x^2 + L(3)x^3 + \dots + L(n)x^n + \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^{n-1}, \quad (22)$$

в результате чего получается система равенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(1) = L(1), \\ \sigma(1)L(1) + \sigma(2) = 2L(2), \\ \sigma(1)L(2) + \sigma(2)L(1) + \sigma(3) = 3L(3), \\ \sigma(1)L(3) + \sigma(2)L(2) + \sigma(3)L(1) + \sigma(4) = 4L(4), \\ \sigma(1)L(4) + \sigma(2)L(3) + \sigma(3)L(2) + \sigma(4)L(1) + \sigma(5) = 5L(5), \quad \dots, \end{array} \right. \quad (23)$$

т.е. для функции $L(n)$ имеем рекуррентное выражение

$$(n+1)L(n+1) = \sigma(1)L(n) + \sigma(2)L(n-1) + \dots + \sigma(n)L(1) + \sigma(n+1). \quad (24)$$

Если же систему (23) переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -L(1) = -\sigma(1), \\ \sigma(1)L(1) - 2L(2) = -\sigma(2), \\ \sigma(2)L(1) + \sigma(1)L(2) - 3L(3) = -\sigma(3), \\ \sigma(3)L(1) + \sigma(2)L(2) + \sigma(1)L(3) - 4L(4) = -\sigma(4), \\ \sigma(4)L(1) + \sigma(3)L(2) + \sigma(2)L(3) + \sigma(1)L(4) - 5L(5) = -\sigma(5), \quad \dots, \end{array} \right. \quad (25)$$

то получим удивительную формулу, устанавливающую связь между суммой делителей натурального числа $n \in \mathbb{N}$ и количеством неупорядоченных представлений в виде суммы равных или неравных натуральных слагаемых этого числа:

$$L(n) = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sigma(1) \\ \sigma(1) & -2 & 0 & 0 & \dots & -\sigma(2) \\ \sigma(2) & \sigma(1) & -3 & 0 & \dots & -\sigma(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(n-2) & \sigma(n-3) & \sigma(n-4) & \dots & -(n-1) & -\sigma(n-1) \\ \sigma(n-1) & \sigma(n-2) & \sigma(n-3) & \dots & \sigma(1) & -\sigma(n) \end{vmatrix}. \quad (26)$$

4. Формулы, аналогичные (24) и (26), можно получить и для количества неупорядоченных представлений числа $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы неравных натуральных слагаемых. Для этого понадобится ввести в рассмотрение некоторые теоретико-числовые функции. Можно показать (см. [2]), что многие теоретико-числовые функции выражаются через мигающие функции $\beta_m(n)$. Например, функцию $\tau(n)$, выражающую количество делителей числа n , можно выразить суммой

$$\tau(n) = \beta_1(n) + \beta_2(n) + \beta_3(n) + \dots + \beta_n(n),$$

а функция

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ простое число,} \\ 0, & \text{если } n \text{ составное число,} \end{cases}$$

выражается при $n > 2$ произведением

$$\varepsilon(n) = (1 - \beta_2(n))(1 - \beta_3(n)) \dots (1 - \beta_{n-1}(n)),$$

а формулы (18) и (21) дают представление функций $\mu(n)$ и $\sigma(n)$ через мигающие функции $\beta_m(n)$ и т. д.

Если некоторую теоретико-числовую функцию $\psi(n)$ можно выразить некоторой формулой через мигающие функции, то данной функции можно поставить в соответствие функцию $\tilde{\psi}(n)$, которая получается из $-\psi(n)$ заменой функций $\beta_m(n)$ на $\gamma_m(n)$, например,

$$\tilde{\tau}(n) = -\sum_{k=1}^n \gamma_k(n), \quad \tilde{\sigma}(n) = -\sum_{k=1}^n k\gamma_k(n), \quad \tilde{\varepsilon}(n) = -\prod_{k=2}^{n-1} (1 - \gamma_k(n)) \quad (27)$$

и т. д. Функции $\tilde{\psi}(n)$ будем называть *сопряженными* для функций $\psi(n)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$h(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$$

и вычислим ее логарифмическую производную, определив коэффициенты ряда Маклорена для $h'(x)/h(x)$ из системы (16), с учетом того, что все $b_k = 1$. В результате получим выражение

$$\frac{l(1) + 2l(2)x + 3l(3)x^2 + \dots + nl(n)x^{n-1} + \dots}{1 + l(1)x + l(2)x^2 + l(3)x^3 + \dots + l(n)x^n + \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\sigma}(n)x^{n-1}, \quad (28)$$

откуда вытекает следующая система равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}(1) = l(1), \\ \tilde{\sigma}(1)l(1) + \tilde{\sigma}(2) = 2l(2), \\ \tilde{\sigma}(1)l(2) + \tilde{\sigma}(2)l(1) + \tilde{\sigma}(3) = 3l(3), \\ \tilde{\sigma}(1)l(3) + \tilde{\sigma}(2)l(2) + \tilde{\sigma}(3)l(1) + \tilde{\sigma}(4) = 4l(4), \\ \tilde{\sigma}(1)l(4) + \tilde{\sigma}(2)l(3) + \tilde{\sigma}(3)l(2) + \tilde{\sigma}(4)l(1) + \tilde{\sigma}(5) = 5l(5), \quad \dots, \end{array} \right. \quad (29)$$

