Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Новая формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 182, 10–13

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-10-13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:19:32

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 10–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-10-13

УДК 519.175.3

НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА ПОМЕЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ 2-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

© 2020 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. Последовательно-параллельный граф — это граф, не содержащий в качестве минора полный граф с 4 вершинами. Получена явная более простая формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, последовательно-параллельный граф, 2-связный граф, явная формула.

A NEW FORMULA FOR THE NUMBER OF LABELED SERIES-PARALLEL GRAPHS

© 2020 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. A series-parallel graph is a graph that does not contain a complete graph with 4 vertices as a minor. A new explicit simpler formula for the number of labeled series-parallel 2-connected graphs with a given number of vertices is obtained.

Keywords and phrases: enumeration, labeled graph, series-parallel graph, 2-connected graph, explicit formula.

AMS Subject Classification: 05C30

Определение 1. Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит подразбиения полного графа K_4 (см. [6]).

Последовательно-параллельные графы используются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [7]).

В [6] была найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [1] перечислены помеченные последовательно-параллельные связные и 2-связные графы по числу вершин. Числа помеченных последовательно-параллельных трициклических и тетрациклических блоков с заданным числом вершин найдены в [4] и [2], соответственно. В [3] доказана явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k -циклических блоков с заданным числом вершин.

Пусть B_n — число помеченных 2-связных последовательно-параллельных графов с n вершинами. В [1] получена формула

$$B_n = (n-1)! \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i+1} \frac{(-2)^j}{i!} \left[(j+1)^i \left(\binom{n-1}{i+2} \binom{n+i}{j} - 2 \binom{n}{i+2} \binom{n+i-1}{j} \right) + \right. \\ \left. + j^i \left(\frac{1}{2} \binom{n-3}{i} \binom{n+i+1}{j} - \binom{n-2}{i} \binom{n+i}{j} \right) \right]. \quad (1)$$

В заметке получена явная более простая формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин.

Теорема 1. Число B_n помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с n вершинами при $n \geq 3$ равно

$$B_n = (n-1)! \sum_{i=0}^{n-3} \sum_{j=0}^{n+i} \frac{(-2)^{j-1}}{(i+1)!} \binom{n-3}{i} \left[\binom{n+i}{j} j^i + 2i \binom{n+i-1}{j} (j+1)^{i-1} \right];$$

здесь полагается $\binom{n}{m} = 0$ при $0 \leq n < m$ и $0^0 = 1$.

Доказательство. Пусть $b_{n,m}$ — число помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с n вершинами и m ребрами,

$$B(x, y) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} y^m \frac{x^n}{n!}, \quad B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \quad B'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

— соответствующие производящие функции. Известны следующие соотношения (см. [6]):

$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial y} = \frac{x^2(1 + D(x, y))}{2(1 + y)}, \quad \ln \left(\frac{1 + D(x, y)}{1 + y} \right) = \frac{x D^2(x, y)}{1 + x D(x, y)}.$$

Пусть $t = \ln((1 + D)/(1 + y))$; тогда получим

$$D = (1 + y)e^t - 1, \quad x = \frac{t}{D(D - t)} = \frac{t}{((1 + y)e^t - 1)((1 + y)e^t - t - 1)}.$$

В [1] найдено соотношение

$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} = \frac{x D(2 - x D^2)}{2(1 + x D)}.$$

Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} D_0 &= D(x, 1) = 2e^t - 1, \quad x = \frac{t}{D_0(D_0 - t)} = \frac{t}{(2e^t - 1)(2e^t - t - 1)}, \\ B'(x) &= \left[\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} \right]_{y=1} = \frac{x D_0(2 - x D_0^2)}{2(1 + x D_0)} = \frac{x}{2}(2D_0 - 2t - t D_0), \\ B'(x) &= \frac{x}{2} f(t), \quad f(t) = 4e^t - 2te^t - t - 2, \quad f'(t) = 2e^t - 1 - 2te^t. \end{aligned}$$

Известна формула для коэффициентов разложения аналитической функции $f(t)$ в ряд по степеням другой аналитической функции $w(t)$ (ряд Бурмана—Лагранжа; (см. [5, с. 418-419]):

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n(t), \quad d_n = \frac{1}{n} [t^{-1}] \frac{f'(t)}{w^n(t)}, \quad n \geq 1.$$

