Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Куркина, С. П. Семенов, В. В. Славский, Восстановление треугольника на плоскости по трем проекциям, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 59–65

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-59-65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 10:54:34

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ ПО ТРЕМ ПРОЕКЦИЯМ

© 2020 г. М. В. КУРКИНА, С. П. СЕМЕНОВ, В. В. СЛАВСКИЙ

Аннотация. В работе решается следующая задача. На плоскости дан треугольник $\triangle ABC$ и три прямые l_1, l_2, l_3 в общем положении (их расположение неизвестно). Требуется по известным длинам сторон треугольников $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \triangle A_3B_3C_3$, являющихся проекциями треугольника $\triangle ABC$ на прямые l_1, l_2, l_3 , восстановить длины сторон треугольника $\triangle ABC$. Аналогичные задачи и их многомерные обобщения представляют интерес в теории компьютерных изображений.

Ключевые слова: треугольник, малоракурсная компьютерная томография.

RECONSTRUCTION OF A TRIANGLE ON A PLANE BY THREE PROJECTIONS

© 2020 M. V. KURKINA, S. P. SEMENOV, V. V. SLAVSKY

ABSTRACT. In this paper, we consider the following problem. On the plane, a triangle $\triangle ABC$ and three straight lines l_1, l_2 , and l_3 in the general position are given; the locations of the straight lines are unknown. The problem consists of the reconstruction of the triangle $\triangle ABC$ by the known lengths of the sides of the triangles $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$, and $\triangle A_3B_3C_3$, which are the projections of the triangle $\triangle ABC$ onto the lines l_1, l_2 , and l_3 . Similar problems and their multidimensional generalizations are of interest in the theory of computer images.

Keywords and phrases: triangle, small-angle computed tomography.

AMS Subject Classification: 51N20, 65D18, 97G70

1. Введение. Рассмотрим на плоскости треугольник $\triangle ABC$ и три прямые l_1, l_2, l_3 , находящиеся в общем положении, расположение которых считаем неизвестным. Обозначим проекции треугольника $\triangle ABC$ на указанные прямые соответственно через $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$ и $\triangle A_3B_3C_3$; будем их рассматривать как вырожденные треугольники на прямых. Ставится задача по известным длинам сторон треугольников $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \triangle A_3B_3C_3$ восстановить длины сторон $\triangle ABC$. Аналогичные задачи и их многомерные обобщения представляют интерес в теории компьютерных изображений (см. [1, 3]) и рассматривались ранее при известных положениях камер.

Введем векторы $v_1 = \overrightarrow{AB}, v_2 = \overrightarrow{AC}$ (см. рис. 1). Треугольник $\triangle ABC$ полностью определяется матрицей Грама

$$G = \begin{bmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) \end{bmatrix} = \|g_{ij}\|.$$

Рис. 1. Проекция треугольника

Аналогичным образом определены матрицы Грама для треугольников $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$:

$$A = \|a_{ij}\|, \quad B = \|b_{ij}\|, \quad C = \|c_{ij}\|.$$

Это будут неотрицательные симметричные матрицы ранга 1, имеющие следующий вид:

$$a_{ij} = a_i a_j, \quad b_{ij} = b_i b_j, \quad c_{ij} = c_i c_j,$$

где $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, $[c_1, c_2]$ представляют собой пары чисел — величин проекций векторов $v_1 = \overrightarrow{AB}$, $v_2 = \overrightarrow{AC}$ на прямые l_i , определенные с точностью до умножения на ± 1 в зависимости от выбора ориентации на прямых.

Выбирая прямоугольную систему координат так, чтобы ось OX совпала с прямой l_1 , можно представить матрицу G в виде

$$g_{ij} = a_i a_j + x_i x_j, \quad (1)$$

где x_i — проекции векторов $v_1 = \overrightarrow{AB}$, $v_2 = \overrightarrow{AC}$ на ось OY . Аналогичное утверждение выполняется для прямых l_2, l_3 :

$$g_{ij} = b_i b_j + y_i y_j, \quad g_{ij} = c_i c_j + z_i z_j. \quad (2)$$

Исключая из этих девяти уравнений шесть неизвестных $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$, $[z_1, z_2]$, получим три квадратных уравнения для определения g_{ij} :

$$\begin{aligned} (g_{11} - a_1^2)(g_{22} - a_2^2) &= (g_{12} - a_1 a_2)^2, \\ (g_{11} - b_1^2)(g_{22} - b_2^2) &= (g_{12} - b_1 b_2)^2, \\ (g_{11} - c_1^2)(g_{22} - c_2^2) &= (g_{12} - c_1 c_2)^2. \end{aligned}$$

