Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Нарманов, А. С. Шарипов, О группе диффеоморфизмов слоеных многообразий, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 74–83

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-74-83>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:10:21

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 74–83
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-74-83

УДК 514.763.23

О ГРУППЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ СЛОЕНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2020 г. А. Я. НАРМАНОВ, А. С. ШАРИПОВ

Аннотация. Целью статьи является введение некоторой топологии на группе $\text{Diff}_F(M)$ всех C^r -дiffeоморфизмов слоеного многообразия $(M; F)$, где $r \geq 0$. Эта топология зависит от слоения и называется F -компактно-открытой топологией. Она совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n -мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n , то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью, где $n = \dim M$. Доказано, что некоторые подгруппы группы $\text{Diff}_F(M)$ являются топологическими группами с F -компактно-открытой топологией. Гладкость всюду в работе означает гладкость класса C^∞ .

Ключевые слова: многообразие, слоение, топологическая группа, компактно-открытая топология.

ON THE DIFFEOMORPHISM GROUPS OF FOLIATED MANIFOLDS

© 2020 A. YA. NARMANOV, A. S. SHARIPOV

ABSTRACT. In this paper, we introduce a certain topology on the group $\text{Diff}_F(M)$ of all C^r -diffeomorphisms of the foliated manifold $(M; F)$, where $r \geq 0$. This topology depends on the foliation and is called the F -compact-open topology. It coincides with the compact-open topology when F is an n -dimensional foliation. If the codimension of the foliation is n , then the convergence in this topology coincides with the pointwise convergence, where $n = \dim M$. We prove that some subgroups of the group $\text{Diff}_F(M)$ are topological groups with the F -compact-open topology. Throughout this paper, we use smoothness of the class C^∞ .

Keywords and phrases: manifold, foliation, topological group, compact-open topology.

AMS Subject Classification: 22A05, 54H15, 57R50, 53C12

1. Введение. Множество $\text{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия на себя является группой относительно композиции и обратного отображения. Группа диффеоморфизмов гладких многообразий имеет важное значение в дифференциальной геометрии и в анализе. Фундаментальными работами в этой области являются исследования В. И. Арнольда, Х. Омори, А. М. Лукацкого (см. [3, 4, 10, 14, 15]).

Интенсивное развитие теории группы диффеоморфизмов началось с работы В. И. Арнольда [10], в которой доказано, что движения идеальной несжимающейся жидкости являются геодезическими на группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем элемента.

Когда M является многообразием конечной размерности, то группа изометрий $I(M)$ риманова многообразия M является группой Ли (см. [12]).

Работа выполнена при поддержке Узбекско-Российского гранта фундаментальных исследований (проект MRU № 10-17).

Х. Омори определил дифференциальную структуру на группе диффеоморфизмов компактных многообразий, которая слабее, чем структура группы Ли в классическом смысле. Эта дифференциальная структура называется структурой ИЛН (inverse limit of Hilbert) групп Ли. Х. Омори доказал, что ИЛН-группа Ли диффеоморфизмов может действовать на компактном многообразии транзитивно и неприводимо только в следующих случаях: полная группа диффеоморфизмов, группа диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема, группа симплектических диффеоморфизмов, группа контактных диффеоморфизмов. Вопросы конечной порожденности группы диффеоморфизмов и свойства кривизны ИЛН-групп Ли диффеоморфизмов исследованы А. М. Лукацким (см. [3, 4]).

В статье рассматриваем слоеное многообразие с некоторым слоением и исследуем некоторые подгруппы группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Известно, что группа диффеоморфизмов является топологической группой в компактно-открытой топологии. В случае, когда многообразие компактно, этот факт доказан в [9]. Для произвольного многообразия конечной размерности этот факт доказан в [13].

2. Основные результаты. Пусть M — гладкое связное риманова многообразие размерности n , $0 < k < n$.

Определение 1. Слоением F размерности k (слоением коразмерности $n - k$) называется разбиение M на линейно связные подмножества $L_\alpha \subset M$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- (F₁) $\bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;
- (F₂) если $\alpha \neq \beta$, то $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ для всех $\alpha, \beta \in B$;
- (F₃) для всякой точки $p \in M$ существуют такие окрестность U и карта $(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k})$, что для каждого слоя L_α компоненты линейной связности множества $U_p \cap L_\alpha$ задаются уравнениями: $y^1 = \text{const}, \dots, y^{n-k} = \text{const}$.

