Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е.И. Деза, К вопросу об обобщенных дискретных метрических структурах,
Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2020,
том 181, 22–29

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-22-29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 04:39:24

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 22–29
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-22-29

УДК 519.1

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

© 2020 г. Е. И. ДЕЗА

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы, связанные с построением и исследованием конусов полуметрик, квазиполуметрик (которые являются ориентированными аналогами симметричного случая полуметрик), и m -полуметрик (которые являются многомерными аналогами двумерного случая полуметрик).

Ключевые слова: расстояние, полуметрика, метрика, квазиполуметрика, многомерная полуметрика, разрез, мультиразрез, конус обобщенных дискретных метрических структур.

ON GENERALIZED DISCRETE METRIC STRUCTURES

© 2020 Е. I. DEZA

ABSTRACT. In this paper, we discuss problems related to construction and investigation of cones of semimetrics, quasi-semimetrics (which are oriented analogs of symmetric semimetrics), and m -semimetrics (which are multidimensional analogs of two-dimensional semimetrics).

Keywords and phrases: distance, semimetric, metric, quasi-semimetric, multidimensional semimetric, cut, multi-cut, cone of generalized discrete metric structures.

AMS Subject Classification: 54E25, 54E35

1. Введение. Понятие расстояния является одним из основных не только в математике и науке в целом, но и во всем человеческом бытии. Для обычной жизни *расстояние* представляет собой прежде всего оценку степени близости двух объектов или идей. В то же время термин *метрика* используется, как правило, для обозначения стандартного понятия меры (измерения).

Математические понятия *метрики* на множестве X (т.е. функции $d(x, y)$ из $X \times X$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $d(x, y) \geq 0$ с равенством только при $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$, и $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, и *метрического пространства* (X, d) были внедрены М. Фреше (см. [11]) и Ф. Хаусдорфом (см. [12]; см. историю вопроса в [2]) как частный случай топологического пространства (см. [13]). При этом *неравенство треугольника* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ встречается уже у Евклида.

Бесконечные метрические пространства появляются обычно как обобщения *естественной метрики* $|x - y|$ на $\mathbb{R}$. Основными пространствами такого рода являются измеримые пространства (добавим меру) и банаховы пространства (добавим норму и полноту). Начиная с К. Менгера (1928) и Л. М. Блюменталя (1953), можно констатировать резкое повышение интереса ученых к конечным метрическим пространствам. Впрочем, широкое использование как конечных, так и бесконечных метрических пространств становится со второй половины XX в. трендом науки, потому что многие математические теории в ходе своего формирования стабилизируются именно на уровне метрического пространства (см. [14]).

Этот процесс продолжается и сейчас. Метрики и расстояния давно и прочно стали важным инструментом исследований в самых разных областях математики и ее приложений, включая геометрию, теорию вероятностей, статистику, теорию кодирования, теорию графов, кластерный анализ, анализ данных, распознавание образов, теорию сетей, математическую инженерию, компьютерную графику, машинное зрение, астрономию, космологию, молекулярную биологию и многие другие отрасли науки. Создание наиболее удобных метрик стало центральной задачей для многих исследователей. Нередки случаи, когда одни и те же метрики появляются независимо друг от друга в совершенно разных сферах (расстояние между словами и расстояние (путь) эволюционного развития в биологии, расстояние Левенштейна в теории кодирования, расстояние Хэмминга с пропусками и др.).

В частности, к центральным объектам дискретной математики принадлежат метрический и разрезной конусы (см. [8]). Проблема максимального разреза, состоящая в нахождении для данного графа разреза максимального веса, является одной из наиболее значимых в комбинаторной оптимизации и имеет множество применений, в том числе в статистической механике.

Представляют значительный интерес и другие полиэдральные конструкции, связанные с конечными метриками, их аналогами и обобщениями: квазиметриками (несимметричный случай), m -метриками (многомерный случай) и т. д.

