Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Чешкова, Обмотки тора и модели проективной плоскости, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 181, 118–120

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-118-120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:15:02

ОБМОТКИ ТОРА И МОДЕЛИ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2020 г. М. А. ЧЕШКОВА

Аннотация. При помощи периодических вектор-функций построены примеры моделей проективной плоскости.

Ключевые слова: тор, скрещенный колпак, римская поверхность.

WINDINGS OF TORI AND MODELS OF THE PROJECTIVE PLANE

© 2020 М. А. CHESHKOVA

ABSTRACT. Using periodic vector-valued functions, we construct examples of models of the projective plane.

Keywords and phrases: torus, cross-cap, Roman surface.

AMS Subject Classification: 51A35

1. Введение. Если на поверхности в E^3 существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке (см. [7]). Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в [4]. К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак, римская поверхность, поверхность Боя, бутылка Клейна (см. 3). Римская поверхность, поверхность Боя и скрещенный колпак с крышкой являются моделями проективной плоскости. Односторонние поверхности исследуются автором в [5, 6].

2. Построение моделей проективной плоскости. В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π -периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической. Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, то функция

$$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi)) \quad (1)$$

является 2π -периодической и отличной от нуля, а вектор-функция

$$l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi)) \quad (2)$$

является 2π -антипериодической. С помощью этих функций построим модели проективной плоскости.

Теорема 1. Поверхность P , заданная уравнениями

$$r(u, v) = (1 + \cos v)s(u) + \sin v l(u), \quad u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi],$$

определяет модель проективной плоскости.

Рис. 1. Обмотка тора первого типа и скрещенный колпак

Рис. 2. Обмотка тора второго типа и римская поверхность

Доказательство. Рассмотрим проективную плоскость как фактор-пространство

$$P^* = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] / [(-\pi, -v) \sim (\pi, v), (-u, -\pi) \sim (u, \pi)]$$

(см. [1, с. 75]). Так как

$$\begin{aligned} r(\pi, v) &= (\cos v + 1)s(\pi) + \sin v l(\pi), \\ r(-\pi, -v) &= (1 + \cos(-v))s(-\pi) + \sin(-v)l(-\pi), \\ s(-\pi) &= s(\pi), \quad l(-\pi) = -l(\pi), \\ r(u, \pi) &= (1 + \cos \pi)s(u) + \sin \pi l(u) = 0, \\ r(-u, -\pi) &= (1 + \cos(-\pi))s(-u) + \sin(-\pi)l(-u) = 0, \end{aligned}$$

то имеем $r(\pi, v) = r(-\pi, -v)$, $r(u, \pi) = r(-u, -\pi)$. Следовательно, поверхность $\mathbf{P}$ есть модель проективной плоскости. $\square$

Построим следующие модели проективной плоскости в E^3 : скрещенный колпак и римскую поверхность. Рассмотрим тор

$$R(u, v) = (5 + \cos v)e(u) + \sin v k, \quad e(u) = (\cos u, \sin u, 0), \quad k = (0, 0, 1).$$

Зададим линию

$$\rho(u) = R\left(u, \frac{u}{2}\right) = \left(5 + \cos \frac{u}{2}\right)e(u) + \sin \frac{u}{2}k.$$

Назовем ее обмоткой тора первого типа. Имеем

$$r(u, v) = (1 + \cos v) \left(5 \cos u, 5 \sin u, 0 \right) + \sin v \left(\cos u \cos \frac{u}{2}, \sin u \cos \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2} \right), \quad u \in [-\pi, \pi], v \in [pi, \pi].$$

Поверхность $r = r(u, v)$ называется скрещенным колпаком (см. [3, с. 304]).

Рассмотрим также обмотку тора $\rho(u) = (5 + \cos u)e(u/2) + \sin u k$. Назовем ее обмоткой тора второго типа. Имеем

$$\rho(u + 2\pi) = -(5 + \cos u)e\left(\frac{u}{2}\right) + \sin u k, \quad s(u) = (0, 0, \sin u), \quad l(u) = (5 + \cos u)e\left(\frac{u}{2}\right).$$

Линия $s = s(u)$ у этой поверхности есть отрезок прямой. Такая поверхность называется римской поверхностью Штейнера (см. [2, с. 302], [3, с. 305]). Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если кривая $\rho = \rho(u)$ есть обмотка тора первого типа, то поверхность $\mathbf{P}$ есть скрещенный колпак. Если кривая $\rho = \rho(u)$ есть обмотка тора второго типа, то поверхность $\mathbf{P}$ есть римская поверхность.*

Изображение этих поверхностей приведены на рис. 1 и 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко А. Т. Введение в топологию. — М.: Наука, 1995.
2. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
3. Кривошапко С. Н., Иванов В. Н., Халаби С. М. Аналитические поверхности. — М.: Наука, 2006.
4. Сабитов И. Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Изв. РАН. Сер. мат. — 2007. — № 71 (5). — С. 197–224.
5. Чешкова М. А. Односторонние поверхности // Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2015. — № 1/2 (85). — С. 164–168.
6. Чешкова М. А. Об одной модели бутылки Клейна // Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2016. — № 1 (89). — С. 180–184.
7. Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Am. Math. Soc. — 1900. — 1, № 1.

Чешкова Мира Артемовна

Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: cma41@yandex.ru