Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, Локально евклидовы метрики и их изометрические реализации, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 102–111

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-102-111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:47:06

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 102–111
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-102-111

УДК 514.76

ЛОКАЛЬНО ЕВКЛИДОВЫ МЕТРИКИ И ИХ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ

© 2020 г. И. Х. САБИТОВ

Аннотация. В литературе широко представлены работы, относящиеся к метрикам и поверхностям положительной и отрицательной кривизны. В данной работе в обзорном стиле излагаются результаты, относящиеся к локально евклидовым метрикам и несущим такие метрики поверхностям. Нам представляется, что в этой тематике есть еще много задач, входящих в пересечение геометрии, комплексного анализа и дифференциальных уравнений, которые могут стать источником новых интересных исследований.

Ключевые слова: локально евклидова метрика, натуральное представление, классификация, изометрическая реализация, развертываемая поверхность, асимптотические координаты, уравнение Монжа—Ампера.

LOCALLY EUCLIDEAN METRICS AND THEIR ISOMETRIC REALIZATIONS

© 2020 I. KH. SABITOV

ABSTRACT. There are many works related to metrics and surfaces of positive and negative curvature. This paper is a survey of results related to locally Euclidean metrics and surfaces carrying such metrics. In this topic, there are many more problems included in the intersection of geometry, complex analysis, and differential equations that can become a source of new interesting research.

Keywords and phrases: locally Euclidean metric, natural representation, classification, isometric realization, developable surface, asymptotic coordinates, Monge—Ampère equation.

AMS Subject Classification: 53A05, 53C45

1. Определения и постановки вопросов. Работа написана по материалам доклада, прочитанного автором на Международной конференции «Классическая и современная геометрия», организованной Московским государственным педагогическим университетом в связи со 100-летием со дня рождения В. Т. Базылева.

Метрика n -мерного риманова многообразия называется локально евклидовой, если для каждой его точки существует окрестность, изометричная шару в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой $dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. Таких многообразий довольно много. Например, метрика любой n -мерной многогранной поверхности с выколотыми вершинами является локально евклидовой. Одним из признаков минимальности двумерной поверхности с известной метрикой ds^2 является выполнение признака Риччи: для того, чтобы поверхность с метрикой ds^2 была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы поверхность имела неположительную гауссову кривизну K и чтобы метрика $ds_e^2 = \sqrt{-K} ds^2$ была локально евклидовой вне точек, где кривизна

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ для ведущих научных школ России (проект НШ 6222.2018.1).

равна нулю. Значит, на любой минимальной поверхности «живет» некоторая локально евклидова метрика.

При изучении локально евклидовых метрик сразу возникают несколько вопросов:

1. Метрика в римановом пространстве задана квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j. \quad (1)$$

Как узнать, является ли она локально евклидовой?

2. Пусть метрика (1) локально евклидова. Как найти то изометрическое отображение в $\mathbb{R}^n$, которое существует по определению локально евклидовой метрики?
3. Каковы свойства этого отображения: класс гладкости, область существования, поведение в целом и т. д.?
4. Какие теоремы и задачи евклидовой геометрии могут быть перенесены на области с локально евклидовой метрикой?
5. При каких условиях данную локально евклидову метрику можно изометрически реализовать в виде метрики поверхности в евклидовом пространстве некоторой размерности?
6. Что можно сказать о существовании, свойствах, уравнениях и т. д. поверхностей с локально евклидовой метрикой?