Эта карта является отмеченной картой. Компоненты связности множеств $y^1 = \text{const}, \dots, y^{n-k} = \text{const}$ в отмеченных картах называются локальными слоями слоения F . При фиксированном y отображение $x \mapsto (x, y)$ является гладким вложением. Следовательно, локальные слои являются связными k -мерными подмногообразиями M , каждый слой L_α как объединение локальных слоев является k -мерным связным подмногообразием M . Заметим, что естественная топология на многообразии L_α не является топологией, индуцированной из M . Простой пример слоения задается гладкой субмерсией $f: M \rightarrow B$, где B является $(n - k)$ -мерным многообразием. Компоненты связности полного прообраза точки $y \in B$ определяют k -мерное слоение на M (см. [15]).

Через (M, F) обозначим гладкое многообразие M размерности n , на котором задано гладкое k -мерное слоение F (где $0 < k < n$). Пусть $L(p)$ -слой слоения F , проходящий через точку p , $T_p F$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p . Имеем подрасслоение (гладкое распределение) $TF = \{T_p F \mid p \in M\}$ касательного расслоения TM многообразия M . Обозначим через $V(M)$, $V(F)$ множество гладких сечений расслоений TM , TF соответственно.

Определение 2. Если при диффеоморфизме $f: M \rightarrow M$ образ $f(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения F является слоем слоения F , то отображение $f: M \rightarrow M$ называется C^r -диффеоморфизмом слоеного многообразия; этот факт записывается в виде $f: (M, F) \rightarrow (M, F)$.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Пусть слои L_α слоения F задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = \text{const}$. Тогда диффеоморфизм плоскости $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенный формулой

$$\phi(x, y) = (x, y + \lambda f(x, y)),$$

является диффеоморфизмом слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$, для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию $\lambda \neq 1$, где $f(x, y) = x^2 - y$. Он отображает каждый слой L_α на слой $L_{(1-\lambda)\alpha}$.

Пример 2. Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где F — гладкое слоение размерности k , где $0 < k < n$. Напомним, что векторное поле X называется слоеным полем, если для каждого векторного поля Y , касательного к слоению F , скобка Ли $[X, Y]$ также является касательным к F . Известно, что поток каждого слоеного поля состоит из диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F) .

Для слоеной плоскости из примера 1 векторное поле $X = (x^2 - y) \frac{\partial}{\partial y}$ является слоеным полем, и его поток состоит из диффеоморфизмов

$$\phi^t: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$. Каждый диффеоморфизм (1) отображает каждый слой L_α на слой $L_{e^{-t}\alpha}$.

Следующий пример показывает, что понятие диффеоморфизм слоеного многообразия определено корректно.

Пример 3. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Слои L_α слоения F задаются уравнениями $y = \alpha = \text{const}$. Тогда гомеоморфизм плоскости $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенный формулой

$$\phi(x, y) = (x + y, y^{1/3}),$$

является диффеоморфизмом на каждом слое слоения F , но не является диффеоморфизмом плоскости.

Обозначим через $\text{Diff}_F(M)$ множество всех C^r -диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F) , где $r \geq 0$. Множество $\text{Diff}^r(M)$ является группой по отношению к суперпозиции и обратного отображения. Группа $\text{Diff}_F(M)$ является подгруппой $\text{Diff}(M)$; она является топологической группой в компактно-открытой топологии.

Введем некоторую топологию на группе $\text{Diff}_F(M)$, которая зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n -мерным слоением.

Пусть $\{K_\lambda\}$ — семейство всех компактных множеств, где каждое K_λ принадлежит какому-либо слою слоения F , и пусть $\{U_\beta\}$ — семейство всех открытых множеств на M . Рассмотрим для каждой пары $K_\lambda \subset L_\alpha$ и любого U_β совокупность всех отображений $f \in \text{Diff}_F(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать через

$$[K_\lambda, U_\beta] = \{f: M \rightarrow M \mid f(K_\lambda) \subset U_\beta\}.$$

Нетрудно показать, что семейство всевозможных конечных пересечений множеств вида $[K_\lambda, U_\beta]$ образует базу для некоторой топологии. Эту топологию назовем слоеной компактно-открытой топологией или коротко F -компактно-открытой топологией.

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие конечной размерности.

Определение 3. Изометрия $\phi: M \rightarrow M$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F) , если она переводит слой на слой, т.е. является диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F) .

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Пусть слоение F задается уравнением $x^2 - y = \alpha = \text{const}$. Тогда изометрия плоскости $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенная формулой

$$\phi_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda),$$

является изометрией слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. Она отображает каждый слой L_α на слой $L_{\alpha - \lambda}$. Семейство изометрий ϕ_λ является потоком векторного поля Киллинга $X = \partial/\partial y$. Нетрудно проверить, что диффеоморфизм слоеной плоскости из примера 1 является изометрией слоеной плоскости, но не является потоком векторного поля.