В данной статье мы рассматриваем вопросы, касающиеся конусов конечных квазиполуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов и других ориентированных объектов, родственных метрикам, и соответствующую многомерную теорию, в том числе анализируем результаты машинных вычислений, полученные для таких конусов небольших размеров (см. [9]).

2. Метрики и их ориентированные и многомерные аналоги. В данном разделе мы вводим все основные определения, связанные с метриками и их ориентированными и многомерными аналогами.

Метрикой на n точках называется функция $d: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющая следующим условиям для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$:

- (i) $d_{ii} = 0$;
- (ii) $d_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$;
- (iii) *симметричность*: $d_{ij} = d_{ji}$;
- (iv) *неравенства треугольника*: $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$.

При построении полиэдральных конструкций понятие метрики слишком ограничивает наши возможности, и значительно удобнее пользоваться его ослабленным аналогом — понятием полуметрики.

Полуметрикой на n точках называется симметричная функция $d: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющая следующим условиям для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$:

- (i) $d_{ii} = 0$;
- (ii) *неравенства треугольника*: $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$.

Другими словами, полуметрика — это метрика, допускающая нулевое расстояние между различными точками.

Одним из возможных обобщений (полу)метрик являются квази(полу)метрики, представляющие собой аналогичные, но несимметричные конструкции.

Квазиметрикой на n точках называется функция $q: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющая следующим условиям для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$:

- (i) $q_{ii} = 0$;
- (ii) $q_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$;
- (iii) *ориентированные неравенства треугольника*: $q_{ik} \leq q_{ij} + q_{jk}$.

Другими словами, квазиметрика не всегда удовлетворяет условию симметричности $d_{ij} = d_{ji}$.

Квазиполуметрикой q на n точках называется функция $q: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющая следующим условиям для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$:

- (i) $q_{ii} = 0$;
- (ii) *ориентированные неравенства треугольника*: $q_{ik} \leq q_{ij} + q_{jk}$.

Таким образом, квазиполуметрика — это «несимметричная полуметрика», или, что то же, «несимметричная метрика, допускающая нулевое значение на различных точках». Простейшим примером квазиполуметрики является измерение расстояний в городе, обладающим улицами с односторонним движением.

Квазиметрики были введены Хаусдорфом в [12], а их топология изучается с Вильсона (см. [15]). Конусы и многогранники квазиполуметрик изучались в [2–4, 6, 9].

Для нашего исследования представляет интерес еще одно обобщение квазиполуметрик — так называемые m -(полу)метрики, являющиеся многомерными аналогами двумерного случая (полу)метрики.

m -Метрикой на n точках называется функция $d: \{1, \dots, n\}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям для всех $x_1, \dots, x_{m+2} \in \{1, \dots, n\}$:

- (i) *неотрицательность*: $d(x_1, \dots, x_{m+1}) \geq 0$;
- (ii) *положительная определенность*: $d(x_1, \dots, x_1) = 0$;
- (iii) *тотальная симметрия*: $d(x_1, \dots, x_{m+1}) = d(\pi(x_1), \dots, \pi(x_{m+1}))$ для любой перестановки π множества $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$;
- (iv) *неравенства m -симплекса*:

$$d(x_1, \dots, x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+2}).$$

m -Полуметрикой на n точках называется функция $d: \{1, \dots, n\}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям для всех $x_1, \dots, x_{m+2} \in \{1, \dots, n\}$:

- (i) *неотрицательность*: $d(x_1, \dots, x_{m+1}) \geq 0$;
- (ii) *слабая положительная определенность*: $d(x_1, \dots, x_{m+1}) = 0$ в случае, если $x_1, \dots, x_{m+1}$ не являются попарно различными;
- (iii) *тотальная симметрия*: $d(x_1, \dots, x_{m+1}) = d(\pi(x_1), \dots, \pi(x_{m+1}))$ для любой перестановки π множества $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$;
- (iv) *неравенства m -симплекса*:

$$d(x_1, \dots, x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+2}).$$

Заметим, что в некоторых источниках m -метрика получается из m -полуметрики при добавлении следующего условия: если $x_1, \dots, x_m$ попарно различны, то $d(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) > 0$ для некоторого x_{m+1} .

