Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова, Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 41–53

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-41-53>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:43:28

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 41–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-41-53

УДК 514.765

УРАВНЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА НА ТРЕХМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ С ВЕКТОРНЫМ КРУЧЕНИЕМ

© 2020 г. П. Н. КЛЕПИКОВ, Е. Д. РОДИОНОВ, О. П. ХРОМОВА

Аннотация. В данной работе исследуется уравнение Эйнштейна на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и метрической связностью с левоинвариантным векторным кручением. Получена теорема о том, что все такие группы Ли либо являются многообразиями Эйнштейна относительно связности Леви-Чивиты, либо являются конформно плоскими.

Ключевые слова: алгебра Ли, группа Ли, векторное кручение, левоинвариантная (псевдо)риманова метрика, многообразие Эйнштейна.

EINSTEIN'S EQUATION ON THREE-DIMENSIONAL METRIC LIE GROUPS WITH VECTOR TORSION

© 2020 P. N. KLEPIKOV, E. D. RODIONOV, O. P. KHROMOVA

ABSTRACT. In this paper, we study the Einstein equation on three-dimensional Lie groups equipped with a left-invariant (pseudo) Riemannian metric and a metric connection with left-invariant vector torsion. We prove that all such Lie groups are either Einstein manifolds with respect to the Levi-Civita connection or conformally flat manifolds.

Keywords and phrases: Lie algebra, Lie group, vector torsion, left-invariant (pseudo) Riemannian metric, Einstein manifold.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30, 53C50

1. Введение и основные результаты. Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X, \quad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в [7], и называется метрической связностью с векторным кручением или полусимметрической связностью (с точностью до направления).

Данная связность играет важную роль в случае двумерных поверхностей, так как в этом случае любая метрическая связность является связностью с векторным кручением (см. [7]). В [3, 4, 12, 13, 15, 16] изучаются различные аспекты метрических связностей с векторным кручением.

Важная теорема о связи конформных деформаций и метрических связностей с векторным кручением была доказана К. Яно (см. [14]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00033 мол_а).

Теорема 1. *Риманово многообразие допускает метрическую связность с векторным кручением, тензор кривизны которой равен нулю, тогда и только тогда, когда оно является конформно плоским относительно связности Леви-Чивиты.*

Данная теорема также обобщается и на случай псевдоримановой метрики, так как доказательство не использует положительную определенность метрического тензора.

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна следующая теорема.

Теорема 2 (см. [5, 10]). *Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с метрической связностью с векторным кручением. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π , определенная равенством $\pi(X) = g(X, V)$ для любого векторного поля X на M , замкнута, т.е. $d\pi = 0$.*

В случае (псевдо)римановых многообразий со связностью Леви-Чивиты достаточно известны многообразия постоянной кривизны Риччи или многообразия Эйнштейна (см., например, известный обзор [1]). Они допускают несколько обобщений на случай многообразий с метрической связностью с векторным кручением (см. [8]). Будем использовать следующее определение.

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) с метрической связностью с векторным кручением будем называть многообразием Эйнштейна, если тензор Риччи удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$r = \Lambda g \tag{2}$$

для некоторой скалярной функции Λ .

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Если для трехмерной метрической группы Ли с метрической связностью с левоинвариантным векторным кручением выполняется уравнение Эйнштейна, то либо векторное поле V тривиально, либо тензор кривизны равен нулю.*

Так как условие тривиальности векторного поля V равносильно тому, что данная связность является связностью Леви-Чивиты в силу (1), а условие тривиальности тензора кривизны по теореме 1 эквивалентно тому, что группа конформно плоская, то немедленным следствием теоремы 3 является следующее утверждение.

Теорема 4. *Если трехмерная метрическая группа Ли допускает такую метрическую связность с левоинвариантным векторным кручением, что выполняется уравнение Эйнштейна, то она либо является многообразием Эйнштейна относительно связности Леви-Чивиты, либо является конформно плоской относительно связности Леви-Чивиты.*

2. Предварительные сведения. Пусть (G, g) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой. Зафиксируем некоторое левоинвариантное векторное поле V , с помощью которого определим на G метрическую связность ∇ с векторным кручением. Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r .

