Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Субботин, О многогранниках с ромбическими вершинами и правильными гранями, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 112–117

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-112-117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:48:22

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 112–117
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-112-117

УДК 514.172.45

О МНОГОГРАННИКАХ С РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ И ПРАВИЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

© 2020 г. В. И. СУББОТИН

Аннотация. Рассмотрен класс замкнутых выпуклых многогранников с правильными гранями в E^3 , у которых звезды некоторых вершин симметричны и состоят из равных и одинаково расположенных ромбов (RR -многогранники). Доказана теорема о полной классификации RR -многогранников с двумя остроугольными ромбическими вершинами, звезды которых отделены поясом правильных граней одного типа. В доказательстве используется ранее полученный автором результат о существовании двух многогранников указанного класса.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, симметричная ромбическая вершина, звезда вершины, пояс правильных граней, RR -многогранник.

ON POLYHEDRA WITH RHOMBIC VERTICES AND REGULAR FACES

© 2020 V. I. SUBBOTIN

ABSTRACT. In this paper, we consider the class of closed convex polyhedra with regular faces in E^3 for which the stars of some vertices are symmetric and consist of equal and identically located rhombuses (RR -polyhedra). We obtain a complete classification of RR -polyhedra with two acute-angled rhombic vertices whose stars are separated by a belt of regular faces of the same type. The proof is based on a result on the existence of two polyhedra of this class obtained by the author earlier.

Keywords and phrases: convex polyhedron, symmetric rhombic vertex, star of the vertex, belt of regular faces, RR -polyhedron.

AMS Subject Classification: 52B10, 52B15

В настоящее время существует большое число исследований, посвященных изучению классов многогранников, связанных с правильными многогранниками (см. [1, 2, 5–10]). Вопрос о возможности комбинаторного или метрического описания всего класса многогранников с заданными условиями симметрии (в частности, условиями правильности) — один из важных вопросов, возникающий при исследовании симметрии многогранников (см. [5]). Если класс многогранников с заданными условиями симметрии содержит класс правильных (платоновых), то в этом случае можно говорить об обобщении класса правильных многогранников. Например, в случае одних лишь условий правильности граней замкнутых выпуклых многогранников в E^3 найден их полный перечень (многогранники Джонсона—Залгаллера; см. [6, 10]), который, очевидно, содержит в себе правильные многогранники.

Конечно, при описании класса многогранников с заданными условиями симметрии не всегда можно говорить об описании класса с точностью до изометрии или подобия.

Наибольший интерес представляют жесткие условия симметрии, то есть такие условия, которые позволяют описывать класс многогранников по крайней мере с точностью до комбинаторной

эквивалентности. Например, жесткими являются условия правильности граней для многогранников Джонсона—Залгаллера, а также условие транзитивности группы поворотов (с отражениями) на вершинах многогранника (случай изогонов; см. [5]. Заметим также, что жесткими являются условия симметрии, рассмотренные автором в [3, 4]. В частности, в [4] получено полное перечисление так называемых многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней (« FS -многогранников») с точностью до комбинаторного строения и с точностью до сохранения направления и порядка осей вращения каждой грани.

В настоящей работе мы рассмотрим такой тип жестких условий симметрии, который позволит с точностью до подобия описать весь класс многогранников с этими условиями. Условия симметрии приведут к классу многогранников, который содержит, в частности, важный и в кристаллографии многогранник — удлинённый ромбододекаэдр.

Рассмотрим замкнутый выпуклый многогранник M в E^3 . Введем необходимую терминологию. Звезда вершины V многогранника, обозначаемая далее $\text{Star}(V)$ — это совокупность всех граней, имеющих одну общую вершину, совпадающую с V . Предположим, что множество $\text{Star}(V)$ состоит из n равных и одинаково расположенных, т.е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов (не квадратов). Если V принадлежит оси вращения порядка n множества $\text{Star}(V)$, то в этом случае будем говорить, что $\text{Star}(V)$ — симметричная n -ромбическая звезда, а V — симметричная n -ромбическая вершина. Если V является вершиной только острых углов ромбов звезды $\text{Star}(V)$, то V будем называть остроугольной. Ромбическую вершину будем называть *изолированной*, если ее звезда не имеет общих элементов со звездой любой другой ромбической вершины многогранника.