Вычитая первое уравнение из второго и третьего, получим одно квадратное и два линейных уравнения на g_{ij} :

$$\begin{aligned} (g_{11} - a_1^2)(g_{22} - a_2^2) &= (g_{12} - a_1 a_2)^2, \\ g_{11}(a_2^2 - b_2^2) + g_{22}(a_1^2 - b_1^2) &= 2g_{12}(a_1 a_2 - b_1 b_2), \\ g_{11}(a_2^2 - c_2^2) + g_{22}(a_1^2 - c_1^2) &= 2g_{12}(a_1 a_2 - c_1 c_2). \end{aligned}$$

Решая эти два последних уравнения относительно g_{11} , g_{22} , получим

$$g_{11} = \frac{2g_{12} \det \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1^2 - b_1^2 \\ a_1 a_2 - c_1 c_2 & a_1^2 - c_1^2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_2^2 - b_2^2 & a_1^2 - b_1^2 \\ a_2^2 - c_2^2 & a_1^2 - c_1^2 \end{bmatrix}}, \quad (3)$$

$$g_{22} = \frac{2g_{12} \det \begin{bmatrix} a_2^2 - b_2^2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_2^2 - c_2^2 & a_1 a_2 - c_1 c_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_2^2 - b_2^2 & a_1^2 - b_1^2 \\ a_2^2 - c_2^2 & a_1^2 - c_1^2 \end{bmatrix}}. \quad (4)$$

Подставляя $\{g_{11}, g_{22}\}$ в первое уравнение, получим квадратное уравнение на g_{12} , один корень которого тривиальный $g_{12} = 0$, а другой равен

$$g_{12} = \frac{2Q \det \begin{bmatrix} a_2^2 - b_2^2 & a_1^2 - b_1^2 \\ a_2^2 - c_2^2 & a_1^2 - c_1^2 \end{bmatrix}}{m_1 m_2 m_3 m_4}. \quad (5)$$

В формуле для g_{12} использованы обозначения:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 b_2 - a_2 b_1, & q_2 &= a_1 c_2 - a_2 c_1, & q_3 &= b_1 c_2 - b_2 c_1, & Q &= q_1 q_2 q_3, \\ m_1 &= q_1 + q_2 + q_3, & m_2 &= q_1 - q_2 - q_3, & m_3 &= q_1 - q_2 + q_3, & m_4 &= q_1 + q_2 - q_3; \end{aligned}$$

при этом

$$m_1 m_2 m_3 m_4 = q_1^4 - 2q_1^2 q_2^2 - 2q_1^2 q_3^2 + q_2^4 - 2q_2^2 q_3^2 + q_3^4. \quad (6)$$

Окончательно получаем формулы для восстановления матрицы Грама g_{ij} исходного треугольника $\triangle ABC$:

$$g_{11} = \frac{4Q}{m_1 m_2 m_3 m_4} \det \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1^2 - b_1^2 \\ a_1 a_2 - c_1 c_2 & a_1^2 - c_1^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$g_{22} = \frac{4Q}{m_1 m_2 m_3 m_4} \det \begin{bmatrix} a_2^2 - b_2^2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_2^2 - c_2^2 & a_1 a_2 - c_1 c_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$g_{12} = \frac{2Q}{m_1 m_2 m_3 m_4} \det \begin{bmatrix} a_2^2 - b_2^2 & a_1^2 - b_1^2 \\ a_2^2 - c_2^2 & a_1^2 - c_1^2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Из полученных формул для g_{11} , g_{22} , g_{12} следует единственность решения поставленной задачи и возможность построения исходного треугольника $\triangle ABC$ с помощью циркуля и линейки (см. [2]).

Осталось исследовать вопрос о существовании треугольника $\triangle ABC$. Для справедливости формул (7), (8), (9) достаточно условия $m_1 m_2 m_3 m_4 \neq 0$. Кроме того, матрица Грама g_{ij} должна быть неотрицательна, т.е. должны выполняться неравенства:

$$g_{11} \geq 0, \quad g_{22} \geq 0, \quad D = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 \geq 0. \quad (10)$$

Теорема 1. Если для тройки чисел $\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}$ выполняется строгое неравенство треугольника, то треугольник $\triangle ABC$ однозначно восстанавливается по проекциям $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, $[c_1, c_2]$.