2. О натуральном представлении локально евклидовых метрик. При задании локально евклидовой метрики в общем виде (1) в некоторой области D переменных $u^1, \dots, u^n$ мы геометрию на самом деле не видим, так как, например, геодезические в D будут, вообще говоря, некоторыми кривыми, и ни их длины, ни углы между ними мы не можем видеть даже в размерности $n = 2$ (все эти величины можно найти только вычислениями по соответствующим формулам). А если мы найдем изометрическое отображение метрики в $\mathbb{R}^n$, то геодезические перейдут в прямые, ортогональные линии будут образовывать углы в 90° и т. д.; значит, можно сказать, что изометрический образ в $\mathbb{R}^n$ области D с локально евклидовой метрикой будет представлять собой, по крайней мере локально, наглядную картину геометрии в D . Поэтому этот образ естественно назвать *натуральным* представлением заданной в D локально евклидовой геометрии. Такое представление пока сделано только в двумерном случае. Но для любой размерности можно заранее знать класс гладкости перехода от заданной произвольным образом (1) локально евклидовой метрики к ее натуральному представлению и таким образом найти ответ на один из вопросов из п. 3. Именно, верна следующая теорема о гладкости изометрий.

Теорема 1 (см. [6, 8, 14]). Пусть два изометричных n -мерных римановых многообразия имеют метрики

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j, \quad d\sigma^2 = h_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

класса гладкости $C^{k,\alpha}$, $0 \leq k < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $k + \alpha > 0$. Тогда изометрия между ними имеет гладкость класса $C^{k+1,\alpha}$. В случае их аналитичности или гладкости класса C^∞ изометрия будет такого же класса гладкости. При задании метрик непрерывными формами изометрия в общем случае будет только класса $C^{0,1}$.

Замечание 2. Нетривиальность этой теоремы в том, что в определении изометрического отображения априори нет никакого требования о классе его гладкости, есть только требование, чтобы оно сохраняло расстояния между соответствующими точками в прообразе и образе. Из этого можно сразу получить только принадлежность изометрии классу Липшица $C^{0,1}$.

Поскольку стандартная метрика в $\mathbb{R}^n$ аналитическая, следовательно, гладкость изометрии локально евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$ на единицу выше ее гладкости в исходно заданном представлении (1).

Отметим, что такой же подход к поиску натурального представления можно применить и к метрикам, которые локально являются метриками постоянной отрицательной или положительной кривизны. но это пока никем не сделано.

3. Случай двумерных локально евклидовых метрик. Поскольку в этом случае любую метрику можно привести к изотермическим координатам, считаем, метрика уже задана в изотермическом виде

$$ds^2 = \Lambda^2(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2). \quad (2)$$

Локальная евклидовость метрики в виде (2) дается следующим простым условием: для того, чтобы метрика (2) с непрерывным коэффициентом Λ была локально евклидовой, необходимо и достаточно, чтобы функция $\ln \Lambda$ была гармонической. Далее легко проверяется, что для того, чтобы функция

$$z = x + iy = \Phi(\zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (3)$$

изометрически отображала область D с метрикой (2) в евклидову плоскость (x, y) с метрикой $dx^2 + dy^2$, необходимо и достаточно, чтобы она была голоморфной в D , при этом связь с коэффициентом Λ дается простым равенством

$$|\Phi'(\zeta)| = \Lambda(\zeta).$$

В случае односвязной области D функция $\Phi(\zeta)$ определяется по известному значению модуля ее производной (подробности см. в [9, 19]), и получается, что найденное отображение будет однозначным, т.е. верна следующая теорема.

Теорема 3. Любая локально евклидова метрика, заданная в односвязной области, изометрически погружается в евклидову плоскость.

Это значит, что мы можем «видеть» всю геометрию этой метрики наглядно. Но образ при погружении может иметь самопересечения, поэтому интересно знать случаи, когда метрику можно вложить в плоскость, т.е. когда абстрактно заданная локально евклидова метрика на самом деле является «замаскированным» представлением евклидовой геометрии некоторой односвязной области обычной евклидовой плоскости. Здесь тоже можно указать некоторые интересные признаки вложимости (т.е. однолистности функции $\Phi(\zeta)$), выражаемые через свойства коэффициента Λ (см. [9, 19]).