Отметим, что в трехмерном случае равенство нулю тензора кривизны R равносильно обращению в нуль тензора Риччи r в силу того, что в размерности 3 тензор Вейля всегда равен нулю как для связности Леви-Чивиты, так и для метрической связности с векторным кручением (см. [8]). Таким образом, для трехмерного многообразия Эйнштейна равенство нулю тензора кривизны эквивалентно условию $\Lambda = 0$.

В дальнейшем под «метрической группой Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ » мы будем понимать группу Ли G с метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и метрической связностью с векторным кручением, которую порождает левоинвариантное векторное поле $V \in \mathfrak{g}$.

Докажем следующую лемму, которая будет полезна для упрощения выкладок.

Лемма 1. Если метрическая группа Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то в некотором базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполняется соотношение

$$V^i g_{ij} C_{kt}^j = 0; \quad (3)$$

в инвариантной форме

$$g(V, [X, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

где C_{kt}^j — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые разложением $[e_k, e_t] = C_{kt}^j e_j$.

Доказательство. Если $(G, \mathfrak{g}, V)$ — многообразие Эйнштейна, то в силу (2) тензор Риччи должен быть симметричен. Тогда по теореме 2 необходимо $d\pi = 0$, т.е. для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{g}$ выполняется равенство

$$2d\pi(X, Y) = X\pi(Y) - Y\pi(X) - \pi([X, Y]) = -2\pi([X, Y]) = -2g([X, Y], V) = 0.$$

Фиксируя некоторый базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, из данного равенства получаем (3). $\square$

Следующая классификация для трехмерных римановых групп Ли была получена в [11].

Теорема 5. Пусть G — трехмерная группа Ли с левинвариантной римановой метрикой. Справедливы следующие утверждения.

1. Если G унимодулярна, то в ее алгебре Ли $\mathcal{U}$ существует такой ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, что метрическая алгебра Ли группы G имеет следующий вид:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1.$$

2. Если G не является унимодулярной, то в ее алгебре Ли $\mathcal{NI}$ существует такой ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, что метрическая алгебра Ли группы G имеет следующий вид:

$$[e_1, e_2] = (2 - \alpha_2)e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Классификация трехмерных лоренцевых групп Ли была получена в [2, 6, 9].

Теорема 6. Пусть G — трехмерная группа Ли с левинвариантной лоренцевой метрикой. Справедливы следующие утверждения.

1. Если G унимодулярна, то в ее алгебре Ли существует такой псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

(a) случай $\mathcal{A}_1$:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

где e_1 времениподобен;

(b) случай $\mathcal{A}_2$:

$$[e_1, e_2] = (1 - \alpha_2)e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \alpha_2)e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

где e_3 времениподобен;

(c) случай $\mathcal{A}_3$:

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

где e_3 времениподобен;

(d) случай $\mathcal{A}_4$:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

где e_1 времениподобен и $\alpha_2 \neq 0$.

2. Если G не является унимодулярной, то в ее алгебре Ли существует такой псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

(a) случай $\mathcal{A}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_1 \sin \alpha_3 e_1 - \alpha_2 \cos \alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 \cos \alpha_3 e_1 + \alpha_2 \sin \alpha_3 e_2,$$

где e_3 времениподобен, $\sin \alpha_3 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$;

(b) *случай В*:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 - \alpha_4 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

где $\langle e_2, e_2 \rangle = -\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

(c) *случай C₁*:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

где e_2 временноподобен и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

(d) *случай C₂*:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_2 e_1 - \alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

где e_2 временноподобен, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$.

Доказательство теоремы 3 разобьем на два случая. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой рассмотрим в следующем разделе, а трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой — в разделе 4. Для оптимизации вычислений будем использовать системы компьютерной математики.

3. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и векторным кручением. В данном разделе для доказательства теоремы 3 мы последовательно рассмотрим все трехмерные метрические алгебры Ли из теоремы 5 и покажем, что уравнение Эйнштейна (2) на них имеет решение только в случаях, когда если либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

3.1. *Случай U.* В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1 \alpha_1 = 0, \quad V^2 \alpha_2 = 0, \quad V^3 \alpha_3 = 0.$$

Если при этом метрическая группа Ли $(G, \mathcal{U}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, 0)$;
- (ii) $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
- (iii) $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;
- (iv) $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;
- (v) $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$;
- (vi) $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$;
- (vii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$;
- (viii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