Две равные симметричные n -ромбические звезды $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$, расположенные друг к другу своими вогнутыми сторонами, будем называть *зеркально расположенными*, если вершины V и W расположены либо на оси вращения порядка n так, что $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$ симметричны относительно плоскости, либо $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$ могут быть совмещены при помощи зеркального поворота вокруг оси порядка $2n$, проходящей через их вершины.

Зеркальный поворот вокруг оси L — это композиция поворота вокруг оси L и отражения в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Поясом, или замкнутой последовательностью граней, называется связное множество граней $F_1, F_2, \dots, F_n$ такое, что любые две грани F_i, F_{i+1} и также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани множества не имеют общих ребер.

Определение 1. Пусть у многогранника существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причем каждая грань, не входящая в звезду ромбической вершины, является правильной. Тогда такой многогранник будем называть RR -многогранником (от слов «rombic» и «regular»).

Наша цель в данной работе — найти все RR -многогранники с двумя изолированными зеркально расположенными ромбическими звездами, вершины которых симметричны, остроугольные и которые отделены друг от друга поясом правильных граней одного типа. Этот класс многогранников не пуст: ему принадлежит, например, удлинённый ромбический додекаэдр. RR -многогранники, удовлетворяющие таким условиям, представляют собой как бы «правильные многогранники с ромбическими вершинами».

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть множество ромбических граней RR -многогранника M представляет собой две изолированные зеркально расположенные ромбические звезды $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$. Если ромбические вершины V, W остроугольные и звезды $\text{Star}(V), \text{Star}(W)$ отделены друг от друга поясом правильных граней одного типа, то M может быть только одним из следующих многогранников:

- (i) удлинённым ромбическим додекаэдром;
- (ii) 20-гранником, у которого пояс правильных граней составлен из квадратов;
- (iii) 24-гранником, у которого пояс правильных граней состоит из треугольников.

Замечание 1. Многогранники, удовлетворяющие условиям теоремы, называются далее RR -многогранниками первого класса.

Доказательство. Пусть V — n -ромбическая вершина. Граница ромбической звезды $\text{Star}(V)$ представляет собой замкнутую пространственную ломаную, которую будем обозначать Γ_V . Обозначим $U_i, i = 1, 2, \dots, n$, вершины границы Γ_V , соседние с вершиной V . Пусть U — одна из этих вершин. Обозначим α угол с вершиной U , сторонами которого являются две стороны соседних ромбов, принадлежащих Γ_V . Угол α и все ему эквивалентные в Γ_V для наглядности будем называть *свободными*.

Отметим, что если стороны каждого угла $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$, с вершиной U_i являются двумя сторонами соответственно только одного равностороннего треугольника T_i , то мы не получим пояса из треугольных граней, отделяющего две ромбические звезды $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$. Действительно, в этом случае множество граней $T_i, i = 1, 2, \dots, n$, и всех соседних с ними треугольных граней не будет удовлетворять определению пояса (рис. 1(a)). Таким образом, при любом $n \geq 3$ в свободные углы $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$, звезды $\text{Star}(V)$ нельзя поместить только по одному равностороннему треугольнику.

1. Рассмотрим случай, когда $n = 3$, то есть случай трехгранной симметричной ромбической вершины. Покажем, что в этом случае не существует многогранников, удовлетворяющих условиям теоремы.

В свободные углы нельзя поместить по два равносторонних треугольника. Действительно, в случае существования у такого многогранника, очевидно, возможна только зеркально-поворотная ось VW . Однако пояс треугольных граней $ABCDEF \dots$ (рис. 1(b)) в этом случае невозможен. Действительно, вместо граней AB и EF мы получим, соответственно, два параллелограмма P и Q (рис. 1(c)) и две ромбические вершины многогранника будут отделены поясом равных параллелограммов (см. [3]). Это так называемый *удлиненный ромбоэдр*. Он является по терминологии [3] одним из RS -многогранников.