Напомним, что векторное поле X на римановом многообразии (M, g) называется векторным полем Киллинга, если поток состоит из изометрий риманова многообразия (M, g) , т.е. $L_X g = 0$, где риманова метрика, а через $L_X g$ обозначена производная Ли метрики по направлению X .

Геометрия орбит семейства векторных полей Киллинга изучена в [6]. Если X является слоеным векторным полем Киллинга, то его поток состоит из изометрий слоеного многообразия (M, F) .

Обозначим через $\text{Iso}_F(M)$ множество всех C^r -изометрий слоеного многообразия (M, F) , где $r \geq 0$. Имеет место $\text{Iso}_F(M) = \text{Diff}_F(M) \cap \text{Iso}(M)$.

Теорема 1. Пусть (M, F) — гладкое связное полное слоеное риманово многообразие конечной размерности. Тогда группа $\text{Iso}_F(M)$ является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Доказательство. Сначала покажем, что отображение $(g, h) \rightarrow g \circ h$ является непрерывным для отображений $g, h \in \text{Iso}_F(M)$. Пусть $g \circ h \in [K, G]$, где K — компактное подмножество некоторого слоя L слоения F , G — открытое подмножество многообразия M . Отсюда имеем $h(K) \subset g^{-1}(G)$. Так как $h(K)$ является компактным множеством, существует открытое покрытие, состоящее из конечного числа открытых подмножеств $U_1, \dots, U_m$ слоя $h(L)$ с компактным замыканием в $h(L)$, содержащихся в $g^{-1}(G)$. (Так как слой $h(L)$ локально компактен и хаусдорфов, каждая точка $h(K)$ обладает окрестностью в $h(K)$ с компактным замыканием в $h(L)$, лежащим в $g^{-1}(G)$.)

Положим $A = \bigcup_{i=1}^m U_i$. Тогда $g \in [\bar{A}, G]$, $h \in [K, A']$, где A' — такое открытое подмножество множества M , что $A \subset A' \subset g^{-1}(G)$. Отсюда следует, что $(g, h) \in [\bar{A}, G] \times [K, A']$, когда $g \circ h \in [K, G]$.

Теперь обозначим через $d(x, y)$ расстояние между точками x и y , определяемое полной римановой метрикой g . Используя полноту римановой метрики на M , докажем, что отображение $\chi: f \rightarrow f^{-1}$ непрерывно. Для этого докажем, что прообраз $\chi^{-1}(A)$ открытого множества $A \subset \text{Iso}_F(M)$ является открытым. В самом деле, достаточно доказать этот факт, когда A является элементом предбазы, т.е. A имеет вид

$$A = \left\{ f \in \text{Iso}_F(M) : f(K) \subset V \right\}$$

где K — компакт, V — открытое множество. В этом случае прообраз множества A имеет вид

$$\chi^{-1}(A) = \left\{ f \in \text{Iso}_F(M) : f^{-1}(K) \subset V \right\}.$$

Покажем, что $\chi^{-1}(A)$ открыто в F -компактно-открытой топологии.

Пусть $g \in \chi^{-1}(A)$, U — такая окрестность $g^{-1}(K)$ с компактным замыканием, что $\bar{U} \subset V$.

Положим

$$K_1 = g^{-1}(K), \quad U_g = \left\{ h \in \text{Iso}_F(M) : d(g(x), h(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in K_1 \right\},$$

где

$$\varepsilon = d(K_1, M \setminus U) = \inf \{ d(x, y) : x \in K_1, y \in (M \setminus U) \}.$$

Множество U_g является открытым множеством в F -компактно-открытой топологии в силу того, что $U_g = [K_1, V_\varepsilon]$, где $V_\varepsilon = \{ x \in M : d(x, K) < \varepsilon \}$ — окрестность K , $d(x, K) = \inf \{ d(x, y) : y \in K \}$ — расстояние от точки x до множества K .

