Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Гусева, Е. В. Лукьянова, Композиционные алгебры произвольных степеней, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 16–21

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-16-21>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:50:32

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 16–21
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-16-21

УДК 512.6

КОМПОЗИЦИОННЫЕ АЛГЕБРЫ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ

© 2020 г. Н. И. ГУСЕВА, Е. В. ЛУКЪЯНОВА

Аннотация. В статье дан обобщение композиционных алгебр, в котором квадратичная форма заменяется формой произвольной степени. Найдены две серии обобщенных композиционных алгебр: циклические алгебры произвольного порядка и алгебры, которые получаются обобщенной процедурой удвоения, примененной к циклическим алгебрам.

Ключевые слова: композиционная алгебра, проблема Гурвица, циклическая алгебра, процедура удвоения.

COMPOSITION ALGEBRAS OF ARBITRARY DEGREES

© 2020 N. I. GUSEVA, E. V. LUKYANOVA

ABSTRACT. In this paper, a generalization of composition algebras is given, in which the quadratic form is replaced by a form of arbitrary degree. Two series of generalized composition algebras are found: cyclic algebras of arbitrary order and algebras that are obtained by the generalized doubling procedure applied to cyclic algebras.

Keywords and phrases: composition algebra, Hurwitz problem, cyclic algebra, doubling procedure.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 16S38

Хорошо известно, какую роль в математике и ее приложениях сыграло открытие У. Гамильтоном алгебры гиперкомплексных чисел, которые он назвал кватернионами. В алгебре это открытие привело к формированию понятия векторного пространства. Самым существенным приложением кватернионов в физике XIX в. стала формулировка Дж. Максвеллом уравнений электродинамики на основе кватернионного анализа (см. [1]). В XX в. алгебра комплексных кватернионов сыграла ключевую роль в развитии квантовой электродинамики (см. [6]).

Самым существенным положением теории кватернионов является наличие в этой алгебре невырожденной квадратичной формы, обладающей *свойством мультипликативности* относительно произведения кватернионов. Такие алгебры называются *композиционными*; согласно теореме Гурвица, над полем вещественных чисел существуют (помимо самого поля) всего четыре ассоциативные композиционные алгебры (см. [4]): это алгебра комплексных чисел $\mathbb{C}$, алгебра двойных вещественных чисел $\mathbb{C}^+$, алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ и алгебра антикватернионов $\mathbb{H}^+$. Над полем комплексных чисел (помимо самого поля) существует всего две композиционные алгебры: алгебра двойных комплексных чисел $\mathbb{C}_2$ и алгебра комплексных кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Алгебра кватернионов получается *удвоением* алгебры комплексных чисел: если взять две алгебры комплексных чисел $\mathbb{C}(i)$ и $\mathbb{C}(j)$ с *мнимыми единицами* i и j , то кватернионами будут

формальные линейные комбинации $z = z_0 + z_1j$, где $z_0, z_1 \in \mathbb{C}(i)$, умножение которых определяется следующим правилом:

$$za = (z_0a_0 - z_1\bar{a}_1) + (z_0a_1 + z_1\bar{a}_0)j. \quad (1)$$

Такое умножение позволяет сконструировать квадратичную форму, мультипликативную относительно произведения кватернионов. Для этого заметим, что кватернионное линейное уравнение $za = c$ эквивалентно системе вещественных линейных уравнений

$$\begin{cases} a_0z_0 - \bar{a}_1z_1 = c_0, \\ a_1z_0 + \bar{a}_0z_1 = c_1; \end{cases} \quad (2)$$

можно показать, что определитель этой системы

$$\Delta_2(a) = \begin{vmatrix} a_0 & -\bar{a}_1 \\ a_1 & \bar{a}_0 \end{vmatrix} = a_0\bar{a}_0 + a_1\bar{a}_1 \quad (3)$$