В силу переобозначения базисных векторов интерес представляют только случаи (i), (ii), (v) и (viii). В случае (i) вектор V тривиален.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V^1 \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_3 V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2} \alpha_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_3^2 - (V^1)^2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{1}{2} \alpha_2^2 + \alpha_3 \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 - (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2 V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2} \alpha_3^2 - (V^1)^2 &= 0, \\ -\frac{1}{2} \alpha_3 V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2} \alpha_3^2 - (V^2)^2 &= 0, \\ \frac{1}{2} V^2 \alpha_3 &= 0, & -\Lambda - (V^2)^2 + \frac{1}{2} \alpha_3^2 - (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2 V^1 &= 0, & -(V^1)^2 - (V^2)^2 - \Lambda &= 0, \\ V^3 V^1 &= 0, & -(V^1)^2 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0, \\ V^3 V^2 &= 0, & -(V^2)^2 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

3.2. *Случай $\mathcal{NU}$* . В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^2(-2 + \alpha_2) - V^3\alpha_3 = 0, \quad -\alpha_1 V^2 - \alpha_2 V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{NU}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (V^1, 0, 0)$;
- (ii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$;
- (iii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = -(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3/(V^2)^2, \alpha_2 = (\alpha_3 V^3 + 2V^2)/V^2$.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha_1 V^1 - 2\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 V^1 - \alpha_3 \alpha_2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \alpha_2 V^1 - (V^1)^2 - 2\alpha_2 - 2V^1 &= 0, \\ -\Lambda - 4 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_2 - 2V^1 - \alpha_3 \alpha_1 &= 0, \\ -\Lambda - 4 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_2 V^1 + 2\alpha_2 - 4V^1 - (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{aligned} \Lambda &= 0, & \alpha_1 &= \alpha_3, & \alpha_2 &= 1 + \sqrt{1 - \alpha_3^2}, & V^1 &= -2; \\ \Lambda &= 0, & \alpha_1 &= \alpha_3, & \alpha_2 &= 1 - \sqrt{1 - \alpha_3^2}, & V^1 &= -2; \\ \Lambda &= 0, & \alpha_1 &= -\alpha_3, & \alpha_2 &= 1, & V^1 &= -1; \\ \Lambda &= -2, & \alpha_1 &= -\alpha_3, & \alpha_2 &= 1, & V^1 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^3 V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^1)^2 - 2V^1 &= 0, \\ \frac{1}{2}V^3 \alpha_1 &= 0, & -\Lambda - (V^3)^2 - 4 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - 2V^1 &= 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha_1 V^1 - 2\alpha_1 &= 0, & -\Lambda - (V^3)^2 - 4 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - 4V^1 - (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = -(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3/(V^2)^2, \alpha_2 = (\alpha_3 V^3 + 2V^2)/V^2$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2 V^1 - \frac{(V^3)^2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{2(V^2)^2} - \frac{1}{2}V^3 \alpha_3 &= 0, & V^3 V^1 + \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3}{2V^2} + \frac{1}{2}V^2 \alpha_3 &= 0, \\ V^3 V^2 + \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3 V^1}{2(V^2)^2} + \frac{2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2} - \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2 V^3}{(V^2)^3} - \\ & - \frac{1}{2}\alpha_3 V^1 - \frac{\alpha_3(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{V^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Lambda - (V^2)^2 - \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2 (V^3)^2}{2(V^2)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^1}{V^2} - (V^1)^2 - \\
& \quad - \frac{2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{V^2} - 2V^1 = 0, \\
& -\Lambda - (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2 (V^3)^2}{2(V^2)^4} + \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^1}{V^2} + \frac{2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{V^2} - \\
& \quad - 4V^1 - 4 - (V^1)^2 = 0, \\
& -\Lambda - (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2 (V^3)^2}{2(V^2)^4} - \frac{2(\alpha_3 V^3 + 2V^2)^2}{(V^2)^2} + \frac{4(\alpha_3 V^3 + 2V^2)}{V^2} - \\
& \quad - 2V^1 - 4 + \frac{\alpha_3(\alpha_3 V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2} - (V^2)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что сумма первого уравнения системы, домноженного на V^2 , и второго уравнения системы, домноженного на V^3 , дает $V^1((V^2)^2 + (V^3)^2) = 0$. Это влечет $V^1 = 0$ и упрощает данную систему уравнений до вида

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= -\frac{2V^2V^3}{(V^2)^2 + (V^3)^2}, \quad ((V^2)^2 + (V^3)^2 + 4)V^2V^3 = 0, \quad -2\Lambda = (V^2)^2 + (V^3)^2 + 4, \\
& ((V^2)^2 + (V^3)^2 + 4)((V^2)^2 - (V^3)^2) = 0, \quad (V^2)^2 + (V^3)^2 + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что данная система решений не имеет.

4. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и векторным кручением. В данном разделе для доказательства теоремы 3 мы последовательно рассмотрим все трехмерные метрические алгебры Ли из теоремы 6 и покажем, что уравнение Эйнштейна (2) на них имеет решение только в случаях, когда либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

4.1. Случай $\mathcal{A}_1$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1\alpha_1 = 0, \quad V^2\alpha_2 = 0, \quad V^3\alpha_3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}_1, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, 0)$;
- (ii) $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
- (iii) $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;
- (iv) $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;
- (v) $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$;
- (vi) $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$;
- (vii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$;
- (viii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

В случае (i) вектор V тривиален.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}
V^1\alpha_2 - \alpha_3V^1 &= 0, & -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0, \\
-\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0, & \Lambda - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 V^2 + V^2 \alpha_3 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - (V^2)^2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + \alpha_3 \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_3^2 &= 0, & \Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\alpha_1 V^3 - V^3 \alpha_2 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - (V^3)^2 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_2^2 &= 0, & \Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + (V^3)^2 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \alpha_3 V^1 &= 0, & \frac{1}{2} V^2 \alpha_3 &= 0, \\ -V^2 V^1 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0, \\ \Lambda - \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^2)^2 &= 0, & -\Lambda - (V^2)^2 - \frac{1}{2} \alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^3 V^2 &= 0, & \frac{1}{2} \alpha_1 V^2 &= 0, \\ -\frac{1}{2} \alpha_1 V^3 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - (V^2)^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 - (V^3)^2 &= 0, & \Lambda + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + (V^3)^2 + (V^2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V^1 \alpha_2 &= 0, & -\frac{1}{2} V^3 \alpha_2 &= 0, \\ -V^3 V^1 &= 0, & -\Lambda + \frac{1}{2} \alpha_2^2 + (V^1)^2 &= 0, \\ \Lambda + (V^3)^2 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 &= 0, & -\Lambda - (V^3)^2 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 + (V^1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^3 V^2 &= 0, & -V^2 V^1 &= 0, \\ -V^3 V^1 &= 0, & (V^1)^2 - (V^2)^2 - \Lambda &= 0, \\ (V^1)^2 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0, & (V^2)^2 + (V^3)^2 + \Lambda &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.2. *Случай $\mathcal{A}_2$.* В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1 \alpha_1 = 0, \quad V^2 - V^3(\alpha_2 - 1) = 0, \quad V^2(1 + \alpha_2) + V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}_2, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, 0)$;
- (ii) $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
- (iii) $V = (0, V^2, -V^2)$ и $\alpha_2 = 0$;

(iv) $V = (V^1, V^2, -V^2)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

В случае (i) вектор V тривиален.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\Lambda &= 0, & -2\alpha_2 + V^1 &= 0, \\ -(V^1)^2 - \Lambda - 2\alpha_2 + V^1 &= 0, & (V^1)^2 + \Lambda - 2\alpha_2 + V^1 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, -V^2)$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V^2\alpha_1 &= 0, & -\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \Lambda &= 0, \\ -\Lambda + (V^2)^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1 &= 0, & \Lambda + (V^2)^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1 &= 0, \\ (V^2)^2 + \alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, -V^2)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2V^1 &= 0, & -\Lambda &= 0, \\ (V^2)^2 + V^1 &= 0, & -(V^1)^2 + (V^2)^2 - \Lambda + V^1 &= 0, \\ (V^1)^2 + (V^2)^2 + \Lambda + V^1 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.3. *Случай $\mathcal{A}_3$.* В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_1V^2 + V^1 = 0, \quad \alpha_1V^3 + V^1 = 0, \quad -\alpha_1V^1 - V^2 + V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}_3, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, 0)$;
- (ii) $V = (0, V^2, V^2)$ и $\alpha_1 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (0, V^2, V^2)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} V^2V^1 &= 0, & -\Lambda &= 0, \\ (V^2)^2 + V^1 &= 0, & -(V^1)^2 + (V^2)^2 - \Lambda + V^1 &= 0, \\ (V^1)^2 + (V^2)^2 + \Lambda + V^1 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.4. *Случай $\mathcal{A}_4$.* В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^3\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1V^2 - \alpha_2V^1 = 0, \quad \alpha_1V^1 + \alpha_2V^2 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}_4, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, 0)$;
- (ii) $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} 2\alpha_2\alpha_1 &= 0, & -2\alpha_2^2 - \Lambda &= 0, \\ \alpha_2V^3 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0, & \alpha_2V^3 + (V^3)^2 + \Lambda &= 0. \end{aligned}$$