Так как внутренние острые углы ромбов 3-ромбической симметричной вершины V равны свободным углам (рис. 1(d)), то при $n = 3$ нельзя поместить в свободные углы правильный k -угольник при $k > 3$. Поэтому в случае $n = 3$ не существует RR -многогранников первого класса.

2. Рассмотрим теперь случай $n = 4$. Покажем, что в этом случае существует только два многогранника, удовлетворяющих условиям теоремы.

Невозможны многогранники с помещенными в свободные углы по одному равностороннему треугольнику. Это показывается так же, как и в случае $n = 3$.

Если в свободные углы поместить по два равносторонних треугольника, то существует 24-гранник с зеркально-поворотной осью VW 8-го порядка (рис. 2(c)). Существование и единственность такого многогранника доказаны автором в [3].

Покажем, что при $n = 4$ не существует многогранника с помещенными в свободные углы квадратами.

Для этого рассмотрим два смежных ребра m и n , инцидентные вершине S (рис. 1(e)), которые являются сторонами квадратной грани. Переходя от пары ребер (m, n) к паре ребер (p, q) , где $m \parallel p, n \parallel q$, затем к паре (r, t) , где $r \parallel p, t \parallel q$, получим, что острый угол ромба равен $\pi/2$. Это противоречит тому, что ромбические вершины остроугольные. Полученное противоречие доказывает, что в этом случае многогранник невозможен.

Невозможность многогранника при $n = 4$ с поясом из правильных k -угольников, $k \geq 6$, для случая зеркально-поворотной оси вращения, следует из того, что в вершине S и ей эквивалентных (рис. 1(e)), в этом случае сумма плоских углов будет больше 2π .

При $n = 4$ пояс из правильных 5-угольников, отделяющий две ромбические звезды $\text{Star}(V)$ и $\text{Star}(W)$, построить нельзя и в случае обычной оси вращения, и в случае зеркально-поворотной оси (рис. 1(f), (g)). То же верно, очевидно, и для правильных k -угольников для $k = 7$.

В случае $k > 7$ невозможен пояс из правильных k -угольников и в случае обычной оси вращения, так как в этом случае сумма плоских углов в вершине U и ей эквивалентных будет больше 2π .

Рис. 1. К доказательству теоремы 1

Таким образом, в случае $n = 4$ остается возможность существования многогранника с поясом правильных 6-угольников и с обычной осью вращения 4-го порядка. Такой многогранник действительно существует. Это известный удлинённый ромбический додекаэдр (рис. 2(a)). По терминологии [4] этот многогранник является одним из полностью перечисленных в [4] RS -многогранников.

3. $n = 5$. Пусть к свободным углам α_i приставлены по два равносторонних треугольника. Тогда угол 1 между ребрами m и n не равен углу между ребрами p и q (рис. 1(h)). Действительно, в этом случае пары (m, p) , (n, q) не являются противоположными сторонами параллелограммов. Переходя по параллельным ребрам от угла между ребрами p и q к углу между ребрами r и s и т. д., получим, что угол 1 не равен ни одному из углов α_i , в частности, не равен углу 2 на рис. 1. Но угол 2 равен углу 3, а угол 3 эквивалентен углу 1 при зеркально-поворотной симметрии многогранника.

Полученное противоречие доказывает невозможность многогранника в этом случае.

Если при $n = 5$ к углам α_i приставлены квадраты, то возможна только зеркально-поворотная ось вращения 10-го порядка многогранника. Такой 20-многогранник существует: у него 5-

Рис. 2. RR-многогранники

ромбические вершины отделены поясом из десяти квадратов (рис. 2(b)). Существование и единственность этого многогранника доказано автором в [3].

Другие случаи при $n = 5$ рассматриваются аналогично случаю $n = 4$.