где $a_0 = a_{00} + ia_{10}$, $a_1 = a_{01} + ia_{11}$, является квадратичной формой

$$a_0\bar{a}_0 + a_1\bar{a}_1 = a_{00}^2 + a_{10}^2 + a_{01}^2 + a_{11}^2,$$

мультипликативной относительно умножения кватернионов. Это сразу следует из формулы (1) и правила умножения определителей:

$$\Delta_2(za) = \begin{vmatrix} z_0a_0 - z_1\bar{a}_1 & -\bar{z}_0\bar{a}_1 - \bar{z}_1a_0 \\ z_0a_1 + z_1\bar{a}_0 & \bar{z}_0\bar{a}_0 - \bar{z}_1a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & -\bar{a}_1 \\ a_1 & \bar{a}_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_0 & -\bar{z}_1 \\ z_1 & \bar{z}_0 \end{vmatrix} = \Delta_2(a)\Delta_2(z). \quad (4)$$

Тождество (4), записанное в вещественных координатах

$$\begin{aligned} & \left(a_{00}z_{00} - a_{10}z_{10} - a_{01}z_{01} - a_{11}z_{11} \right)^2 + \left(a_{10}z_{00} + a_{00}z_{10} - a_{11}z_{01} + a_{01}z_{11} \right)^2 + \\ & + \left(a_{01}z_{00} + a_{11}z_{10} + a_{00}z_{01} - a_{10}z_{11} \right)^2 + \left(a_{11}z_{00} - a_{00}z_{10} + a_{10}z_{01} + a_{00}z_{11} \right)^2 = \\ & = \left(a_{00}^2 + a_{10}^2 + a_{01}^2 + a_{11}^2 \right) \left(z_{00}^2 + z_{10}^2 + z_{01}^2 + z_{11}^2 \right), \quad (5) \end{aligned}$$

называется *тождеством четырех квадратов*.

Аналогично, алгебра антикватернионов получается удвоением алгебры двойных вещественных чисел, а алгебра комплексных кватернионов — удвоением алгебры двойных комплексных чисел.

Вопрос о существовании композиционных алгебр называют *проблемой Гурвица*; теорема, носящая его имя, утверждает, что кроме перечисленных выше алгебр не существует других ассоциативных алгебр с *невыврожденной квадратичной формой*, обладающей *свойством мультипликативности* относительно произведения элементов алгебры. Естественно возникает вопрос: существуют ли ассоциативные алгебры с невыврожденной формой, не обязательно квадратичной, но обладающей *свойством мультипликативности* относительно произведения элементов данной алгебры? Такой вопрос можно назвать *обобщенной проблемой Гурвица*. Алгебры с невыврожденной формой любой степени, обладающей *свойством мультипликативности* относительно произведения элементов данной алгебры, естественно называть *обобщенно композиционными алгебрами*.

Ответ на поставленный вопрос был дан М. П. Бурлаковым в конце 1970-х гг. (см. [2]). Он показал, что свойством мультипликативности обладают *детерминанты* элементов циклических и антициклических алгебр над полем вещественных чисел, а над полем комплексных чисел помимо комплексных циклических алгебр существуют обобщенно композиционные алгебры, которые при помощи *обобщенной процедуры удвоения* получаются из циклических алгебр.

Комплексной циклической алгеброй порядка m называется алгебра $\mathbb{C}_m(e)$, базисом которой будут элементы $e, e^2, \dots, e^{m-1}$ и единица, а умножение определяется структурным тождеством $e^m = 1$. Таким образом, произвольный элемент $x \in \mathbb{C}_m(e)$ имеет вид

$$x = x_0 + x_1e + x_2e^2 + \dots + x_{m-1}e^{m-1},$$

где $x_k \in \mathbb{C}$, и для произведения элементов $x, a \in \mathbb{C}_m(e)$ получается тождество