т.е. для функции $l(n)$ имеем рекуррентное выражение

$$(n+1)l(n+1) = \tilde{\sigma}(1)l(n) + \tilde{\sigma}(2)l(n-1) + \dots + \tilde{\sigma}(n)l(1) + \tilde{\sigma}(n+1). \quad (30)$$

Если же систему (29) переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -l(1) = -\tilde{\sigma}(1), \\ \tilde{\sigma}(1)l(1) - 2l(2) = -\tilde{\sigma}(2), \\ \tilde{\sigma}(2)l(1) + \tilde{\sigma}(1)l(2) - 3l(3) = -\tilde{\sigma}(3), \\ \tilde{\sigma}(3)l(1) + \tilde{\sigma}(2)l(2) + \tilde{\sigma}(1)l(3) - 4l(4) = -\tilde{\sigma}(4), \\ \tilde{\sigma}(4)l(1) + \tilde{\sigma}(3)l(2) + \tilde{\sigma}(2)l(3) + \tilde{\sigma}(1)l(4) - 5l(5) = -\tilde{\sigma}(5), \quad \dots, \end{array} \right. \quad (31)$$

то получим следующую формулу для вычисления количества неупорядоченных представлений в виде суммы неравных натуральных слагаемых числа $n \in \mathbb{N}$:

$$l(n) = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\tilde{\sigma}(1) \\ \tilde{\sigma}(1) & -2 & 0 & 0 & \dots & -\tilde{\sigma}(2) \\ \tilde{\sigma}(2) & \tilde{\sigma}(1) & -3 & 0 & \dots & -\tilde{\sigma}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(n-2) & \tilde{\sigma}(n-3) & \tilde{\sigma}(n-4) & \dots & -(n-1) & -\tilde{\sigma}(n-1) \\ \tilde{\sigma}(n-1) & \tilde{\sigma}(n-2) & \tilde{\sigma}(n-3) & \dots & \tilde{\sigma}(1) & -\tilde{\sigma}(n) \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Таким образом, формулы (30) и (32) для вычисления арифметической функции $l(n)$ получаются из формул (24) и (26) для функции $L(n)$ простой заменой функций $\sigma(n)$ на сопряженные им функции $\tilde{\sigma}(n)$.

5. В заключение отметим, что хотя мигающие функции $\beta_m(n)$ и $\gamma_m(n)$ были определены *вербально*, для них существуют простые аналитические выражения. Если ввести в рассмотрение величины

$$\alpha_m = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m) \equiv \sqrt[m]{1},$$

то для мигающих функций $\beta_m(n)$ и $\gamma_m(n)$ будут справедливы следующие формулы:

$$\beta_m(n) = \frac{1 + \alpha_m^n + \alpha_m^{2n} + \dots + \alpha_m^{(m-1)n}}{m},$$

$$\gamma_m(n) = \frac{\alpha_{2m}^n \left(1 + \alpha_m^n + \alpha_m^{2n} + \dots + \alpha_m^{(m-1)n} \right)}{m},$$

и, в частности, $\beta_1(n) \equiv 1$, $\gamma_1(n) = (-1)^n$.

Таким образом, различные арифметические функции, сконструированные из мигающих функций $\beta_m(n)$ и $\gamma_m(n)$, получают аналитические выражения через тригонометрические функции. Это позволяет делать оценки роста арифметических функций, исследовать их асимптотики, аппроксимировать функции натурального аргумента непрерывными и гладкими функциями вещественного и комплексного аргумента и т. д. Впрочем, все эти вопросы далеко выходят за рамки данной статьи.

Заметим еще, что с бесконечными произведениями степенных биномов и с приложениями мигающих функций можно более подробно познакомиться по монографии авторов «Мемуар о бесконечных произведениях» (см. [1]) и по учебному пособию «Введение в специальность. Конспект лекций» (см. [2]), ставшему, впрочем, библиографической редкостью после чеченской войны 1994–1996 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлаков В. М., Бурлаков М. П. Мемуар о бесконечных произведениях. — М.: Изд-во Л. А. Ким, 2019.
2. Бурлаков М. П. Введение в специальность. Конспект лекций. — Грозный: Изд-во Чечено-Ингуш. ун-та, 1985.
3. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1972.
4. Меньшиков М. В., Ревякин А. М., Копылова А. Н., Макаров Ю. Н., Стечкин Б. С. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. — М.: Наука, 1982.
5. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. — М.: ГИФМЛ, 1961.

Бурлаков Михаил Петрович
Тверской государственный университет
E-mail: burlakovmihail@mail.ru

Бурлаков Валерий Михайлович
Пензенский государственный университет