Переходим к случаю задания локально евклидовой метрики в многосвязной области. Здесь задача поиска ее натурального представления оказывается более сложной с большим количеством вариантов решения. Пусть метрика (2) задана в $(n+1)$ -связной области Ω с круговыми границами $\Gamma_j : |\zeta - \zeta_j| = R_j$, $1 \leq j \leq n$, расположенными внутри окружности $\Gamma_0 : |\zeta| = R_0$. По-прежнему голоморфная функция $\Phi(\zeta)$, локально конформно отображающая область Ω в евклидову плоскость, задается своей производной $\Phi'(\zeta)$ с условием $|\Phi'(\zeta)| = \Lambda(\zeta)$. На этот раз нахождение Φ' и Φ является более трудной, но все же выполнимой задачей, и в итоге приходим к формулам следующих видов (случай области концентрического кольца):

$$\Phi'(\zeta) = \zeta^c A(\zeta), \quad \Phi(\zeta) = d_0 \ln \zeta + \zeta^{1+c} B(\zeta),$$

где $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ — некоторые однозначные голоморфные функции, а c и d_0 — некоторые (вообще говоря, комплекснозначные) числовые коэффициенты, явно определяемые через метрику (2).

В случае целого показателя c функция $\Phi'(\zeta)$ будет однозначной, но $\Phi(\zeta)$ будет однозначной только при дополнительном условии $d_0 = 0$. При $d_0 \neq 0$ отображение Φ имеет неоднозначность как у логарифмической функции, и изометрического погружения в $\mathbb{R}^2$ нет, а образ $\Phi(\Omega)$ будет похожим на развертку цилиндра, поэтому этот тип особенности мы называем *цилиндрическим*. При c нецелом отображение Φ тоже не будет однозначным, а образ $\Phi(\Omega)$ будет похожим на развертку конуса, поэтому этот тип особенности мы называем *коническим*. По-видимому, в натуральном представлении локально евклидовых метрик *соответствия торсам нет*. Это может быть связано с тем, что сферический образ каждой торсиальной поверхности оказывается представимым также как сферический образ некоторой конической поверхности, как это установлено в [12], но вообще этот феномен — отсутствие выделения признаков торсов по внутренней геометрии областей с локально евклидовой метрикой — требует отдельного исследования.

Пример 4. Рассмотрим в кольце $\Omega : R_0 \leq |\zeta| \leq R_1$ локально евклидову метрику

$$ds^2 = \rho^{2a}(d\xi^2 + d\eta^2), \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2. \quad (4)$$

Рис. 1. Цилиндрическое вложение.

Рис. 2. Конические вложения.

Для этой метрики имеем

$$\Phi'(\zeta) = \zeta^a, \quad \Phi(\zeta) = \frac{\zeta^{a+1}}{a+1}, \quad a \neq -1; \quad \Phi(\zeta) = \ln \zeta, \quad a = -1.$$

Значит, при целом $a \neq -1$ метрика (4) изометрически погружается в $\mathbb{R}^2$ в виде $|a+1|$ раз покрытого кольца, но при $a = -1$ погружения нет. Погружения нет и при нецелых a : образом кольца Ω будет область кругового сектора в виде развертки конуса.

4. Изометрические погружения локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^3$. Начнем с изометрических погружений локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^2$, которые на самом деле можно рассматривать как специальный случай поиска изометрической реализации заданной метрики как метрики поверхности в пространстве, в данном случае, в виде области на плоскости, что возможно только для метрик постоянной кривизны, в том числе и для метрик отрицательной или положительной кривизны с отображением их соответственно на плоскость Лобачевского или сферу (такая постановка задачи пока нигде не использована).

Образ области D в $\mathbb{R}^2$ при отображении (3) дает нам наглядное представление ее локально евклидовой геометрии. Отображение (3) может быть однолиственным; тогда имеем *изометрическое вложение* метрики (2) в $\mathbb{R}^3$ в виде плоской области; отображение может быть однозначным, но многолиственным, т.е. с самоналожениями, и тогда имеем *изометрическое погружение* метрики в $\mathbb{R}^3$ в виде области на плоскости. Напомним, в частности, что односвязная область с локально евклидовой метрикой всегда погружается в плоскость $\mathbb{R}^2$.