$$\begin{aligned} x \cdot a &= \left(x_0 + x_1 e + x_2 e^2 + \dots + x_{m-1} e^{m-1} \right) \cdot \left(a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_{m-1} e^{m-1} \right) = \\ &= \left(x_0 a_0 + x_1 a_{m-1} + x_2 a_{m-2} + \dots + x_{m-1} a_1 \right) + \left(x_0 a_1 + x_1 a_0 + x_2 a_{m-1} + \dots + x_{m-1} a_2 \right) e + \\ &\quad + \left(x_0 a_2 + x_1 a_1 + x_2 a_0 + \dots + x_{m-1} a_3 \right) e^2 + \dots + \\ &\quad + \left(x_0 a_{m-1} + x_1 a_{m-2} + x_2 a_{m-3} + \dots + x_{m-1} a_0 \right) e^{m-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из тождества (6) следует, что линейное алгебраическое уравнение $x \cdot a = c$ эквивалентно системе комплексных линейных уравнений с определителем следующего вида:

$$\Delta_m(a) = \begin{vmatrix} a_0 & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{m-1} & \dots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots & a_0 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Величина $\Delta_m(x)$ называется *детерминантом* элемента циклической алгебры $x \in \mathbb{C}_m(e)$ и представляет собой форму m -й степени, которая обладает мультипликативным свойством относительно произведения элементов этой алгебры, т.е.

$$\Delta_m(x \cdot a) = \Delta_m(x) \Delta_m(a). \quad (8)$$

Доказательство тождества (8) получается прямым вычислением определителей входящих в это тождество. Например, для $m = 2$

$$\Delta_2(a \cdot x) = \begin{vmatrix} a_0 x_0 + a_1 x_1 & a_1 x_0 + a_0 x_1 \\ a_1 x_0 + a_0 x_1 & a_0 x_0 + a_1 x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \Delta_2(a) \Delta_2(x);$$

это тождество, записанное в комплексных координатах,

$$(a_0^2 - a_1^2)(x_0^2 - x_1^2) = (a_0 x_0 + a_1 x_1)^2 - (a_1 x_0 + a_0 x_1)^2 \quad (9)$$

называется *тождеством двух квадратов*. Впрочем, его чаще записывают, заменив x_1 на ix_1 и a_1 на ia_1 :

$$(a_0^2 + a_1^2)(x_0^2 + x_1^2) = (a_0 x_0 - a_1 x_1)^2 + (a_1 x_0 + a_0 x_1)^2.$$

Выпишем еще композиционное тождество (8) для $m = 3$:

$$\begin{aligned} \Delta_3(x \cdot a) &= \begin{vmatrix} x_0 a_0 + x_1 a_2 + x_2 a_1 & x_0 a_2 + x_1 a_1 + x_2 a_0 & x_0 a_1 + x_1 a_0 + x_2 a_2 \\ x_0 a_1 + x_1 a_0 + x_2 a_2 & x_0 a_0 + x_1 a_2 + x_2 a_1 & x_0 a_2 + x_1 a_1 + x_2 a_0 \\ x_0 a_2 + x_1 a_1 + x_2 a_0 & x_0 a_1 + x_1 a_0 + x_2 a_2 & x_0 a_0 + x_1 a_2 + x_2 a_1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \Delta_3(a) \Delta_3(x). \end{aligned}$$

Это тождество, записанное в (комплексных) координатах, представляет собой *кубический аналог тождества двух квадратов*:

$$\begin{aligned} (a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0 a_1 a_2)(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0 x_1 x_2) &= \\ &= (a_0 x_0 + a_2 x_1 + a_1 x_2)^3 + (a_1 x_0 + a_0 x_1 + a_2 x_2)^3 + (a_2 x_0 + a_1 x_1 + a_0 x_2)^3 - \\ &\quad - (a_0 x_0 + a_2 x_1 + a_1 x_2)(a_1 x_0 + a_0 x_1 + a_2 x_2)(a_2 x_0 + a_1 x_1 + a_0 x_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Детерминанты вида (7) называются циркулянтами, и для их вычисления применяется следующая формула [5]:

$$\Delta_m(x) = \prod_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{h=0}^{m-1} \alpha_m^{kh} x_h \right), \quad (11)$$