Доказательство. Для определителя D верно равенство

$$D = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 = \frac{-4Q^2}{m_1 m_2 m_3 m_4}. \quad (11)$$

Следовательно, должно выполняться неравенство

$$m_1 m_2 m_3 m_4 < 0. \quad (12)$$

В силу (6) выполнение неравенства (12) зависит лишь от модулей $\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}$, неравенство (12) имеет вид

$$0 < (|q_1| + |q_2| + |q_3|)(|q_1| + |q_2| - |q_3|)(|q_1| - |q_2| + |q_3|)(-|q_1| + |q_2| + |q_3|) = 16\overline{S}^2.$$

Рис. 2. Область Ω выполнения неравенства треугольника

Необходимым и достаточным условием выполнения этого неравенства будет строгое неравенство треугольника для тройки чисел $\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}$, где $\bar{S}$ — площадь треугольника $\bar{\Delta}$ со сторонами $\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}$, вычисляемая по формуле Герона. При этом равенство (11) приобретает простой геометрический смысл: так как радиус $\bar{R}$ окружности, описанной около треугольника $\bar{\Delta}$, равен

$$\bar{R} = \frac{|q_1||q_2||q_3|}{4\bar{S}},$$

то равенство (11) имеет вид $S = \bar{R}$, где S — площадь треугольника $\triangle ABC$, $\bar{R}$ — радиус окружности, описанной около треугольника $\bar{\Delta}$. Так как $g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 > 0$, то для доказательства (10) достаточно убедиться, что в условиях теоремы $g_{11} + g_{22} > 0$. Отложим из начала координат плоскости OXY векторы $a = [a_1, a_2]$, $b = [b_1, b_2]$, $c = [c_1, c_2]$. Так как векторы a, b, c определены с точностью до знака, то можно считать, что они лежат по одну сторону оси OX . Изучим знак величины $g_{11} + g_{22}$:

$$g_{11} + g_{22} = \frac{4Q}{m_1 m_2 m_3 m_4} \left[\det \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1^2 - b_1^2 \\ a_1 a_2 - c_1 c_2 & a_1^2 - c_1^2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_2^2 - b_2^2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_2^2 - c_2^2 & a_1 a_2 - c_1 c_2 \end{bmatrix} \right] = \frac{4QU}{m_1 m_2 m_3 m_4},$$

где

$$\begin{aligned} U &= \det \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1^2 - b_1^2 \\ a_1 a_2 - c_1 c_2 & a_1^2 - c_1^2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_2^2 - b_2^2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_2^2 - c_2^2 & a_1 a_2 - c_1 c_2 \end{bmatrix} = \\ &= c_1 c_2 (a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2) + (c_1^2 - c_2^2)(b_1 b_2 - a_1 a_2) + (a_2^2 - a_1^2)b_1 b_2 + a_1 a_2(b_1^2 - b_2^2). \end{aligned}$$

Разберем различные случаи взаимного расположения векторов a, b, c .

I. Вектор c лежит между векторами a и b . Из строгого неравенства треугольника на числа $\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}$ вытекают неравенства

$$\begin{aligned} |a_1 b_2 - a_2 b_1| &< |a_1 c_2 - a_2 c_1| + |b_1 c_2 - b_2 c_1|, \\ ||a_1 c_2 - a_2 c_1| - |b_1 c_2 - b_2 c_1|| &< |a_1 b_2 - a_2 b_1|. \end{aligned}$$

Каждый из модулей будем рассматривать как удвоенную площадь соответствующего треугольника. Тогда данным неравенствам соответствует положение конца вектора c в области Ω (см. рис. 2.I); здесь полоса Ω параллельна вектору $(a + b)/2$. Выберем параметризацию области Ω в виде

$$c_1 = \left(\lambda + \frac{t}{2}\right) a_1 + \left(1 - \lambda + \frac{t}{2}\right) b_1, \quad c_2 = \left(\lambda + \frac{t}{2}\right) a_2 + \left(1 - \lambda + \frac{t}{2}\right) b_2,$$