Простейшим примером m -полуметрики является m -мерный объем в $\mathbb{R}^n$, $n \geq m$. m -Полуметрики были введены в [10].

3. Примеры метрик, полуметрик и их ориентированных и многомерных аналогов. Рассмотрим ряд базовых примеров.

3.1. Дискретная метрика. Для данного множества X , *дискретная метрика* — метрика на X , определенная формулой

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.2. Метрика Хаусдорфа. Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство и $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ — разбиение X . *Метрика Хаусдорфа* — метрика d на множестве $Y = \{X_1, \dots, X_n\}$, определенная формулой

$$d(X_i, X_j) = \max_{x \in X_i, y \in X_j} D(x, y).$$

3.3. *Метрика симметрической разности.* Для заданной антицепи множеств $Z = \{x, y, z, \dots \mid x \not\subset y \text{ для всех } x \neq y\}$, метрика симметрической разности — метрика на Z , определенная формулой

$$d_{\Delta}(x, y) = |x \Delta y|.$$

Она равна числу элементов в симметрической разности

$$x \Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

множеств x и y из Z .

3.4. *Дискретная квазиполуметрика.* Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Дискретная квазиполуметрика — квазиполуметрика q на X , определенная формулой

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.5. *Квазиметрика Хаусдорфа.* Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство, и $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ — разбиение X . Квазиметрика Хаусдорфа — квазиметрика q на множестве $Y = \{X_1, \dots, X_n\}$, определенная формулой

$$q(X_i, X_j) := \min_{x \in X_i} \max_{y \in X_j} D(x, y).$$

3.6. *Квазисемиметрика асимметричной разности.* Для заданной антицепи множеств $Z = \{x, y, z, \dots \mid x \not\subset y \text{ для всех } x \neq y\}$, метрика симметрической разности — метрика на Z , определенная формулой

$$d_{\Delta}(x, y) = |x \Delta y|.$$

Она равна числу элементов в асимметрической разности $x \setminus y$ множеств x и y из Z .

3.7. *Дискретная 2-метрика.* Для заданного множества X , $|X| \geq 4$, дискретная 2-метрика — 2-метрика d на X , определенная формулой

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y \text{ или } y = z \text{ или } x = z, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.8. *2-Метрика Хаусдорфа.* Пусть (X, D) — конечное метрическое пространство и $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ — разбиение X . Квазиметрика Хаусдорфа — квазиметрика d на множестве $Y = \{X_1, \dots, X_n\}$, определенная как

$$d(X_i, X_j, X_k) = \frac{1}{3} \left(\max_{x \in X_i, y \in X_j} D(x, y) + \max_{x \in X_i, y \in X_k} D(x, y) + \max_{x \in X_k, y \in X_j} D(x, y) \right).$$

В общем случае m -метрика Хаусдорфа d на $Y = \{X_1, \dots, X_n\}$ определяется как

$$\begin{aligned} d(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{m+1}}) &= \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\max_{x \in X_{i_1}, y \in X_{i_2}} D(x, y) + \max_{x \in X_{i_1}, y \in X_{i_3}} D(x, y) + \dots + \max_{x \in X_{i_m}, y \in X_{i_{m+1}}} D(x, y) \right). \end{aligned}$$

3.9. *2-Полуметрика симметрической разности.* Для заданной антицепи множеств $Z = \{x, y, z, \dots \mid x \not\subset y \text{ для всех } x \neq y\}$, 2-метрика симметрической разности — 2-метрика ρ на Z , определенная формулой

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}(|x \Delta y| + |y \Delta z| + |x \Delta z|);$$

это число элементов, которые принадлежат x , y или z , но не всем трем множествам x , y , z .