Наконец, отображение $z = \Phi(\zeta)$ может быть многозначным в виде логарифмической или степенной функции с нецелым показателем. Напомним, что последнее бывает только если область D многосвязная, и случаи логарифмической или степенной особенности соответствуют цилиндрическому или коническому строению соответствующей поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Перейдем к изометрическим вложениям в $\mathbb{R}^3$. Выше мы видели, что локально евклидову метрику иногда можно, а иногда нельзя погрузить в $\mathbb{R}^2$. Оказывается, это свойство существенно для возможности ее изометрического вложения в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 5 (см. [3, 4, 7]). Пусть в компактной области D с гладкостью границы C^2 и выше задана локально евклидова метрика, допускающая изометрическое погружение в E^2 . Тогда ее можно изометрически вложить в E^3 в виде цилиндрической или конической поверхности класса C^∞ и с границей той же гладкости, что и у D .

Следствие 6. Любая двумерная компактная односвязная область с локально евклидовой метрикой допускает изометрическое вложение в $\mathbb{R}^3$.

Отметим, что аналога этого утверждения для n -мерных областей с локально евклидовой метрикой пока нет (т.е. неизвестна та минимальная размерность евклидова пространства, куда изометрически можно погрузить или вложить любую локально евклидову метрику, заданную в n -мерном шаре).

Рис. 3. Пример трехсвязной области из теоремы 9.

Пример 7. Доказательство теоремы конструктивное. Вложение мы строим в виде цилиндрической поверхности, а можно и в виде конической (рис. 1 и 2). Рассмотрим примеры вложения метрики (4) с $a = 1$:

$$ds^2 = 4(\xi^2 + \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2).$$

Для этой метрики имеем

$$\Phi(\zeta) = \zeta^2,$$

так что погруженным образом кольца Ω в $\mathbb{R}^2$ будет дважды покрытое кольцо.

Выше было сказано, что любую локально евклидову метрику, заданную в односвязной области, можно изометрически вложить в $\mathbb{R}^3$. В то же время мы знаем, что в двусвязной области существуют метрики цилиндрического и конического типа, которые нельзя погрузить в $\mathbb{R}^2$. Тем не менее оказывается, что верна следующая теорема.

Теорема 8 (см. [7]). *Любую локально евклидову метрику, заданную в двусвязной области, можно изометрически погрузить в $\mathbb{R}^3$.*

Если метрика имеет особенность цилиндрического типа, то построить ее изометрическое погружения в $\mathbb{R}^3$ просто. Но построение погружения метрики с конической особенностью требует некоторой изобретательности.

А вот начиная с трехсвязных областей ситуация уже другая.

Теорема 9 (см. [7]). *В трехсвязных областях существуют локально евклидовы метрики, не допускающие изометрического погружения в $\mathbb{R}^3$ даже в классе C^1 -гладких линейчатых поверхностей.*

Соответствующий пример трехсвязной области с л. е метрикой дается на рис. 3. Локально евклидова метрика в этой области получается отождествлением отрезков A_1B_1 и A_2B_2 (получится замкнутая граничная линия A_1A_2 ; еще одна граничная кривая K_1K_2 получится после отождествления отрезков K_1N_1 и K_2N_2 ; наконец, третья граничная кривая состоит из дуг $B_1C_1N_1N_2D_1D_2C_2B_2B_1$).

Невозможность существования изометрического погружения этой области в $\mathbb{R}^3$ следует из того, что найдутся образующие, выходящие из точек на линии A_1A_2 , которые пересекутся с образующими, выходящими из точек линии K_1K_2 , что возможно только если все точки этих образующих планарные, а они не все планарные, так как линии A_1A_2 , K_1K_2 не являются отрезками прямых.

Отметим, что в [2, в п. 3.2.1(F)] без доказательства тоже приводится утверждение о существовании трехсвязных областей с локально евклидовой метрикой, изометрически непогружаемых в $\mathbb{R}^3$ в классе классически регулярных развертывающихся поверхностей.