где $\alpha_m = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m)$. Например, для $m = 2$

$$\Delta_2(x) = x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1),$$

так как $\alpha_2 = -1$, а для $m = 3$ получается тождество

$$\begin{aligned} \Delta_3(x) &= x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2 = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2) \left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 - x_1x_2 - x_2x_0 \right) = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2) \left(x_0 + \alpha_3x_1 + \alpha_3^2x_2 \right) \left(x_0 + \alpha_3^2x_1 + \alpha_3x_2 \right). \end{aligned}$$

Формула (11) служит основанием для того, чтобы ввести в рассмотрение *резольвенты* для элементов $x \in \mathbb{C}_m(x)$, которые определяются следующим образом (см. [5]):

$$x(\alpha_m^k) = x_0 + x_1e^k + x_2e^{2k} + \dots + x_{m-1}e^{(m-1)k}, \quad (12)$$

и для единообразия считается, что $x(1) = x$. Прямым вычислением несложно показать, что *резольвентные операторы* $\hat{\alpha}_m^k: \mathbb{C}_m(e) \rightarrow \mathbb{C}_m(e)$, определенные формулой $\hat{\alpha}_m^k(x) = x(\alpha_m^k)$, будут мультиинволютивными эндоморфизмами алгебры $\mathbb{C}_m(e)$, т.е. резольвентные операторы удовлетворяют следующим тождествам:

$$\hat{\alpha}_m^k(x + y) = \hat{\alpha}_m^k(x) + \hat{\alpha}_m^k(y), \quad \hat{\alpha}_m^k(x \cdot y) = \hat{\alpha}_m^k(x) \cdot \hat{\alpha}_m^k(y), \quad \hat{\alpha}_m^m(x) = x.$$

При этом нетрудно видеть, что для $m = 2$ резольвентный оператор совпадает с оператором сопряжения в алгебре двойных комплексных чисел $\mathbb{C}_2(e)$, т.е. резольвентные операторы представляют собой обобщение оператора сопряжения. Это обстоятельство приводит к конструкции *обобщенной процедуры удвоения* циклических алгебр $\mathbb{C}_m(e)$ любого порядка.

По аналогии с классической процедурой удвоения, при помощи которой из алгебры комплексных чисел получалась алгебра кватернионов, а из алгебры двойных комплексных чисел — алгебра комплексных кватернионов, возьмем две циклические алгебры $\mathbb{C}_m(e_1)$ и $\mathbb{C}_m(e_2)$ и рассмотрим формальные линейные комбинации вида

$$\mathbf{x} = x_0 + x_1 \cdot e_2 + x_2 \cdot e_2^2 + \dots + x_{m-1} \cdot e_2^{m-1}, \quad \text{где } x_k \in \mathbb{C}_m(e_1). \quad (13)$$

Множество таких линейных комбинаций станет линейной алгеброй, если как-либо определить их умножение. В частности, умножение линейных комбинаций (13) можно определить коммутационными соотношениями вида

$$e_2 \cdot x = x(\alpha_m) \cdot e_2, \quad x \cdot e_2 = e_2 \cdot x(\alpha_m^{m-1}) \quad (14)$$

для любых $x \in \mathbb{C}_m(e_1)$. Множество линейных комбинаций вида (13) с умножением, определенным коммутационными соотношениями (14), образует линейную алгебру, которая обозначается $\mathbb{B}_2^m$ и называется *алгеброй бионов m -го порядка*, или *двухмерной элементарной алгеброй порядка m* (см. [2]).