Покажем, что если $h \in U_g$, то $h^{-1}(K) \subset V$, т.е. $U_g \subset \chi^{-1}(A)$. Предположим обратное. Пусть для некоторого $h \in U_g$ существует такая точка $y \in K$, что $h^{-1}(y) \in M \setminus U$, т.е. $y \in M \setminus h(U)$. Тогда в силу того, что $g^{-1}(y) \in K_1$, имеет место неравенство

$$d(y = g(g^{-1}(y)), h(g^{-1}(y))) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть γ — кратчайшая (известно, что на полном римановом многообразии для каждой пары точек всегда существует кратчайшая геодезическая, которая соединяет их), идущая из точки y в точку $h(g^{-1}(y))$, а $z \in \gamma \cap \partial(h(U))$. Тогда

$$d(h(g^{-1}(y)), z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что h^{-1} — изометрия, имеем

$$d(h(g^{-1}(y)), z) = d(g^{-1}(y), h^{-1}(z)).$$

С другой стороны, имеем $g^{-1}(y) \in K_1$, $h^{-1}(z) \in \partial U$ и $d(g^{-1}(y), h^{-1}(z)) \geq \varepsilon$. Это противоречие показывает, что $h^{-1}(K) \subset U$. Следовательно, $U_g \subset \chi^{-1}(A)$. $\square$

Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k , где $0 < k < n$. Тогда каждый слой является римановым многообразием с индуцированной римановой метрикой. Следующая теорема показывает, что если M является полным римановым многообразием, то каждый слой является полным римановым многообразием с индуцированной римановой метрикой.

Теорема 2. Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k , где $0 < k < n$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Каждый слой с индуцированной римановой метрикой на нем является полным римановым многообразием.
2. Пусть $\gamma_m: \mathbb{R}^1 \rightarrow L_m$ — такая последовательность геодезических (относительно индуцированных римановых метрик) слоев L_m , что $\gamma_m(s_0) \rightarrow p$ при $m \rightarrow \infty$ для некоторого $s_0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда существует подпоследовательность γ_{m_l} последовательности γ_m , которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow L(p)$ слоя $L(p)$, выходящей из точки p при $s = s_0$.

Доказательство. 1. Пусть L_α — некоторый слой слоения F , $\gamma: (a, b) \rightarrow L_\alpha$ — геодезическая на L_α , определенной индуцированной римановой метрикой и параметризованная длиной дуги. Покажем, что если $b < \infty$ (или $a > -\infty$), то существует $\lim_{s \rightarrow b} \gamma(s)$ или $\lim_{s \rightarrow a} \gamma(s)$, принадлежащий L_α . Пусть $s_1 < s_2 < \dots < s_l < s_{l+1} < \dots$, $s_l \rightarrow b$ при $l \rightarrow \infty$, и $\varepsilon > 0$ — некоторое малое число. Тогда существует такой номер N , что

$$d(\gamma(s_i), \gamma(s_j)) \leq |s_i - s_j| < \varepsilon \quad \text{для всех } i, j \geq N,$$

где d — расстояние на M . Следовательно, последовательность $\{\gamma(s_l)\}$ является фундаментальной. В силу того, что M полно, эта последовательность имеет предел, который мы обозначим через p . Теперь покажем, что $p \in L_\alpha$. По определению слоения, для каждой точки $p \in M$ существуют такие окрестность U точки p и локальная система координат $(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k})$ на U , что набор $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\}$ является базисом для гладких сечений $TF|_U$ (сужение TF на U). Такая окрестность называется расслоенной окрестностью точки p . Пусть U — расслоенная окрестность точки p с локальными координатами $(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k})$. Тогда связные компоненты пересечения $V \cap L_\beta$ для любого слоя L_β описываются уравнениями $y^1 = \text{const}, \dots, y^{n-k} = \text{const}$.

Если L_0 — компонента связности пересечения $V \cap L_\alpha$, содержащая точки $\gamma(s_i)$ для достаточно больших i , то ясно, что L_0 содержит точку p . Следовательно, $p \in L_\alpha$. Отсюда следует, что $\gamma(s)$ определено для всех $s \in (-\infty, +\infty)$.

2. Пусть $\pi: TM \rightarrow TF$ — ортогональная проекция, $V(M)$, $V(F)$, $V(H)$ — множество гладких сечений расслоений TM , TF , HF соответственно. Положим $\tilde{\nabla}_X Y = \pi(\nabla_X Y)$ для векторных полей $X \in V(M)$, $Y \in V(F)$, где ∇ — связность Леви-Чивиты, определенная римановой метрикой g на M . Известно, что $\tilde{\nabla}_X Y$ является связностью на TF , причем ее сужение на каждый слой L_α совпадает со связностью на L_α , определяемой индуцированной римановой метрикой на L_α из M (см. [2, 5]). Поэтому гладкая параметризованная кривая $\mu: (a, b) \rightarrow M$, лежащая на слое L_α слоения F , является геодезической на L_α (относительно индуцированной римановой метрики) тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\mu}} \dot{\mu} = 0. \quad (2)$$