5. Изометрические погружения в $\mathbb{R}^3$ листа Мебиуса. Как ни странно, первое изометрическое вложение плоского листа Мебиуса в явном виде было получено лишь в 1989 г. в [20], хотя первая известная нам работа [15] на эту тему была опубликована еще в 1898 г.¹ Гладкую неориентируемую поверхность с локально евклидовой метрикой, диффеоморфную прямоугольному листу Мебиуса, будем называть *лентой Мебиуса*, а если она к тому же изометрична некоторому прямоугольному листу Мебиуса, тогда мы ее будем называть *стандартной лентой Мебиуса*. В [10] (см. также [19]) о стандартных лентах Мебиуса получено следующее общее утверждение.

Теорема 10. *Для того, чтобы аналитическая замкнутая кривая Γ была средней линией стандартной ленты Мебиуса, необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна была антипериодической и чтобы в точках обращения кривизны в нуль кручение кривой имело нуль не меньшего порядка, чем кривизна. При этом лента Мебиуса даже в классе C^2 -гладких поверхностей определяется своей заданной аналитической средней линией единственным образом.*

Одним из интересных следствий, полученных в ходе доказательства этой теоремы, было установление того факта, что замкнутые аналитические кривые в $\mathbb{R}^3$ делятся на *два непересекающихся класса*, характеризующихся периодичностью или антипериодичностью их главных нормалей и биномалей.

Общая лента Мебиуса изометрична плоской полосе с криволинейными боковыми краями и параллельными отождествляемыми поперечными краями. Для вывода уравнения общей ленты Мебиуса в [10] тоже есть соответствующая теорема, связывающая ее образующие с ее средней линией.

Некоторое время назад в литературе обсуждался вопрос о нахождении простейшего уравнения ленты Мебиуса. Это вопрос можно ставить в разном виде. Во-первых, можно искать простейшее уравнение в параметрическом виде; но здесь нет точного критерия простоты — искать простейшее уравнение средней линии или же простейшее в каком-то смысле уравнение, включая и представление направлений образующих. В вопрос можно включить еще требование, чтобы лента была изометрична плоскому прямоугольнику, т.е. была стандартной лентой Мебиуса. Если говорить о простейшем представлении средней линии для общей ленты Мебиуса, то оно дано в [10] в виде $(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \varphi \sin \varphi)$ как пересечение двух поверхностей 2-го порядка (средняя линия в [20] получается как пересечение двух алгебраических поверхностей 4-го и 6-го порядков, к тому же отметим, что аналитической ленты Мебиуса с плоской средней линией не может быть). Во-вторых, вопрос можно поставить более определенным образом, а именно, искать для всей ленты ее алгебраическое уравнение *наименьшей* степени. Описанное в 1930-х гг. Wunderlich'ом алгебраическое уравнение ленты Мебиуса имеет степень порядка 40, а уравнение Шварца в алгебраическом виде приводит к уравнению 20-й степени. В [10] найдена общая лента Мебиуса с уравнением 7-й степени.

Однако отметим, что найденное уравнение не дает стандартную ленту Мебиуса, поэтому остается открытым вопрос: какое алгебраическое уравнение наименьшей степени описывает стандартную ленту Мебиуса? Отметим также, что мы не утверждаем, что и для общей ленты Мебиуса нет уравнения меньшей степени, чем в [10].

6. Поверхности с локально евклидовой метрикой. Для нас самое интересное — это строение поверхностей с локально евклидовой метрикой. Из университетского курса дифференциальной геометрии известно, что такие поверхности называются *развертывающимися*, и они состоят из прямолинейных образующих, использование которых позволяет представить параметризацию поверхности в так называемых *асимптотических координатах* в виде уравнения

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u), \quad (5)$$

¹Но она еще требует своего осмысления, так как параллельно в той же работе утверждается, что поверхность с уравнением $x^2(1-z) = zy^2$ является односторонней, что заведомо предполагает некоторое специальное понимание односторонности с использованием нерегулярности поверхности.

Рис. 4. Пример из книги [18].