где $0 < \lambda < 1$, $t > 0$. Тогда значения функции $U(c_1, c_2)$ на границе области Ω равны

$$\begin{aligned} &\lambda(1 - \lambda)(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2a_1 b_1 - 2a_2 b_2), \\ &\frac{t(t + 2)}{4}(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_1^2 + b_2^2), \\ &\frac{t(t + 2)}{4}(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_1^2 + b_2^2) \end{aligned}$$

причем внутри области Ω функция U по аргументам (c_1, c_2) гармоническая. Следовательно, знак функции в области Ω совпадает со знаком $(a_1b_2 - a_2b_1)$, а знак функции $g_{11} + g_{22}$ совпадает со знаком выражения

$$-(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_2 - b_2c_1),$$

которое в рассматриваемой области Ω положительно.

II. Вектор a лежит между векторами c и b . Из строгого неравенства треугольника на числа $\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}$ вытекают неравенства

$$\begin{aligned} |c_1b_2 - c_2b_1| &< |a_1c_2 - a_2c_1| + |b_1a_2 - b_2a_1|, \\ ||a_1c_2 - a_2c_1| - |b_1a_2 - b_2a_1|| &< |c_1b_2 - c_2b_1|. \end{aligned}$$

Каждый из модулей будем рассматривать как удвоенную площадь соответствующего треугольника. Тогда данным неравенствам соответствует положению конца вектора a в заштрихованной области Ω (см. рис. 2.И); здесь заштрихованная полоса Ω параллельна вектору $(c+b)/2$. Выберем параметризацию области Ω в виде

$$a_1 = \left(\lambda + \frac{t}{2}\right)c_1 + \left(1 - \lambda + \frac{t}{2}\right)b_1, \quad a_2 = \left(\lambda + \frac{t}{2}\right)c_2 + \left(1 - \lambda + \frac{t}{2}\right)b_2,$$

где $0 < \lambda < 1$, $t > 0$. Тогда значения функции $U(a_1, a_2)$ на границе области Ω равны

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)\lambda(b_1c_2 - b_2c_1)(-2b_1c_1 - 2b_2c_2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2), \\ \frac{t(t+2)}{4}(b_1c_2 - b_2c_1)(2b_1c_1 + 2b_2c_2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2), \\ \frac{t(t+2)}{4}(b_1c_2 - b_2c_1)(2b_1c_1 + 2b_2c_2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2) \end{aligned}$$

причем внутри области Ω функция U по аргументам (a_1, a_2) гармоническая. Следовательно, знак функции в области Ω совпадает со знаком $(b_1c_2 - b_2c_1)$, а знак функции $g_{11} + g_{22}$ совпадает со знаком выражения

$$-(a_1c_2 - a_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1),$$

которое в рассматриваемой области Ω положительно.

III. Случай, когда вектор b лежит между векторами c и a , разбирается аналогично. $\square$

Рассмотрим более подробно как связаны между собой треугольник $\triangle ABC$ и треугольник $\overline{\triangle}$ со сторонами $\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}$. На рис. 4 изображен треугольник $\triangle ABC$. Пусть O — центр описанной вокруг него окружности радиуса R . Пусть l_i — прямые, на которые происходит проектирование, и e_i — единичные направляющие векторы прямых l_i . Используя полярные координаты с центром в точке O , можно записать

$$e_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i)), \quad r_i = R(\cos(\phi_i), \sin(\phi_i)), \quad i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где $r_1 = \overrightarrow{OA}$, $r_2 = \overrightarrow{OB}$, $r_3 = \overrightarrow{OC}$ — радиус-векторы вершин A, B, C . Отсюда следует, что проекции на прямые l_i вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_1 = (e_1, \overrightarrow{AB}) &= (e_1, r_2) - (e_1, r_1), & a_2 = (e_1, \overrightarrow{AC}) &= (e_1, r_3) - (e_1, r_1), \\ b_1 = (e_2, \overrightarrow{AB}) &= (e_2, r_2) - (e_2, r_1), & b_2 = (e_2, \overrightarrow{AC}) &= (e_2, r_3) - (e_2, r_1), \\ c_1 = (e_3, \overrightarrow{AB}) &= (e_3, r_2) - (e_3, r_1), & c_2 = (e_3, \overrightarrow{AC}) &= (e_3, r_3) - (e_3, r_1), \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} a_1 &= R(\cos(\theta_1 - \phi_2) - \cos(\theta_1 - \phi_1)), & a_2 &= R(\cos(\theta_1 - \phi_3) - \cos(\theta_1 - \phi_1)), \\ b_1 &= R(\cos(\theta_2 - \phi_2) - \cos(\theta_2 - \phi_1)), & b_2 &= R(\cos(\theta_2 - \phi_3) - \cos(\theta_2 - \phi_1)), \\ c_1 &= R(\cos(\theta_3 - \phi_2) - \cos(\theta_3 - \phi_1)), & c_2 &= R(\cos(\theta_3 - \phi_3) - \cos(\theta_3 - \phi_1)). \end{aligned} \quad (15)$$