Мы привели три группы примеров по три метрики в каждой группе: для классического симметрического двумерного случая, для ориентированного случая и для трехмерного (многомерного) случая. Заинтересованный читатель может построить свои примеры, например, связанные с метрикой пути связного графа. Эти построения, как и множество других интересных примеров, можно найти в [5].

4. Разрезы, мультиразрезы и их ориентированные и многомерные аналоги. Среди огромного числа различных полуметрик особую роль играют так называемые разрезы и мультиразрезы.

Разрезом на n точках для множества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется функция $\delta_S: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой разрез является полуметрикой (не метрикой!).

Мультиразрезом (точнее, m -мультиразрезом) на n точках для разбиения $\bigcup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$ называется функция $\delta_{S_1, \dots, S_m}: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что 2-мультиразрезы совпадают с разрезами. Более того, любой мультиразрез можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации разрезов:

$$\delta_{S_1, \dots, S_m} = \sum_{i=1}^m \delta_{S_i, \overline{S_i}}.$$

Число всех мультиразрезов на n точках представляет собой *число Белла* $B(n)$, т.е. число всех разбиений n -множества.

Ориентированные разрезы и мультиразрезы являются, в свою очередь, специальным случаем квазиполуметрик, несимметричным аналогом разрезов и мультиразрезов.

Ориентированным разрезом на n точках для множества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется функция $\delta'_S: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S, j \notin S, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой ориентированный разрез является квазиполуметрикой (не квазиметрикой!).

Ориентированным мультиразрезом (точнее, *ориентированным m -мультиразрезом*) для ориентированного разбиения $\bigcup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ на m частей $S_1, \dots, S_m$ называется функция $\delta'_{S_1, \dots, S_m}: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_{S_1, \dots, S_m}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_a, j \in S_b \text{ и } a < b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что ориентированные 2-мультиразрезы совпадают с ориентированными разрезами: $\delta'_S = \delta'_{S, \overline{S}}$. Однако в отличие от симметричного случая не каждый ориентированный мультиразрез (даже в простейшем случае $n = 3$) можно представить в виде линейной комбинации ориентированных разрезов.

Число всех ориентированных мультиразрезов на n точках представляет собой *число Фубини* (упорядоченное число Белла) $p'(n)$, т.е. число всех упорядоченных разбиений множества $\{1, \dots, n\}$; для перестановки $\pi = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Sym}(n)$ оно равно $\sum_{\pi \in \text{Sym}(n)} 2^{D(\pi)}$, где $D(\pi) := |\{i \leq n : a_i > a_{i+1}\}|$.

m -Полуметрика разбиений — это многомерный аналог двумерного мультиразреза.

m -Полуметрикой разбиений для $(m+1)$ -разбиения $S_1, \dots, S_{m+1}$ множества $\{1, \dots, n\}$, называется функция $\alpha_{S_1, \dots, S_{m+1}}: \{1, \dots, n\}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\alpha_{S_1, \dots, S_{m+1}}(i_1, \dots, i_{m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i_1 \in S_{\alpha_1}, \dots, i_{m+1} \in S_{\alpha_{m+1}}, \alpha_k \neq \alpha_t \text{ для } k \neq t, \\ 0, & \text{если } i_k, i_t \in S_{\alpha} \text{ для некоторого } k \neq t, 1 \leq \alpha \leq m+1. \end{cases}$$

Другими словами, величина $\alpha_{S_1, \dots, S_{m+1}}(i_1, \dots, i_{m+1})$ равна 1, если для всех $1 \leq j < l \leq m+1$ элементы i_j и i_l принадлежат разным подмножествам разбиения, и равна 0 во всех остальных случаях. Легко видеть, что $\alpha_{S_1, \dots, S_{m+1}}$ является m -полуметрикой (не m -метрикой!), и что для $m = 1$ она превращается в обычный разрез (см., например, [8]).