где $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u)$ — радиус-вектор направляющей линии, а $\mathbf{b}(u)$ — единичные векторы образующих прямых. Они удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{b}(u) \nparallel \mathbf{a}'(u), \quad (\mathbf{a}'(u), \mathbf{b}(u), \mathbf{b}'(u)) = 0. \quad (6)$$

Однако обычно ничего не говорится о связи между классами гладкости поверхности и векторов $\mathbf{a}(u)$ и $\mathbf{b}(u)$. Неожиданно оказалось, что поверхность может быть класса гладкости C^∞ , а направляющий вектор $\mathbf{b}(u)$ образующих при этом не принадлежит даже классу гладкости C^1 , поэтому установить реальный класс гладкости поверхности по гладкости ее уравнения (5) в асимптотических координатах не представляется возможным.

Пример такой ситуации иллюстрирует рис. 4 из [21] (сам пример взят из [18]).

Более того, может быть, что поверхность имеет локально евклидову метрику, а на ней нет ни одного прямолинейного отрезка (см. [1]). Такая ситуация возможна в классах гладкости $C^{1,\alpha}$, $\alpha < 1/7$. Поэтому появилась необходимость выявить условия, при которых поверхность с локально евклидовой метрикой имеет обычное классическое строение с образующими. Это сделано А. В. Погореловым в 1956 г. (см. [5, гл. IX]) введением класса C^1 -гладких поверхностей ограниченной внешней кривизны (ОВКП). На таких поверхностях с локально евклидовой метрикой через каждую точку проходит прямолинейный отрезок, вдоль которого касательная плоскость постоянна. Есть точки, называемые *планарными*, у которых на поверхности существует плоская окрестность; но если точка *непланарная*, то через нее проходит *единственная* образующая, идущая в обе стороны до края поверхности. Такие поверхности называются *торсами*. То их строение, которое гарантируется в классе ОВКП, принимается в общем случае за их определение, и тогда они называются *нормальными развертывающимися* поверхностями (НРП) (по Бураго и Шефелю). Нашей ближайшей целью является указание свойств гладкости участвующих в параметризации (5) направляющих кривых и поля векторов образующих.

Прежде всего рассмотрим «хорошие» случаи, когда на поверхности нет точек уплощения, в которых у второй квадратичной формы равны нулю все коэффициенты, т.е. все производные 2-го порядка обращаются в нуль. В этом случае установлено, что гладкости поверхности и задающих ее уравнение в асимптотических координатах векторов находятся в естественном соотношении.

Теорема 11 (см. [17, 19, 21, 22]). *Для того, чтобы развертывающаяся поверхность без точек уплощения имела гладкость класса C^n , $n \geq 2$, необходимо и достаточно, чтобы она имела асимптотическую параметризацию (5) с $\mathbf{a}(u) \in C^n$, $\mathbf{b}(u) \in C^{n-1}$, но в общем случае соотношения $\mathbf{b}(u) \in C^n$ может и не быть.*

Вопрос об аналитическом описании НРП в общем случае стоял давно, еще с 1970-х гг., но решение было получено совсем недавно. Именно, доказана следующая теорема.

Теорема 12 (см. [12]). *Для того, чтобы поверхность класса C^1 была НРП с гладкостью C^n , $n \geq 1$, необходимо, чтобы она принадлежала классу Погорелова ОВКП и имела асимптотическую параметризацию (5), в которой направляющие векторы $\mathbf{b}(u)$ образующих принадлежат по крайней мере классу Липшица $C^{0,1}$, а направляющая имеет гладкость C^n , с выполнением в точках существования производных $\mathbf{b}'(u)$ равенства (6).*

Конечно, для всех классов гладкости в этой теореме интерес только в утверждении о $C^{0,1}$ -гладкости векторов $\mathbf{b}(u)$, а для класса C^1 она может быть сформулирована так: для того, чтобы C^1 -гладкая поверхность с локально евклидовой метрикой была торсом, необходимо, чтобы она была класса ОВКП (напомним, достаточность доказана А. В. Погореловым).