Данная система решений не имеет.

4.5. *Случай $\mathcal{A}$.* В данном случае условие (3) имеет вид

$$\cos(\alpha_3)V^1\alpha_1 + \sin(\alpha_3)\alpha_2V^2 = 0, \quad \cos(\alpha_3)V^2\alpha_2 - \sin(\alpha_3)\alpha_1V^1 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{A}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, V^3)$;
- (ii) $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$;
- (iii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} & \alpha_1^2 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) - \alpha_2^2 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) \alpha_1 V^3 - \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) \alpha_2 V^3 = 0, \\ & \Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 + \alpha_2 \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1 + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 - \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 - \alpha_1^2 - \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 - \alpha_2^2 = 0, \\ & -\Lambda - \frac{3}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 - \alpha_2 \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1 + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 + 2 \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + \\ & \quad + (V^3)^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^2 = 0, \\ & -\Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 - \alpha_2 \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1 - \frac{3}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 + \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + 2 \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + \\ & \quad + (V^3)^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{array}{llll} \Lambda = 2 \sin(\alpha_3)^2 \alpha_1^2, & \alpha_2 = \alpha_1, & V^3 = 0; \\ \Lambda = 0, & \alpha_2 = \alpha_1, & V^3 = -\alpha_1 \sin(\alpha_3); \\ \Lambda = 0, & \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = \pm V^3, & \alpha_3 = \mp \frac{\pi}{2}; \\ \Lambda = 0, & \alpha_1 = \pm V^3, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = \mp \frac{\pi}{2}; \\ \Lambda = 0, & \alpha_1 = \pm V^3, & \alpha_2 = \pm V^3, & \alpha_3 = \mp \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} & -V^2V^3 = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_1 \cos(\alpha_3)V^2 = 0, \\ & \alpha_1^2 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) \alpha_1 V^3 = 0, \\ & -\Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 + \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + (V^3)^2 = 0, \\ & \Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 - \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + (V^2)^2 - \alpha_1^2 = 0, \\ & -\Lambda - \frac{3}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_1^2 + 2 \sin(\alpha_3) \alpha_1 V^3 + (V^3)^2 - (V^2)^2 + \alpha_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -V^1 V^3 &= 0, \quad \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) V^1 \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_2^2 \cos(\alpha_3) \sin(\alpha_3) - \frac{1}{2} \cos(\alpha_3) \alpha_2 V^3 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 + \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + (V^3)^2 &= 0, \\ \Lambda + \frac{1}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 - \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + (V^1)^2 - \alpha_2^2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{3}{2} \cos(\alpha_3)^2 \alpha_2^2 + 2 \sin(\alpha_3) \alpha_2 V^3 + (V^3)^2 - (V^1)^2 + \alpha_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.6. *Случай B.* В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_1 V^3 - \alpha_2 V^2 = 0, \quad \alpha_4 V^2 - \alpha_3 V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{B}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (V^1, 0, 0)$;
- (ii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 V^2 / V^3$, $\alpha_3 = -\alpha_4 V^2 / V^3$;
- (iii) $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \alpha_4^2 - \Lambda &= 0, \quad -\frac{1}{2} \alpha_4^2 + \Lambda = 0, \\ \alpha_2 \alpha_4 + \frac{1}{2} V^1 \alpha_4 &= 0, \quad \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2^2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 V^1 + (V^1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 V^2 / V^3$, $\alpha_3 = -\alpha_4 V^2 / V^3$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} (V^3)^2 &= 0, \quad -\frac{1}{2} (\alpha_4 + 2V^2) V^3 = 0, \quad \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_2 V^2 + \frac{1}{2} V^1 \alpha_4 - V^1 V^2 = 0, \\ \frac{\alpha_2 (V^2)^2}{V^3} - \alpha_2^2 - \frac{\alpha_4 V^2 V^1}{V^3} + (V^1)^2 &= 0, \quad -\Lambda + 2\alpha_2 V^3 - \alpha_4 V^2 + 2V^3 V^1 - \frac{1}{2} \alpha_4^2 = 0, \\ \Lambda - \frac{1}{2} \alpha_4^2 + (V^2)^2 + \frac{3}{2} \alpha_4 V^2 - \alpha_2 V^3 - V^3 V^1 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку предполагается, что в рассматриваемом случае $V^3 \neq 0$, то из первого уравнения системы заключаем, что данная система решений не имеет.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-\Lambda = 0, \quad -V^1 V^2 = 0, \quad (V^2)^2 + \Lambda = 0, \quad \alpha_1 V^2 + \alpha_3 V^1 + (V^1)^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.7. *Случай C₁.* В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_2 V^2 - \alpha_1 V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^2 + \alpha_3 V^1 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{C}_1, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, V^3)$;