Если μ лежит в отмеченной окрестности U , то ее уравнения имеют вид:

$$x^i = x^i(s), \quad y^\alpha = \text{const}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq \alpha \leq n - k.$$

Так как для ∇ имеет место равенство

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{i,j}^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma_{i,j}^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

то имеем

$$\tilde{\nabla} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{i,j}^l \frac{\partial}{\partial x^l},$$

где $1 \leq i, j, l \leq k$, $1 \leq \alpha \leq n - k$, $\Gamma_{i,j}^\beta$ — символы Кристоффеля. Отсюда и из свойств оператора $\tilde{\nabla}$ вытекает, что уравнение (2) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 x^i}{ds} + \Gamma_{l,j}^i \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Полагая $u^i = dx^i/ds$, эту систему можно написать в виде

$$\frac{dx^i}{ds} = u^i, \quad \frac{du^i}{ds} = -\Gamma_{l,j}^i u^l u^j. \quad (3)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что геодезические $\gamma_m: \mathbb{R}^1 \rightarrow L_m$ параметризованы длиной дуги и $s_0 = 0$. Покажем, что из последовательности касательных векторов $\dot{\gamma}_m(0)$ можно выделить сходящую подпоследовательность. Так как $|\dot{\gamma}_m(0)| = 1$ для всех m , имеем равенство

$$\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p_m) u_m^i u_m^j = 1 \quad (4)$$

для достаточно больших m , где $p_m = \gamma_m(0)$, g_{ij} — коэффициент римановой метрики g , $\{u_m^i\}$ — первые k координат вектора $\dot{\gamma}_m(0)$ в координатах расслоенной окрестности U точки p . Равенство (4) имеет смысл при $\gamma_m(0) \in U$. Так как $p_m \rightarrow p$ при $m \rightarrow \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_0 , для которого $|g_{ij}(p_m) - g_{ij}(p)| < \varepsilon$ при $m \geq m_0$. Отсюда имеем

$$\sum_{i,j=1}^k (g_{ij}(p) - \varepsilon) |u_m^i| |u_m^j| \leq \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p_m) |u_m^i| |u_m^j|.$$

В силу того, что матрица $\{g_{ij}(p_m)\}$ положительно определена, каждое уравнение

$$\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p_m) u_m^i u_m^j = 1$$

определяет эллипсоид, симметричный относительно осей координат и с центром симметрии в начале координат. Поэтому имеем

$$\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p_m) |u_m^i| |u_m^j| = 1;$$

следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^k (g_{ij}(p) - \varepsilon) |u_m^i| |u_m^j| \leq 1.$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$, матрица $\{g_{ij}(p) - \varepsilon\}$ также является положительно определенной. Отсюда следует, что точки $u_m = \{u_m^1, \dots, u_m^k\}$ лежат на компактном множестве. Поэтому из последовательности u_m^i можно выделить сходящуюся подпоследовательность $u_{m_l}^i$, предел которой обозначим через u_0^i . Тогда для вектора $v = (u_0^1, \dots, u_0^k)$ имеет место соотношение

$$\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p) |u_0^i| |u_0^j| = 1.$$

Рассмотрим геодезическую γ на слое $L(p)$, выходящую из точки p при $s = 0$ в направлении вектора v . Эта кривая удовлетворяет уравнению (3). Пусть $K_0 \subset \mathbb{R}^1$ — такой компакт, содержащий $s_0 = 0$, что $\gamma(K_0)$ лежит в U . Тогда $\gamma: K_0 \rightarrow L(p)$ является решением системы дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями

$$x^i(0) = p^i, \quad u^i(0) = v^i,$$

где $i = 1, \dots, k$, $p = (p^1, \dots, p^n)$, $v = (u_0^1, \dots, u_0^n)$.

Так как $\gamma_{m_l}(0) \rightarrow p$, $\dot{\gamma}_{m_l}(0) \rightarrow v$ при $l \rightarrow \infty$, то по теореме о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных данных последовательность γ_m сходится к γ равномерно на компакте $K_0 \subset (a, b)$. Для каждого компакта $K \subset \mathbb{R}^1$, содержащего K_0 , покрывая $\gamma(K)$ расслоенными окрестностями, получим, что γ_{m_l} сходится к γ равномерно на K . $\square$

Обозначим через $\text{Diff}_F^0(M)$ множество всех таких C^r -диффеоморфизмов $g \in \text{Diff}_F(M)$ слоеного многообразия (M, F) , что $g(L_\alpha) = L_\alpha$ для каждого слоя L_α слоения F . Поток каждого касательного векторного поля состоит из диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F) , которые принадлежат группе $\text{Diff}_F^0(M)$. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где M — гладкое связное многообразие конечной размерности. Тогда группа $\text{Diff}_F^0(M)$ является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Доказательство. Непрерывность отображения $(g, h) \rightarrow g \circ h$ доказана в теореме 1. Обозначим через $d(x, y)$ расстояние между точками x и y , определяемое некоторой полной римановой метрикой. Известно, что гладкое многообразие M обладает полной римановой метрикой (см. [1]).