Но теорема 12 не дает никакой информации об истинной гладкости НРП по дифференциальным свойствам направляющей линии $\mathbf{a}(u)$ и вектора направлений $\mathbf{b}(u)$.

7. Уравнение Монжа—Ампера. «Истинная» регулярность любой поверхности может быть проверена ее представлением в декартовых координатах. Если поверхность представлена в виде $z = z(x, y)$, локальная евклидовость ее метрики обеспечивается выполнением уравнения

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0, \quad (7)$$

которое мы называем *тривиальным уравнением Монжа—Ампера* (некоторые авторы его называют *вырожденным уравнением Монжа—Ампера*).

Остановимся на локальных свойствах решений этого уравнения, имеющих некоторые аналогии с решениями эллиптических уравнений — с явлениями устранимости особых точек и повышения фактической гладкости решений.

Известно, что формально требуемая гладкость решений эллиптического уравнений фактически может быть повышена в зависимости от гладкости коэффициентов уравнения. Похожее свойство имеет место и для решений уравнения (7).

Теорема 13 (см. [19, 21, 22]). *Пусть решение $z(x, y)$ уравнения (7) таково, что $z(x, y) \in C^n$, $n \geq 2$, и $z_{xx} \neq 0$. Тогда*

$$\frac{z_{xy}}{z_{xx}} \in C^{n-1}, \quad \frac{z_{yy}}{z_{xx}} \in C^{n-1}.$$

Это свойство существенно используется при доказательстве локальных свойств, связанных с поведением решений в окрестности изолированных особых точек. Например, имеет место некоторый аналог теорем об устранимых особых точках, как в случае гармонических функций, т.е. решений уравнения Лапласа. Пусть D и D_0 обозначают соответственно области $x^2 + y^2 < r^2$ и $0 < x^2 + y^2 < r^2$. Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 14. *Пусть функция $z = z(x, y)$ принадлежит классу $C^1(D) \cap C^2(D_0)$ и удовлетворяет в D_0 уравнению (7). Тогда вторые производные функции $z(x, y)$ можно непрерывно продолжить в точку $(0, 0)$ так, что функция $z(x, y)$ оказывается на самом деле функцией класса $C^2(D)$.*

Переходим к глобальным свойствам решений уравнения (7). В [5] доказана теорема, утверждающая, что полная C^1 -гладкая поверхность класса ОВКП с локально евклидовой метрикой является цилиндром, поэтому любое решение уравнения (7), определенное над всей плоскостью, является цилиндром. Однако можно поставить вопрос о том, что будет, если допускать существование особых точек, в которых нет гладкости решения. Примером такого решения является уравнение прямого кругового конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Первый раз такой вопрос был поставлен автором в 2009 г., и тогда же был получен ответ, что при наличии только одной особой точки такой поверхностью может быть только произвольная коническая поверхность (т.е. развертываемая поверхность, у которой все образующие пересекаются в одной точке). Затем им же был придуман пример, когда есть счетное число особых точек, дискретно расположенных на одной прямой, а также и другие примеры счетного множества особых точек со специальным их расположением. Затем Ю. А. Аминов показал, как построить решение, особые точки которого расположены в вершинах произвольного выпуклого многоугольника. Наконец, была доказана следующая теорема.

Теорема 15 (см. [13, 16]). Пусть на плоскости (x, y) задано произвольное конечное множество точек M . Тогда уравнение (7) имеет решения, определенные на всей плоскости, принадлежащие классу C^∞ всюду, кроме точек множества M , в которых они непрерывны и графически локально устроены как конические поверхности с вершинами в этих точках.

