Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Климентов, Стохастический признак минимальной поверхности, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 54–58

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-54-58>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:57:57

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2020 г. Д. С. КЛИМЕНТОВ

Аннотация. Получен стохастический признак минимальной поверхности на языке переходных плотностей случайных процессов, порожденных основными формами поверхности.

Ключевые слова: переходная плотность случайного процесса, уравнение теплопроводности, средняя кривизна.

A STOCHASTIC CONDITION FOR MINIMAL SURFACES

© 2020 D. S. KLIMENTOV

ABSTRACT. In this paper, we obtain a stochastic criterion for a minimal surface in terms of transition densities of random processes generated by the fundamental forms of the surface.

Keywords and phrases: transition density of a random process, heat equation, mean curvature.

AMS Subject Classification: 53A05, 60J25

1. Введение. В [4, 5] был получен стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной (см. [4]) и ненулевой средней (см. [5]) кривизны. Целью настоящей работы является вывод стохастического признака минимальной поверхности (т.е. поверхности с нулевой средней кривизной) с использованием техники, развитой в указанных работах. Предполагается, что читатель знаком с понятием случайного процесса, строго марковского процесса и основными понятиями теории поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве.

2. Некоторые определения из теории случайных процессов. Мы придерживаемся обозначений из [3]. Более подробные сведения по излагаемым в этом пункте вопросам можно найти в [1, 3].

Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Рассмотрим многообразие (фазовое пространство) $(E, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — σ -поле борелевских множеств на E . Подробное определение случайного процесса на многообразии можно найти в [1].

Введем необходимые в дальнейшем обозначения.

Определение 1 (см. [3, с. 74]). Функция $P(t, x, \Gamma)$ ($t > 0$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$) называется переходной функцией, если выполнены следующие условия:

- (i) при фиксированных t и x функция $P(t, x, \Gamma)$ является мерой на σ -алгебре $\mathfrak{B}$;
- (ii) при фиксированных t и Γ $P(t, x, \Gamma)$ является $\mathfrak{B}$ -измеримой функцией точки x ;
- (iii) $P(t, x, \Gamma) \leq 1$;
- (iv) $P(0, x, E \setminus x) = 0$;
- (v) $P(s + t, x, \Gamma) = \int_E P(s, x, dy) P(t, y, \Gamma)$.

Пусть μ — некоторая мера в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$.

Определение 2 (см. [3, с. 75]). Функция $p(t, x, y)$ ($t > 0$, $x, y \in E$) называется переходной плотностью, если выполнены следующие условия:

- (i) $p(t, x, y) \geq 0$;
- (ii) при фиксированном t функция $p(t, x, y)$ является $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ -измеримой функцией от (x, y) ;
- (iii) $\int_E p(t, x, y) \mu(dy) \leq 1$;
- (iv) $p(s + t, x, z) = \int_E p(s, x, y) p(t, y, z) \mu(dy)$.

Легко проверить [3, с. 75], что если $p(t, x, y)$ — переходная плотность, то формула

$$P(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \int_{\Gamma} p(t, x, y) dy, & t > 0, \\ \chi_{\Gamma}, & t = 0, \end{cases}$$

определяет переходную функцию.

Со всякой переходной функцией связана сжимающая полугруппа (см. [3, с. 80]):

$$T_t f(x) = \int_E P(t, x, dy) f(y),$$

где $f \in B$, B — совокупность всех ограниченных измеримых функций с естественными линейными операциями и нормой $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Определение 3. (см. [3, с. 214]) *Инфинитезимальным оператором* полугруппы T_t (переходной функции $P(t, x, \Gamma)$) будем называть оператор A , действующий по правилу

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t},$$

причем область определения оператора A состоит из тех функций f , для которых предел в правой части существует.

Если на фазовом пространстве введена структура гладкого многообразия, то инфинитезимальный оператор, суженный на дважды непрерывно дифференцируемые функции, называется *генератором* (случайного процесса) и в локальных координатах (x^i) имеет вид

$$Af(x) = a^{ij} \partial_i \partial_j f(x) + b^i \partial_i f(x) - Cf(x),$$

где $\partial_i = \partial / \partial x^i$, a^{ij} — положительно определенная матрица.