Пусть $\pi: TM \rightarrow TF$ — ортогональная проекция. Предположим, что $\tilde{\nabla}_X Y = \pi(\nabla_X Y)$ для векторных полей $X \in V(M)$, $Y \in V(F)$, где ∇ — связность Леви-Чивиты, определенная римановой метрикой g на M . Известно, что $\tilde{\nabla}_X Y$ является связностью на TF , причем ее сужение на каждый слой L_α совпадает со связностью на L_α , определяемой римановой метрикой на L_α из M (см. [2, 3]).

Докажем, что отображение $\chi: f \rightarrow f^{-1}$ непрерывно. Пусть g — полная риманова метрика на M . Сужение римановой метрики g индуцирует риманову метрику на слоях. Эта индуцированная риманова метрика определяет функцию расстояния на каждом слое.

Пусть L_α — некоторый слой слоения F , d_α — расстояние на L_α , определенное индуцированной римановой метрикой g_α . По теореме 2 каждый слой L_α индуцированной римановой метрики является полным римановым многообразием.

Теперь, используя полноту римановой метрики d_α , докажем непрерывность отображения $\chi: f \rightarrow f^{-1}$. Для этого проверим, что полный прообраз $\chi^{-1}(A)$ открытого множества $A \subset \text{Diff}_F^0(M)$ является открытым. В самом деле, достаточно показать этот факт, когда A является элементом предбазы, т.е. A имеет вид

$$A = \{f \in \text{Diff}_F^0(M) : f(K) \subset V\},$$

где K — компактное подмножество слоя L_α , V — открытое подмножество многообразия M . В этом случае прообраз множества A имеет вид

$$\chi^{-1}(A) = \{f \in \text{Diff}_F^0(M) : f^{-1}(K) \subset V\}.$$

Покажем, что $\chi^{-1}(A)$ открыто в F -компактно-открытой топологии. Пусть $g \in \chi^{-1}(A)$, U — такая окрестность $g^{-1}(K)$ в L_α , с компактным замыканием $\bar{U}$ в L_α , что $\bar{U} \subset V$. Положим

$$U(g) = \left\{h \in \text{Diff}_F^0(M) : d_\alpha(g(x), h(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in \bar{U}\right\},$$

где

$$\varepsilon = d(K, L_\alpha \setminus g(U)) = \inf \{d_\alpha(x, y) : x \in K, y \in L_\alpha \setminus g(U)\}.$$

Покажем, что если $h \in U(g)$, то $h^{-1}(K) \subset V$, т.е. $U(g) \subset \chi^{-1}(A)$. Предположим обратное. Пусть для некоторого $h \in U(g)$ существует такая точка $y \in K$, что $h^{-1}(y) \in L_\alpha \setminus U$, т.е. $y \in L_\alpha \setminus h(U)$. Тогда в силу того, что $g^{-1}(y) \in U$, имеет место неравенство

$$d(y = g(g^{-1}(y)), h(g^{-1}(y))) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть γ — кратчайшая на L_α (так как (L_α, d_α) — многообразие полное риманово, для каждой пары точек всегда существует кратчайшая геодезическая, которая соединяет их), идущая из точки y в точку $h(g^{-1}(y))$, а $z \in \gamma \cap \partial(h(U))$. Тогда $h^{-1}(z) \in \bar{U}$ и, кроме того,

$$d(g(h^{-1}(z)), h(h^{-1}(z))) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, $d(y, z) < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$d(y, g(h^{-1}(z))) \leq d(y, z) + d(z, g(h^{-1}(z))) < \varepsilon.$$

Но, с другой стороны, $z \notin h(U)$; кроме того, имеем

$$g(h^{-1}(z)) \in L_\alpha \setminus g(U), \quad db(y, g(h^{-1}(z))) \geq \varepsilon.$$

Полученное противоречие показывает, что $h^{-1}(K) \subset U$. Следовательно, $U(g) \subset \chi^{-1}(A)$. $\square$

Теперь рассмотрим еще одну подгруппу группы $\text{Diff}_F(M)$. Обозначим через $G_F(M)$ множество всех $g \in \text{Diff}_F(M)$, которые являются изометрией на каждом слое слоения F , т.е. для каждого слоя L_α слоения F сужение $g: L_\alpha \rightarrow g(L_\alpha)$ является изометрией.