8. Локально евклидовы метрики и конформные отображения. Завершим статью частичным примером ответа на 4-й из сформулированных в п. 1 вопросов. В [11] поставлена и решена задача о нахождении в круге локально евклидовой метрики в изотермических координатах по ее данной на границе геодезической кривизне. При изометрическом погружении искомой метрики в $\mathbb{R}^2$ геодезическая кривизна кривой переходит в обычную кривизну ее образа на плоскости. Знание кривизны кривой в функции длины дуги позволяет найти по натуральным уравнениям саму кривую, т.е. в итоге можем найти область D , ограниченную этой кривой, а изометрическое отображение круга с локально евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^2$ оказывается конформным отображением круга на эту область D . Таким образом, поиск локально евклидовой метрики в круге с данной геодезической кривизной границы оказывается аналогом задачи нахождения области на обычной плоскости по кривизне ее края. Сведение этой задачи к задаче нахождения локально евклидовой метрики в круге по геодезической кривизне границы позволяет представить поиск конформного отображения круга на область D с известной кривизной края как решение некоторого сильно нелинейного интегро-дифференциального уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов Ю. Ф. Нерегулярные поверхности класса $C^{1,\beta}$ с аналитическими метриками // Сиб. мат. ж. — 2004. — 45, № 1. — С. 25–61.
2. Громов М. Л. Дифференциальные соотношения с частными производными. — М.: Мир, 1990.
3. Михалев С. Н., Сабитов И. Х. Изометрические вложения локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^3$ в виде конических поверхностей // Мат. заметки. — 2014. — 95, № 2. — С. 63–73.
4. Михалев С. Н., Сабитов И. Х. Изометрические вложения в $\mathbb{R}^3$ кольца с локально евклидовой метрикой с цилиндрически типом неоднозначности // Мат. заметки. — 2015. — 98, № 3. — С. 378–385.
5. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1968.
6. Решетняк Ю. Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. — Новосибирск: Наука, 1982.
7. Сабитов И. Х. Изометрические погружения локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. мат. ж. — 1985. — 26, № 3. — С. 156–167.
8. Сабитов И. Х. К вопросу о гладкости изометрий // Сиб. мат. ж. — 1992. — 34, № 4. — С. 169–176.
9. Сабитов И. Х. Изометрические погружения и вложения локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^2$ // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — 63, № 6. — С. 147–166.
10. Сабитов И. Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Изв. РАН. Сер. мат. — 2007. — 71, № 5. — С. 197–224.
11. Сабитов И. Х. Локально-евклидовы метрики с заданной геодезической кривизной края // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — 266. — С. 218–226.
12. Сабитов И. Х. О внешней кривизне и внешнем строении C^1 -гладких нормальных развертывающихся поверхностей // Мат. заметки. — 2010. — 87, № 6. — С. 900–906.
13. Сабитов И. Х. Решения тривиального уравнения Монжа–Ампера с изолированными особыми точками // Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — 13. — С. 740–743.
14. Calabi E., Hartman P. On the smoothness of isometries // Duke Math. J. — 1970. — 37, № 4. — P. 741–750.
15. Delaunay N. Sur les surfaces n'ayant qu'un côté et sur les points singuliers des courbes planes // Bull. Soc. Math. Fr. — 1898. — 26. — P. 43–52.
16. Galvez J. A., Nelli B. Entire solutions of the degenerate Monge–Ampere equation with a finite number of singularities // J. Differ. Equ. — 2016. — 201. — P. 6614–6631.
17. Hartman P., Nirenberg L. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign // Am. J. Math. — 1959. — 81, № 4. — P. 901–920.
18. Klingenberg W. A Course in Differential Geometry. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1978.
19. Sabitov I. Kh. Isometric immersions and embeddings of locally Euclidean metrics // Rev. Math. Math. Phys. — 2008. — 13, № 1. — P. 1–276.
20. Schwarz G. A pretender to the title “Canonical Möbius strip” // Pac. J. Math. — 1990. — 143. — P. 195–200.

21. *Ushakov V.* Parametrization of developable surfaces by asymptotic lines// Bull. Austr. Math. Soc. — 1996. — 54. — P. 411–421.
22. *Ushakov V.* The explicit general solution of trivial Monge–Ampère equation// Comment. Math. Helvet. — 2000. — 75. — P. 125–133.

Сабитов Идждад Хакович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: isabitov@mail.ru