Переходная плотность связана с генератором случайного процесса обратным уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Ap$$

(см. [3, с. 238]), где оператор A — генератор случайного процесса, введенный выше.

В [3] показано, что со всяким марковским процессом однозначно связаны сжимающая полугруппа, переходная функция и инфинитезимальный оператор.

3. Основной результат. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве двумерную односвязную конформно эквивалентную кругу поверхность F класса C^3 , имеющую нулевую среднюю кривизну. Первую, вторую и третью квадратичные формы поверхности F будем обозначать

$$I = g_{ij} dx^i dx^j, \quad II = b_{ij} dx^i dx^j, \quad III = f_{ij} dx^i dx^j$$

соответственно, где x^1, x^2 — локальные координаты на поверхности. Не ограничивая общности, будем считать, что на F введены изотермические координаты (см. [2, с. 193]), в которых первая форма имеет вид

$$I = ds^2 = \lambda ((dx^1)^2 + (dx^2)^2).$$

Пусть на поверхности F заданы три случайных процесса X_t , Y_t и Z_t с генераторами $A_X = g^{ij}\partial_i\partial_j$, $A_Y = b^{ij}\partial_i\partial_j$ и $A_Z = f^{ij}\partial_i\partial_j$ соответственно. Переходные плотности этих процессов обозначим соответственно через $p^1(t, x, y)$, $p^2(t, x, y)$ и $p^3(t, x, y)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если переходные плотности p_1 и p_3 удовлетворяют соотношениям*

$$\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \leq 0, \quad \frac{\Delta p^3}{\partial_t p^3} = -\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \cdot \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1},$$

то поверхность является минимальной

4. Вспомогательные леммы.

Лемма 1 (см. [4]). *Гауссова кривизна K поверхности F и переходная плотность $p^1(t, x, y)$ связаны соотношением*

$$K = \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1},$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^{12}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{22}}, \quad x = (x^1, x^2).$$

Лемма 2. *Если средняя кривизна H поверхности F равна нулю, то ее первая и третья формы пропорциональны.*

Доказательство. Известно соотношение, связывающее три основные формы поверхности:

$$K \cdot I + H \cdot II + III = 0 \quad (1)$$

(см., например, [6, с. 232]). В изотермической системе координат это соотношение переписывается в виде $K \cdot I + III = 0$, т.е. коэффициенты первой и третьей формы пропорциональны. $\square$

Лемма 3. *Если средняя кривизна поверхности F отлична от нуля, коэффициенты первой и третьей формы пропорциональны, то F — сфера.*

Доказательство. Если средняя кривизна F отлична от нуля, то соотношение (1) можно переписать в виде

$$II = \frac{-K \cdot I - III}{H},$$

откуда видно, что коэффициенты второй и первой формы пропорциональны. Таким образом, на поверхности F первая и вторая формы одновременно приведены к изотермическому виду. Этот факт является характеристическим признаком сферы (см. [6, с. 212]). $\square$

Отметим, что если средняя кривизна поверхности F равна нулю, то ее гауссова кривизна неположительна. Отсюда и из предыдущих теорем непосредственно вытекает следующий факт.

Теорема 2. *Если гауссова кривизна поверхности F неположительна и первая и третья формы пропорциональны, то средняя кривизна поверхности F равна нулю.*

5. Доказательство основного результата. Для переходной плотности p^1 случайного процесса, порожденного первой квадратичной формой поверхности F , имеет место уравнение

$$\frac{\partial p^1}{\partial t} = \frac{1}{\lambda} \Delta p^1,$$

где λ — изотермический элемент поверхности. Аналогично для переходной плотности p^3 :

$$\frac{\partial p^3}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \Delta p^3,$$

где

$$\mu = -\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \cdot \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}$$