Покажем, что алгебра $\mathbb{B}_2^m$ является *обобщенно композиционной алгеброй m -го порядка*, т.е. существуют форма m -й степени, мультипликативная относительно умножения элементов данной

алгебры. Для этого вычислим произведение двух произвольных элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{B}_2^m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \left(x_0 + x_1 \cdot e_2 + x_2 \cdot e_2^2 + \dots + x_{m-1} \cdot e_2^{m-1} \right) \times \left(y_0 + y_1 \cdot e_2 + y_2 \cdot e_2^2 + \dots + y_{m-1} \cdot e_2^{m-1} \right) = \\ &= \left(x_0 \cdot y_0 + x_1 \cdot y_{m-1}(\alpha_m) + x_2 \cdot y_{m-2}(\alpha_m^2) + \dots + x_{m-1} \cdot y_1(\alpha_m^{m-1}) \right) + \\ &+ \left(x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0(\alpha_m) + x_2 \cdot y_{m-1}(\alpha_m^2) + \dots + x_{m-1} \cdot y_2(\alpha_m^{m-1}) \right) \cdot e_2 + \\ &+ \left(x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_1(\alpha_m) + x_2 \cdot y_0(\alpha_m^2) + \dots + x_{m-1} \cdot y_3(\alpha_m^{m-1}) \right) \cdot e_2^2 + \dots \\ &+ \left(x_0 \cdot y_{m-1} + x_1 \cdot y_{m-2}(\alpha_m) + \dots + x_{m-1} \cdot y_0(\alpha_m^{m-1}) \right) \cdot e_2^{m-1}. \quad (15) \end{aligned}$$

Это тождество подсказывает, что именно следует взять в качестве формы m -й степени, мультипликативной относительно умножения элементов алгебры $\mathbb{B}_2^m$. Обозначим

$$\Delta_m(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} y_0 & y_{m-1}(\alpha_m) & y_{m-2}(\alpha_m^2) & \dots & y_1(\alpha_m^{m-1}) \\ y_1 & y_0(\alpha_m) & y_{m-1}(\alpha_m^2) & \dots & y_2(\alpha_m^{m-1}) \\ y_2 & y_1(\alpha_m) & y_0(\alpha_m^2) & \dots & y_3(\alpha_m^{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m-1} & y_{m-2}(\alpha_m) & y_{m-3}(\alpha_m^2) & \dots & y_0(\alpha_m^{m-1}) \end{vmatrix}, \quad (16)$$

и будем величину $\Delta_m(\mathbf{y})$ называть *детерминантом* элемента $\mathbf{y} \in \mathbb{B}_2^m$. Непосредственным вычислением можно показать, что

$$\Delta_m(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \Delta_m(\mathbf{x}) \Delta_m(\mathbf{y}). \quad (17)$$