Замечание 1. Если $r \geq 1$, то для каждого элемента $\varphi \in G_F(M)$ дифференциал $d\varphi$ сохраняет длину каждого касательного вектора $v \in T_p F$, т.е. имеет место $|d\varphi_p(v)| = |v|$ при любом p . Если же $r = 0$, то каждый элемент φ из $G_F(M)$ является гомеоморфизмом многообразия M . Риманова метрика многообразия M индуцирует на каждом слое L_α риманову метрику, которая определяет на нем расстояние. В этом случае φ является изометрией между метрическими пространствами L_α и $\varphi(L_\alpha)$. Тогда по известной теореме φ является диффеоморфизмом L_α на $\varphi(L_\alpha)$ для каждого слоя L_α (см. [11]).

Теперь докажем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Предположим, что $\{f_m\} \in G_F(M)$ — последовательность, которая поточечно сходится на множестве $A \subset L_\alpha$, где L_α — некоторый слой слоения F . Тогда $\{f_m\}$ также поточечно сходится на $\bar{A}$ (где $\bar{A}$ — замыкание множества A в L_α).*

Доказательство. Пусть $p \in \bar{A}$, $\varepsilon > 0$. Выберем сначала такую точку $p_1 \in A$, что $d_\alpha(p, p_1) < \varepsilon/3$, и такое N , что

$$d(f_l(p_1), f_m(p_1)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad l, m \geq N,$$

где $d_\alpha(p, p_1)$ — расстояние между точками p и p_1 на слое L_α . Тогда

$$d(f_l(p), f_m(p)) \leq d(f_l(p), f_l(p_1)) + d(f_l(p_1), f_m(p_1)) + d(f_m(p_1), f_m(p)) < \varepsilon$$

для всех $m, n \geq N$. Следовательно, последовательность $\{f_m(p)\}$ фундаментальна, и из полноты многообразия M получаем, что $\{f_m(p)\}$ сходится. $\square$

Лемма 2. *Пусть A — такое множество точек на слое L_α , что для каждой точки $p \in A$ существует сходящаяся подпоследовательность $f_{m_l}(p)$ последовательности $f_m(p)$. Если множество A непусто, то $A = L_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $p \in L_\alpha$, $p^* \in A$, $r = d_\alpha(p, p^*)$, где $d_\alpha(p, p^*)$ — расстояние между точками p и p^* на L_α . Пусть подпоследовательность $\{f_{m_l}\}$ такова, что $\{f_{m_l}(p^*)\}$ сходится. Так как f_{m_l} — изометрия слоения, то расстояние $d_\alpha(p, p^*)$ между точками p и p^* на слое L_α сохраняется и

$$d_{f_l(\alpha)}(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p^*)) = d_\alpha(p, p^*),$$

где $d_{f_l(\alpha)}$ — расстояние на слое $f_{m_l}(L_\alpha)$. Пусть $q^* = \lim_{l \rightarrow \infty} (f_{m_l}(p^*))$. Тогда

$$d(q^*, f_{m_l}(p)) \leq d(q^*, f_{m_l}(p^*)) + d(f_{m_l}(p^*), f_{m_l}(p)) \leq \varepsilon + r.$$

Следовательно, множество $\{f_{m_l}(p)\}$ имеет компактное замыкание. Отсюда следует, что $p \in A$. $\square$

Следующая теорема показывает некоторое свойство группы $G_F(M)$ с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 4. *Пусть M — полное гладкое многообразие размерности n с гладким слоением F размерности k , $f_m \in G_F^r(M)$, $r \geq 0$, $m = 1, 2, \dots$. Предположим, что для каждого слоя L_α существует такая точка $o_\alpha \in L_\alpha$, что последовательность $f_m(o_\alpha)$ сходится. Тогда существует подпоследовательность f_{m_l} последовательности f_m , сходящаяся в F -компактно-открытой топологии.*

Доказательство. Пусть L_α — произвольный слой. По условиям теоремы существует такая точка $o_\alpha \in L_\alpha$, что последовательность $\{f_m(o_\alpha)\}$ сходится. По лемме 2 для каждой точки $p \in L_\alpha$ последовательность $\{f_m(p)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Отсюда следует, что последовательность $\{f_m(p)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность для всех $p \in M$.