— коэффициент третьей основной формы поверхности. В самом деле, из соотношения

$$\frac{\Delta p^3}{\partial_t p^3} = -\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \cdot \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}$$

следует, что для переходной плотности p^3 имеет место обратное уравнение Колмогорова

$$\partial_t p^3 = \frac{1}{-\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \cdot \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}} \Delta p^3.$$

Из эквивалентности способов построения случайного процесса (см. [3, 7]) получаем, что третья форма поверхности имеет вид $\Pi = \mu((dx^1)^2 + (dx^2)^2)$. Отметим, что третья форма поверхности неотрицательна, и по ней можно построить случайный процесс (см. [7, с. 19]). Таким образом, первая и третья формы поверхности пропорциональны.

Согласно теореме 1 неравенство

$$\frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \leq 0$$

эквивалентно неположительности кривизны поверхности F . Справедливость основного результата очевидным образом получается из теоремы 2.

Отметим, что применяя результаты работы [5], можно получить более общий результат. Обозначим через P^3 производную по времени от переходной функции процесса Z_t в момент времени $t = 0$, порожденную переходной плотностью p^3 .

Теорема 3. Пусть переходная плотность p^1 процесса X_t и переходная функция P^3 процесса Z_t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}\right)^{-2} \times & \left[\frac{1}{4H^2} \left(\left(K \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} + \left(\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}\right)^2 \int P^3(t, x, dy) \frac{y_1^2}{2} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left(K \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} + \left(\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}\right)^2 \int P^3(t, x, dy) \frac{y_2^2}{2} \right) - \\ & \left. \left. - \left(K \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} + \left(\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}\right)^2 \int P^3(t, x, dy) y_1 y_2 \right)^2 \right) \right] = \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{\Delta p^1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\left(\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}\right)^2 \cdot \left(K \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} + \int P^3(t, x, dy) \frac{y_i y_j}{1 + \delta_{ij}} \right) \frac{1}{2H} \right] - \\ - \Gamma_{ik}^\alpha \left(\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}\right)^2 \cdot \left(K \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} + \int P^3(t, x, dy) \frac{y_\alpha y_j}{1 + \delta_{\alpha j}} \right) \frac{1}{2H} = \\ = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\left(\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}\right)^2 \cdot \left(K \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} + \int P^3(t, x, dy) \frac{y_i y_k}{1 + \delta_{ik}} \right) \frac{1}{2H} \right] - \\ - \Gamma_{ij}^\alpha \left(\frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1}\right)^2 \cdot \left(K \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} + \int P^3(t, x, dy) \frac{y_\alpha y_k}{1 + \delta_{\alpha k}} \right) \frac{1}{2H}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \frac{\delta^{lk} \partial_t p^1}{\Delta p^1} \left[\frac{\partial \left(\delta_{ik} \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} \right)}{\partial x^j} + \frac{\partial \left(\delta_{jk} \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} \right)}{\partial x^i} - \frac{\partial \left(\delta_{ij} \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} \right)}{\partial x^k} \right], \\ K = \frac{\partial_t p^1}{2\Delta p^1} \Delta \ln \frac{\partial_t p^1}{\Delta p^1}, \quad H^2 = \frac{1}{4} \frac{\Delta p^1}{\partial_t p^1} \left[\int P^3(t, x, dy) \frac{y_2^2}{2} - \int P^3(t, x, dy) \frac{y_1^2}{2} \right] \end{aligned}$$

и выполнены условия теоремы 1. Тогда случайные процессы X_t и Z_t однозначно определяют минимальную поверхность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватанабе С., Ижеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986.
2. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. — М.: Наука, 1978.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. — М.: Физматлит, 1963.
4. Климентов Д. С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. — 2013. — № 6. — С. 24–27.
5. Климентов Д. С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ненулевой средней кривизны// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. — 2014. — № 1. — С. 15–18.
6. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1952.
7. Fukushima M., Oshima Y., Takeda M. Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. — Berlin–New York: de Gruyter, 1994.

Климентов Дмитрий Сергеевич
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: dklimentov75@gmail.com