- (ii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_3 V^1 / V^2$, $\alpha_2 = \alpha_3 (V^1)^2 / (V^2)^2$;
- (iii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 &= 0, & -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2V^3 - \alpha_3^2 + 2\alpha_3V^3 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0, \\ -\alpha_2^2 + \alpha_2V^3 - \alpha_3^2 + \alpha_3V^3 - \Lambda &= 0, & \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2V^3 - \alpha_3V^3 + (V^3)^2 + \Lambda &= 0.\end{aligned}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{aligned}\Lambda &= -2\alpha_3^2, & \alpha_2 &= \alpha_3, & V^3 &= 0; \\ \Lambda &= 0, & \alpha_2 &= V^3, & \alpha_3 &= V^3; \\ \Lambda &= 0, & \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= V^3, & \alpha_3 &= 0; \\ \Lambda &= 0, & \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 &= V^3; \\ \Lambda &= 0, & \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 &= 0, & V^3 &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_3V^1/V^2$, $\alpha_2 = \alpha_3(V^1)^2/(V^2)^2$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha_3(V^1)^2}{(V^2)^2} - V^3\right)V^2 &= 0, & -V^1(\alpha_3 - V^3) &= 0, & \frac{\alpha_3(V^1)^2}{V^2} - V^2V^3 &= 0, \\ \frac{\alpha_3^2(V^1)^3}{(V^2)^3} - \frac{\alpha_3^2V^1}{V^2} - V^2V^1 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{\alpha_3^2(V^1)^2}{(V^2)^2} + \frac{\alpha_3(V^1)^2V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3^2 + 2\alpha_3V^3 + (V^2)^2 - (V^3)^2 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{\alpha_3^2(V^1)^4}{(V^2)^4} + \frac{\alpha_3(V^1)^2V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3^2 + \alpha_3V^3 - (V^1)^2 + (V^2)^2 &= 0, \\ \Lambda + \frac{\alpha_3^2(V^1)^4}{(V^2)^4} + \frac{\alpha_3^2(V^1)^2}{(V^2)^2} - \frac{2\alpha_3(V^1)^2V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3V^3 + (V^1)^2 + (V^3)^2 &= 0, \\ -\alpha_3V^1 + V^1V^3 &= 0.\end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}V^1V^3 &= 0, & \alpha_2V^3 - (V^3)^2 - \Lambda &= 0, & -\alpha_2^2 + \alpha_2V^3 - (V^1)^2 - \Lambda &= 0, \\ \alpha_2^2 - 2\alpha_2V^3 + (V^1)^2 + (V^3)^2 + \Lambda &= 0.\end{aligned}$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.8. *Случай $\mathcal{C}_2$.* В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_2V^2 - \alpha_1V^1 = 0, \quad \alpha_2V^1 + \alpha_3V^2 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathcal{C}_2, V)$ является многообразием Эйнштейна, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, V^3)$;
- (ii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = -\alpha_3(V^2)^2/(V^1)^2$, $\alpha_2 = -\alpha_3V^2/V^1$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}-\alpha_2\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{2}V^3\alpha_1 + \frac{1}{2}V^3\alpha_3 &= 0, \\ -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - 2\alpha_2^2 + 3\alpha_2V^3 - (V^3)^2 &= 0, \\ -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - 2\alpha_2^2 + 2\alpha_2V^3 + \alpha_1\alpha_3 &= 0, \\ \Lambda + 2\alpha_2^2 - 3\alpha_2V^3 + (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 &= 0.\end{aligned}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{aligned}\Lambda &= 0, & \alpha_2 &= V^3, & \alpha_3 &= -\alpha_1; \\ \Lambda &= -2\alpha_2^2, & \alpha_3 &= -\alpha_1, & V^3 &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = -\alpha_3(V^2)^2/(V^1)^2$, $\alpha_2 = -\alpha_3 V^2/V^1$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned}-V^2 V^3 - \frac{\alpha_3(V^2)^2}{2V^1} - \frac{1}{2}V^1 \alpha_3 &= 0, & \frac{\alpha_3(V^2)^3}{2(V^1)^2} + \frac{1}{2}V^2 \alpha_3 + V^1 V^3 &= 0, \\ -V^2 V^1 - \frac{\alpha_3^2(V^2)^3}{(V^1)^3} + \frac{\alpha_3^2 V^2}{V^1} - \frac{V^3 \alpha_3(V^2)^2}{2(V^1)^2} + \frac{1}{2}V^3 \alpha_3 &= 0, \\ -\Lambda + (V^2)^2 + \frac{\alpha_3^2(V^2)^4}{2(V^1)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{3\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} - \frac{2\alpha_3 V^2 V^3}{V^1} - (V^1)^2 &= 0, \\ -\Lambda - \alpha_3^2(V^2)^4 2(V^1)^4 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{2\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} - \frac{3\alpha_3 V^2 V^3}{V^1} - (V^3)^2 + (V^2)^2 &= 0, \\ \Lambda + \frac{2\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} + \frac{3\alpha_3 V^2 V^3}{V^1} + (V^3)^2 - \frac{\alpha_3^2(V^2)^4}{2(V^1)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Заметим, что сумма первого уравнения и второго, домноженного на V^2/V^1 , после домножения на знаменатель дает