Риманово многообразие M является сепарабельным метрическим пространством. Поэтому оно содержит всюду плотное счетное подмножество $A = \{p_i\}$. Для каждой точки p_i существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_{m_i}^i(p_i)\}$ последовательности $\{f_m(p_i)\}$. Используя диагональный процесс, можем найти подпоследовательность $\{f_{m_i}\}$, которая сходится во всех точках множества A . Так как для каждого слоя L_α существует точка $o_\alpha \in L_\alpha$, в которой последовательность $\{f_{m_i}\}$ сходится, то по лемме 2 она сходится во всех точках слоя L_α . Отсюда получим, что последовательность сходится поточечно в каждой точке M .

Теперь, полагая $\varphi(p) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{m_l}$, получим отображение $\varphi: M \rightarrow M$. Пусть $p \in L_\alpha$ для некоторого слоя L_α , $\gamma: [0, l] \rightarrow L_\alpha$ — геодезическая, которая реализует расстояние $d_0 = d_\alpha(o_\alpha, p)$ на слое L_α , и параметризованная длиной дуги, $\gamma(0) = o_\alpha$, $\gamma(l) = p$. Если рассмотрим $\gamma_l = f_{m_l}(\gamma)$, то они являются геодезическими на $f_{m_l}(L_\alpha)$. По условиям теоремы $\gamma_l(0) \rightarrow p_0$ при $l \rightarrow \infty$, где p_0 — некоторая точка из M . Тогда по теореме 2 из последовательности $\{\gamma_l(s)\}$ можно выделить подпоследовательность, которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma(0): \mathbb{R}^1 \rightarrow L(p_0)$ слоя $L(p_0)$, выходящей из точки p_0 при $s = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность $\{\gamma_l(s)\}$ сходится к $\{\gamma_0(s)\}$ для каждого $s \in [0; l]$. Отсюда следует, что $\varphi(\gamma) = \gamma_0$, т.е. отображение φ изометрично переводит L_α на $L(p_0)$.

Теперь покажем, что f_{m_l} сходится к φ равномерно на каждом компакте, лежащем на слое слое F . Пусть K — компактное множество на слое L и $\varepsilon > 0$. Так как K — компакт, то существует $(\varepsilon/3)$ -сеть, состоящая из конечного числа точек $(p_1, \dots, p_m)$, где $p_i \in L$. Для каждой точки p_i существует такой номер N_i , что

$$d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

для произвольного $m_l \geq N_i$. Кроме того, для каждой точки $p \in K$ существует такое p_i , что $d_L(p, p_i) < \varepsilon/3$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d(f_{m_l}(p), \varphi(p)) &\leq d(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p_i)) + d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) + d(\varphi(p_i), \varphi(p)) \leq \\ &\leq d_{m_l}(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p_i)) + d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) + d_l(\varphi(p_i), \varphi(p)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

для $m_l > N = \max_{1 \leq i \leq m} \{N_i\}$, где $1 \leq i \leq m$. Следовательно, получаем, что последовательность f_{m_l} сходится к φ в F -компактно-открытой топологии. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981.
3. Лукацкий А. М. Конечнопорожденность групп диффеоморфизмов // Усп. мат. наук. — 1978. — 33, № 1 (199). — С. 219–220.
4. Лукацкий А. М. Исследование геодезического потока на бесконечномерной группе Ли с использованием оператора коприсоединенного действия // Тр. Мат. ин-ти им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — 267. — С. 204–213.
5. Нарманов А. Я. О геометрии вполне геодезических римановых слоений // Мат. тр. — 1999. — 2, № 2. — С. 98–106.
6. Нарманов А. Я., Саитова С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга // Диффер. уравн. — 2014. — 50, № 12. — С. 1582–1589.
7. Нарманов А. Я., Скоробогатов Д. Изометрические отображения слоений // Докл. Акад. наук Респ. Узбекистан. — 2004. — № 4. — С. 12–16.
8. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
9. Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier. — 1966. — 16, № 1. — P. 319–361.
10. Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. — Toronto: Academic Press, 1978.

11. *Myers S., Steenrod N.* The group of isometries of a Riemannian manifold// Ann. Math. — 1939. — 40, № 2. — P. 400–416.
12. *Narmanov A., Sharipov A.* On the group of foliation isometries// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2009. — 15, № 2. — P. 195–200.
13. *Omori H.* On the group of diffeomorphisms on a compact manifold// Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — 15. — P. 167–183.
14. *Omori H.* Groups of diffeomorphisms and thier subgroups// Trans. Am. Math. Soc — 1973. — 179. — P. 85–122.
15. *Tondeur P.* Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.

Нарманов Абдигашпар Якубович

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: narmanov@mail.ru

Шарипов Анваржон Солиевич

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: asharipov@inbox.ru