5. Конусы обобщенных дискретных метрических структур. Центральным разделом теории конечных полуметрик являются задачи комбинаторной оптимизации, решаемые полиэдральным методом, ведущим к построению соответствующих конусов и многогранников.

В данной работе мы ограничимся построением лишь конусов соответствующих конечных полуметрик и их ориентированных и многомерных аналогов. Однако исследование многогранников может быть проведено по той же схеме (см. [5]).

Метрическим конусом на n точках MET_n называется множество всех полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Разрезным конусом (или *конусом разрезов*) на n точках CUT_n называется коническая оболочка (множество всех линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами) всех $2^{n-1} - 1$ ненулевых разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Следует заметить, что разрезный конус CUT_n представляет собой множество n -точечных l_1 -полуметрик, т.е. полуметрик, изометрически вложимых в пространство $l_1 = (\mathbb{R}^m, \|x - y\|_1)$ с l_1 -нормой

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^m |z_i|.$$

В пространстве меры величине $\|x - y\|_1$ соответствует $\mu(A \Delta B)$, где A, B — множества, представляющие x и y (см. [8]).

Конусы MET_n и CUT_n представляют собой полноразмерные конусы в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Поскольку любой разрез является полуметрикой, то выполняется очевидное включение $CUT_n \subseteq MET_n$ с равенством лишь для $n = 3, 4$. Поскольку любой мультиразрез представляет собой неотрицательную линейную комбинацию разрезов, то говорить о конусе мультиразрезов смысла не имеет: коническая оболочка множества мультиразрезов является частью конуса CUT_n .

Полная группа симметрий конусов CUT_n и MET_n представляет собой группу $\text{Sym}(n)$ для $n \neq 4$ и группу $\text{Sym}(4) \times \text{Sym}(3)$ для $n = 4$.

Квазиметрическим конусом на n точках $QMET_n$ называется множество всех квазиполуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Конусом ориентированных мультиразрезов на n точках $OMCUT_n$ называется коническая оболочка всех $p'(n) - 1$ ненулевых ориентированных мультиразрезов на $\{1, \dots, n\}$. Пользуясь формулой

$$\delta_{S_1, \dots, S_m} = \delta'_{S_1, \dots, S_m} + \delta'_{S_m, \dots, S_1},$$

мы получаем, что $CUT_n = \{q + q^T : q \in OMCUT_n\}$.

Конусом ориентированных разрезов на n точках $OCUT_n$ называется коническая оболочка всех $2^n - 2$ ненулевых ориентированных разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Поскольку в несимметричном случае ориентированный мультиразрез может и не быть линейной комбинацией ориентированных разрезов, то конусы $OMCUT_n$ и $OCUT_n$ не совпадают.

Конус $OCUT_n$ представляет собой множество всех n -точечных l_1 -квазиполуметрик, т.е. квазиполуметрик, вложимых в квазиметрическое пространство $(\mathbb{R}^m, \|x - y\|_{or,1})$ с *ориентированной* l_1 -нормой

$$\|z\|_{or,1} = \sum_{i=1}^m \max(z_i, 0).$$

На пространстве меры величине $\|x - y\|_{or,1}$ соответствует $\mu(B \setminus A)$, где множества B, A представляют x, y (см. [1, 6]).

Конусы $QMET_n$ и $OMCUT_n$ являются полномерными конусами в пространстве $\mathbb{R}^{n(n-1)}$.

Кроме очевидных строгих включений $OCUT_n \subset OMCUT_n$, мы имеем, с равенством только для $n = 3$, включения $OMCUT_n \subseteq QMET_n$.

В [7] показано, что конус $OCUT_n$ (определенный на множестве $\{1, \dots, n\}$) есть проекция конуса CUT_{n+1} (определенного на $\{0, 1, \dots, n\}$), на подпространство, ортогональное к $\delta_{\{0\}}$.