4. Рассмотрим случай, когда $n \geq 6$. Покажем, что в этом случае не существует многогранников, удовлетворяющих условиям теоремы.

Если стороны каждого угла α_i являются сторонами двух равносторонних треугольников, то в каждой вершине U_i сумма плоских углов будет больше 2π , так как тупые внутренние углы ромбов звезды при $n \geq 6$ будут больше $2\pi/3$ (рис. 1(h)).

Покажем теперь, что если к углам α_i приставлены квадраты, то такой многогранник тоже не может существовать при $n \geq 6$. Действительно, если $n > 7$, то в вершинах U_i сумма плоских углов будет, как и в случае двух треугольных граней, больше 2π .

Если $n = 6, 7$, то и в этом случае многогранник невозможен. Действительно, предположим, что такой многогранник с поясом из квадратов существует.

При $n = 6$ рассмотрим трехгранный угол с вершиной U . Рассмотрим два смежных ребра m и n , инцидентные вершине U , которые являются сторонами квадратной грани и сторонами смежных ромбов. Две стороны p и q ромбов звезды $\text{Star}(V)$, соответственно параллельные ребрам m и n , перпендикулярны друг другу (рис. 1(e)).

Аналогично перейдем к паре взаимно перпендикулярных ребер r и s , где $r \parallel p$, $s \parallel q$, принадлежащих $\text{Star}(V)$. Продолжая этот переход, мы получим пару ребер, которые должны быть перпендикулярны, но оказываются на завершающем шаге этого перехода сторонами острого угла ромба звезды $\text{Star}(V)$. Полученное противоречие доказывает, что при $n = 6$ многогранник с поясом квадратов существовать не может.

Аналогично проведем доказательство для случая 7-ромбической вершины V . В этом случае на завершающем шаге перехода по параллельным ребрам мы получим вместо взаимно перпендикулярных ребер два параллельных ребра.

Если к углам α_i приставлены правильные пятиугольники (рис. 1(f), (g)), то и такой многогранник не может существовать при $n \geq 6$, как в случае зеркально-поворотной оси, так и в случае обычной оси вращения порядка n . Действительно, в этом случае мы не получим пояса из правильных пятиугольников, отделяющего две ромбические вершины V , W .

В случае $n \geq 6$ к углам α_i нельзя приставить правильные k -угольники при $k \geq 6$, так как в каждой вершине U_i сумма плоских углов будет больше 2π . Действительно, в этом случае каждый острый угол при n -ромбической вершине V будет меньше $\pi/3$, а следовательно, каждый тупой угол ромбов звезды $\text{Star}(V)$ будет больше $2\pi/3$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М., Гришукин В. П., Штогрин А. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. — М.: МЦНМО, 2007.

2. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1967. — 2. — С. 1–220.
3. *Субботин В. И.* О двух классах многогранников с ромбическими вершинами// Зап. науч. семин. ПОМИ. — 2018. — 476. — С. 153–164.
4. *Субботин В. И.* Об одном классе сильно симметричных многогранников// Чебышев. сб. — 2016. — № 4. — С. 132–140.
5. *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes. — New York: Dover, 1973.
6. *Coxeter H. S. M.* Regular and semi-regular polytopes. III// Math. Z. — 1988. — 200, № 21. — P. 3–45.
7. *Cromwell P. R.* Polyhedra. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
8. *Farris S. L.* Completely classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra// Geom. Dedic. — 1988. — 26, № 1. — P. 111–124.
9. *Grunbaum B.* Regular polyhedra—old and new// Aequat. Math. — 1977. — 16, № 1-2. — P. 1–20.
10. *Johnson N. W.* Convex polyhedra with regular faces// Can. J. Math. — 1966. — 18, № 1. — P. 169–200.

Субботин Владимир Иванович

Южно-Российский государственный политехнический университет

(Новочеркасский политехнический институт) им. М. И. Платова, Новочеркасск

E-mail: geometry@mail.ru