$$\alpha_3((V^1)^4 - (V^2)^4) = 0.$$

Сумма пятого и шестого уравнений с последующей подстановкой $\alpha_3((V^1)^4 - (V^2)^4) = 0$ имеет вид

$$(V^1)^2 + (V^2)^2 = 0,$$

что противоречит условию $V^1 \neq 0$, а значит система решений не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М.: Мир, 1990.
2. Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства// Мат. тр. — 2006. — 9, № 1. — С. 130–168.
3. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion// Differ. Geom. Appl. — 2016. — 46. — P. 130–147.
4. Agricola I., Thier C. The geodesics of metric connections with vectorial torsion// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2004. — 26. — P. 321–332.
5. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold// Indian J. Pure Appl. Math. — 1985. — 16, № 7. — P. 736–740.
6. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds// J. Geom. Phys. — 2007. — 57. — P. 1279–1291.
7. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)// Ann. Ecole Norm. Super. — 1925. — 42. — P. 17–88.
8. Chaturvedi B. B., Gupta B. K. Study on semi-symmetric metric spaces// Novi Sad J. Math. — 2014. — 44, № 2. — P. 183–194.
9. Cordero L. A., Parker P. E. Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups// Rend. Mat. — 1997. — 17. — P. 129–155.
10. De U. C., De B. K. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold// Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. — 1995. — 54. — P. 111–117.
11. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups// Adv. Math. — 1976. — 21. — P. 293–329.
12. Muniraja G. Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem// Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2008. — 3, № 25. — P. 1223–1232.
13. Murathan C., Özgür C. Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions// Proc. Eston. Acad. Sci. — 2008. — 57, № 4. — P. 210–216.
14. Yano K. On semi-symmetric metric connection// Rev. Roum. Math. Pure Appl. — 1970. — 15. — P. 1579–1586.

15. *Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., Uysal. S. A.* On a semi-symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold// Eur. J. Pure Appl. Math. — 2011. — 4, № 2. — P. 152–161.
16. *Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal. S. A., Yilmaz H. B.* Some vector fields on a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection// Bull. Iran. Math. Soc. — 2012. — 38, № 2. — P. 479–490.

Клепиков Павел Николаевич

Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: klepikov.math@gmail.com

Родионов Евгений Дмитриевич

Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: edr2002@mail.ru

Хромова Олеся Павловна

Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: khromova.olesya@gmail.com