Рис. 3. Треугольник $\triangle ABC$, прямые l_1, l_2, l_3 и треугольник $\overline{\triangle}$

Отсюда получим

$$g_{11} = 4R^2 \sin^2 \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_2}{2} \right), \quad g_{22} = 4R^2 \sin^2 \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right),$$

$$g_{12} = 4R^2 \sin \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi_2}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right).$$

Аналогично,

$$q_1 = 4R^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_2}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right),$$

$$q_2 = 4R^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_2}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right),$$

$$q_3 = 4R^2 \sin(\theta_2 - \theta_3) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_2}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right).$$

Отсюда по теореме о значениях косинусов углов треугольника $\overline{\triangle}$ получим:

$$|\cos(\angle b)| = \left| \frac{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}{2q_2q_3} \right| = |\cos(\theta_1 - \theta_2)| = |\cos(\angle t_3)|,$$

$$|\cos(\angle c)| = \left| \frac{q_3^2 + q_1^2 - q_2^2}{2q_3q_1} \right| = |-\cos(\theta_1 - \theta_3)| = |\cos(\angle t_2)|,$$

$$|\cos(\angle a)| = \left| \frac{q_1^2 + q_2^2 - q_3^2}{2q_1q_2} \right| = |\cos(\theta_2 - \theta_3)| = |\cos(\angle t_1)|.$$

Следовательно, треугольники $\triangle abc \sim \triangle t_3t_1t_2$ подобны. Площадь треугольника $\triangle ABC$ равна

$$S^2 = 16R^4 \sin^2 \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_2}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\phi_1}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\phi_2}{2} - \frac{\phi_3}{2} \right) = \overline{R}^2.$$

2. Числовой пример. Методом случайного перебора 1000000 вариантов удалось найти пример «виртуального» треугольника $\triangle abc$ и соответствующего ему «реального» $\triangle ABC$ так, чтобы длины их сторон, площади и радиусы описанных окружностей были рациональными числами. Пусть l_1, l_2, l_3 — прямые на плоскости. Положим

$$[a_1, a_2] = [14, 10], \quad [b_1, b_2] = [4, 0], \quad [c_1, c_2] = [13, 13].$$

Тогда формулы (7), (8), (9) дают длины сторон треугольника $\triangle ABC$:

$$|AB| = \frac{169}{12}, \quad |BC| = \frac{13}{3}, \quad |CA| = \frac{65}{4}.$$

Рис. 4. К числовому примеру: треугольник $\triangle ABC$, прямые l_1, l_2, l_3

Длины сторон «виртуального» треугольника $\triangle abc$ равны

$$|A_1C_1| = 40, \quad |A_1B_1| = 52, \quad |C_1B_1| = 52;$$

$$S = \overline{R} = \frac{169}{6}, \quad R = \frac{845}{96}, \quad \overline{S} = 960.$$

На рис. 4 изображен треугольник $\triangle ABC$, прямые l_1, l_2 и перпендикулярные к ним прямые l_1^*, l_2^* .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губарени Н. М. Вычислительные методы и алгоритмы малоракурсной компьютерной томографии. — Киев: Наукова думка, 1997.
2. Куркина М.В. Об одном томографическом свойстве треугольника на плоскости// Тр. Междунар. (44-я Всероссийск.) молодежн. шк.-конф. «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 27 января — 2 февраля 2013 г.). — Екатеринбург: Ин-т математики УрО РАН, 2013. — С. 354–357.
3. Hartley R., Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision. — Cambridge Univ. Press, 2000.

Куркина Мария Викторовна

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

E-mail: mavi@inbox.ru

Семенов Сергей Петрович

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

E-mail: ssp@ugrasu.ru

Славский Виктор Владимирович

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

E-mail: slavsky2004@mail.ru