Например, для $m = 3$ будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_3(\mathbf{x}) \Delta_3(\mathbf{y}) &= \begin{vmatrix} x_0 & x_2(\alpha_3) & x_1(\alpha_3^2) \\ x_1 & x_0(\alpha_3) & x_2(\alpha_3^2) \\ x_2 & x_1(\alpha_3) & x_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & y_2(\alpha_3) & y_1(\alpha_3^2) \\ y_1 & y_0(\alpha_3) & y_2(\alpha_3^2) \\ y_2 & y_1(\alpha_3) & y_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_0 \cdot y_0 + x_2(\alpha_3) \cdot y_1 + x_1(\alpha_3^2) \cdot y_2 \\ x_1 \cdot y_0 + x_0(\alpha_3) \cdot y_1 + x_2(\alpha_3^2) \cdot y_2 \\ x_2 \cdot y_0 + x_1(\alpha_3) \cdot y_1 + x_0(\alpha_3^2) \cdot y_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_0 \cdot y_2(\alpha_3) + x_2(\alpha_3) \cdot y_0(\alpha_3) + x_1(\alpha_3^2) \cdot y_1(\alpha_3) \\ x_1 \cdot y_2(\alpha_3) + x_0(\alpha_3) \cdot y_0(\alpha_3) + x_2(\alpha_3^2) \cdot y_1(\alpha_3) \\ x_2 \cdot y_2(\alpha_3) + x_1(\alpha_3) \cdot y_0(\alpha_3) + x_0(\alpha_3^2) \cdot y_1(\alpha_3) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_0 \cdot y_1(\alpha_3^2) + x_2(\alpha_3) \cdot y_2(\alpha_3^2) + x_1(\alpha_3^2) \cdot y_0(\alpha_3^2) \\ x_1 \cdot y_1(\alpha_3^2) + x_0(\alpha_3) \cdot y_2(\alpha_3^2) + x_2(\alpha_3^2) \cdot y_0(\alpha_3^2) \\ x_2 \cdot y_1(\alpha_3^2) + x_1(\alpha_3) \cdot y_2(\alpha_3^2) + x_0(\alpha_3^2) \cdot y_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \Delta_3(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Остается показать, что хотя элементами определителя (16) являются элементы алгебры $\mathbb{C}_2(e_1)$, сам определитель будет комплексным числом. Доказательство этого факта следует из того, что элемент алгебры $\mathbb{C}_m(e_1)$ является комплексным числом тогда и только тогда, когда действие на него оператора резольвенты не меняет этот элемент. Несложно показать, что действие оператора резольвенты на $\Delta_m(\mathbf{y})$ не меняет этот определитель. Например,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_3(\Delta_m(\mathbf{y})) &= \hat{\alpha}_3 \begin{vmatrix} y_0 & y_2(\alpha_3) & y_1(\alpha_3^2) \\ y_1 & y_0(\alpha_3) & y_2(\alpha_3^2) \\ y_2 & y_1(\alpha_3) & y_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0(\alpha_3) & y_2(\alpha_3^2) & y_1 \\ y_1(\alpha_3) & y_0(\alpha_3^2) & y_2 \\ y_2(\alpha_3) & y_1(\alpha_3^2) & y_0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_0(\alpha_3) & y_1 & y_2(\alpha_3^2) \\ y_1(\alpha_3) & y_2 & y_0(\alpha_3^2) \\ y_2(\alpha_3) & y_0 & y_1(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_0(\alpha_3) & y_2(\alpha_3^2) \\ y_2 & y_1(\alpha_3) & y_0(\alpha_3^2) \\ y_0 & y_2(\alpha_3) & y_1(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_0(\alpha_3) & y_2(\alpha_3^2) \\ y_0 & y_2(\alpha_3) & y_1(\alpha_3^2) \\ y_2 & y_1(\alpha_3) & y_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0 & y_2(\alpha_3) & y_1(\alpha_3^2) \\ y_1 & y_0(\alpha_3) & y_2(\alpha_3^2) \\ y_2 & y_1(\alpha_3) & y_0(\alpha_3^2) \end{vmatrix} = \Delta_m(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbb{B}_2^m$ дают серию обобщенно композиционных алгебр m -го порядка. Они получают-ся процедурой обобщенного удвоения циклических алгебр m -го порядка, подобно тому как алгебра комплексных кватернионов получается процедурой удвоения алгебры двойных комплексных

чисел. Комплексная размерность алгебры $\mathbb{B}_2^m$ равна m^2 , и любой ее элемент может быть записан в комплексных координатах следующей суммой:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{h=0}^{m-1} x_{kh} e_1^k \cdot e_2^h.$$

При этом очевидно, что $\mathbb{B}_2^2 = \mathbb{H}(\mathbb{C})$, т.е. алгебры $\mathbb{B}_2^m$ обобщают алгебру комплексных кватернионов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова Н. В.* Из истории векторного исчисления. — М.: МАИ, 1992.
2. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф-Пресс, 2006.
3. *Гусева Н. И., Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Элементарная геометрия в пространствах над алгебрами. — М.: Интеллект-Центр, 2017.
4. *Жевлаков К. А., Слиньюко А. М., Шестаков И. П., Ширинов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
5. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1967.
6. *Хунд Ф.* История квантовой теории. — Киев: Наукова думка, 1980.

Гусева Надежда Ивановна

Московский педагогический государственный университет;

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва

E-mail: ngus12@mail.ru

Лукьянова Елена Викторовна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: lukyanovalv@list.ru