Экстремальные лучи конуса $QMET_n$ исследовались в [6], где было доказано, что они не являются симметричными и имеют по меньшей мере $n - 1$ нулей, т.е. не могут быть расстояниями на ориентированном графе. Ориентированные мультиразрезы соответствуют экстремальным лучам конуса $QMET_n$. Кроме того, расщепление экстремального луча вновь дает экстремальный луч.

В [6] была представлена и таблица несмежности гиперграней конуса $QMET_n$; было сделано предположение о том, что во всех остальных случаях гиперграни смежны, откуда следует, что диаметр скелетона дуального конуса $QMET_n^*$ равен 2. Диаметр скелетона $QMET_n$ равен 3 для $n = 4, 5$.

Существует предположение, что диаметры $OCUT_n$ и $OMCUT_n$ равны 1 и 2, соответственно. Более того, если $f \geq 0$ определяет гипергрань $OMCUT_n$, то нулевое расширение f в $OMCUT_{n+1}$ останется гипергранью, как и в классическом случае конуса разрезов CUT_n .

Группа $\text{Sym}(n)$ всех перестановок на n точках является группой симметрий конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$. Но существует и другая симметрия, называемая *реверселем*. Для осуществления операции реверселя нужно поставить в соответствие каждому лучу q луч q^T , определенный как $q_{ij}^T = q_{ji}$. (Другими словами, в матричных терминах реверсель соответствует транспонированию матриц.) Из этого факта следует, что группа $Z_2 \times \text{Sym}(n)$ также является группой симметрий для конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$. Мы предполагаем, что это их полная группа симметрий. Для конуса $OCUT_n$ этот факт доказан в [6].

Конусом m -полуметрик $HMET_n^m$ называется множество всех m -полуметрик на n точках.

Конусом m -полуметрик разбиений $HCUT_n^m$ называется коническая оболочка всех m -полуметрик разбиений на n точках.

Конусы $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$ являются полномерными конусами в пространстве $\mathbb{R}_n^{E^{m+1}}$.

Поскольку каждая m -полуметрика разбиений является m -полуметрикой, получаем, что

$$HCUT_n^m \subseteq HMET_n^m \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^{E_n^{m+1}}.$$

Очевидно, что все грани конусов $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$ сохраняются при любой перестановке вершин. Из этого следует, что любая такая перестановка порождает симметрию конусов $HMET_n^m$ и $HCUT_n^m$, т.е. группа $\text{Sym}(n)$ является группой симметрий указанных двух конусов. Применяя компьютерные подсчеты, мы проверили, что $\text{Sym}(n)$ является полной группой симметрий для исследуемых конусов.

6. Таблица параметров рассматриваемых конусов. В таблице 1 представлена информация обо всех конусах, перечисленных выше, на малом числе вершин. Для каждого конуса мы приводим его размерность, число экстремальных лучей и число их орбит, число его максимальных граней и число их орбит, наконец, диаметры 1-скелетон-графа и ридж-графа.

7. Заключение. Помимо рассмотренных в статье несимметричных и многомерных аналогов классического симметричного случая метрик, разрезов, мультиразрезов и других родственных конструкций, интерес представляют их специальные частные случаи: взвешиваемые квазиметрики, частичные метрики, m -суперметрики и др. Построение и исследование соответствующих конусов и многогранников на малом числе точек можно провести по той же схеме (см. [3, 4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charikar M., Makarychev K., Makarychev V. Directed metrics and directed graph partitioning problem// in: Proc. 11 ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, 2006. — P. 51–60.
2. Deza M. M., Deza E. I. Encyclopedia of Distances. — Berlin: Springer-Verlag, 2014.
3. Deza M. M., Deza E. I. Cones of partial metrics// Contrib. Discr. Math. — 2011. — 6, № 1. — P. 26–47.
4. Deza M. M., Deza E. I., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics// in: Proc. Int. Conf. on Algebra. — New Jersey: World Scientific, 2010. — P. 177–197.
5. Deza M. M., Dutour M., Deza E. I. Generalizations of Finite Metrics and Cuts. — World Scientific, 2016.

Конус	Размерность	# экстр. лучей (орбит)	# макс. граней (орбит)	Диаметры
$CUT_3=MET_3$	3	3(1)	3(1)	1; 1
$CUT_4=MET_4$	6	7(2)	12(1)	1; 2
CUT_5	10	15(2)	40(2)	1; 2
MET_5	10	25(3)	30(1)	2; 2
CUT_6	15	31(3)	210(4)	1; 3
MET_6	15	296(7)	60(1)	2; 2
CUT_7	21	63(3)	38780(36)	1; 3
MET_7	21	55226(46)	105(1)	3; 2
CUT_8	28	127(4)	49604520(2169)	1; ?
MET_8	28	119269588(3918)	168(1)	?; 2
$OMCUT_3=QMET_3$	6	12(2)	12(2)	2; 2
$OMCUT_4$	12	74(5)	72(4)	2; 2
$QMET_4$	12	164(10)	36(2)	3; 2
$OMCUT_5$	20	540(9)	35320(194)	2; 3
$QMET_5$	20	43590(229)	80(2)	3; 2
$OMCUT_6$	30	4682(19)	$\geq 217847040(\geq 163822)$	2; ?
$QMET_6$	30	$\geq 182403032(\geq 127779)$	150(2)	?; 2
$HCUT_5^2$	10	25(2)	120(4)	2; 3
$HMET_5^2$	10	37(3)	30(2)	2; 2
$HCUT_6^3$	15	65(2)	4065(16)	2; 3
$HMET_6^3$	15	287(5)	45(2)	3; 2
$HCUT_7^4$	21	140(2)	474390(153)	2; 3
$HMET_7^4$	21	3692(8)	63(2)	3; 2
$HCUT_8^5$	28	266(2)	$\geq 409893148(\geq 11274)$	2; ?
$HMET_8^5$	28	55898(13)	84(2)	3; 2
$HMET_9^6$	36	864174(20)	108(2)	?; 2
$HCUT_6^2$	20	90(3)	2095154(3086)	2; ?
$HMET_6^2$	20	12492(41)	80(2)	3; 2
$HMET_7^2$	35	$\geq 454191608(\geq 91836)$	175(2)	?; 2
$HMET_7^3$	35	$\geq 551467967(\geq 110782)$	140(2)	?; 2

Таблица 1. Параметры конусов на n точках для малых n

- Deza M. M., Dutour M., Panteleeva E. I. Small cones of oriented semi-metrics// Am. J. Math. Management Sci. — 2002. — 22, № 3-4. — P. 199–225.
- Deza M. M., Grishukhin V. P., Deza E. I. Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts// in: Mathematics of Distances and Applications. — Sofia: ITEA, 2012. — P. 31–53.
- Deza M. M., Laurent M. Geometry of Cuts and Metrics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- Deza M. M., Panteleeva E. I. Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra// Eur. J. Combin. — 2000. — 21, № 6. — P. 777–795.
- Deza M. M., Rosenberg I. G. n -Semimetrics// Eur. J. Combin. — 2000. — 21, № 6. — P. 797–806.
- Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1906. — 22. — P. 1–74.
- Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. — Leipzig, 1914.
- Matthews S. G. Partial metric topology// Ann. New York Acad. Sci. — 1994. — 728. — P. 183–197.
- Seda A. K. Quasi-metrics and the semantic of logic programs// Fundam. Inform. — 1997. — 29. — P. 97–117.
- Wilson W. A. On quasi-metric spaces// Am. J. Math. — 1931. — 53. — P. 575–681.

Деза Елена Ивановна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: elena.deza@gmail.com