В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= 4e^t - 2te^t - t - 2, \quad x = \frac{t}{(2e^t - 1)(2e^t - t - 1)} = w(t), \\ d_n &= \frac{1}{n} [t^{-1}] (2e^t - 1 - 2te^t)(2e^t - 1)^n (2e^t - t - 1)^n t^{-n}, \quad B'(x) = x + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^p, \\ B_n &= (n-1)! [x^{-1}] B'(x) x^{-n} = \frac{(n-1)!}{2} [x^{-1}] \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^{p+1-n} = \frac{(n-1)!}{2} d_{n-2}, \quad n \geq 3, \\ B_n &= \frac{(n-1)!}{2(n-2)} [t^{-1}] (2e^t - 1 - 2te^t)(2e^t - 1)^{n-2} (2e^t - t - 1)^{n-2} t^{2-n}. \end{aligned}$$

Введем обозначение $N = \frac{(n-1)!}{2(n-2)}$. С помощью формулы бинома Ньютона и разложения в ряд для экспоненты получим

$$\begin{aligned}
B_n &= N[t^{-1}](2e^t - 1)^{n-1}(2e^t - t - 1)^{n-2}t^{2-n} - N[t^{-1}]2te^t(2e^t - 1)^{n-2}(2e^t - t - 1)^{n-2}t^{2-n} = \\
&= N[t^{-1}] \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-2}{i} (2e^t - 1)^{n+i-1} (-t)^{n-2-i} t^{2-n} - \\
&\quad - N[t^{-1}] 2te^t \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} (2e^t - 1)^{n+i-2} (-t)^{n-2-i} t^{2-n} = \\
&= N[t^{-1}] \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{n+i-1} \binom{n+i-1}{j} 2^j e^{jt} (-1)^{n+i-1-j} t^{-i} - \\
&\quad - N[t^{-1}] \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{n+i-2} \binom{n+i-2}{j} 2^{j+1} e^{(j+1)t} (-1)^{n+i-2-j} t^{1-i} = \\
&= N[t^{-1}] \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i-1} \binom{n-2}{i} (-1)^{j+1} \binom{n+i-1}{j} 2^j \sum_{p=0}^{\infty} \frac{j^p t^{p-i}}{p!} - \\
&\quad - N[t^{-1}] \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i-2} \binom{n-2}{i} (-1)^j \binom{n+i-2}{j} 2^{j+1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(j+1)^p t^{p+1-i}}{p!} = \\
&= N \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i-1} \binom{n-2}{i} (-1)^{j+1} \binom{n+i-1}{j} 2^j \frac{j^{i-1}}{(i-1)!} - \\
&\quad - N \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i-2} \binom{n-2}{i} (-1)^j \binom{n+i-2}{j} 2^{j+1} \frac{(j+1)^{i-2}}{(i-2)!}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Так как во втором слагаемом при $i = 1$ факториал в знаменателе обращает слагаемое в нуль, а при $j = n + i - 1$ обращается в нуль второй биномиальный коэффициент, имеем

$$B_n = \frac{(n-1)!}{2(n-2)} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i-1} \binom{n-2}{i} (-1)^{j+1} 2^j \left[\frac{j^{i-1}}{(i-1)!} \binom{n+i-1}{j} + 2 \binom{n+i-2}{j} 2^{j+1} \frac{(j+1)^{i-2}}{(i-2)!} \right].$$

Учитывая тождество для биномиальных коэффициентов

$$\frac{1}{n-2} \binom{n-2}{i} = \frac{1}{i} \binom{n-3}{i-1},$$

найдем

$$B_n = (n-1)! \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i-1} \binom{n-3}{i-1} \frac{(-2)^{j-1}}{i!} \left[j^{i-1} \binom{n+i-1}{j} + 2(i-1) \binom{n+i-2}{j} 2^{j+1} (j+1)^{i-2} \right].$$

После замены переменной $i' = i - 1$ и переобозначения $i' \rightarrow i$ получим утверждение теоремы. $\square$

Таблица 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_n	1	9	152	3810	126402	5210576	256469544	14666168250	955097348870

В таблице 1 представлены числа B_n , вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple. Они совпадают с числами, вычисленными по формуле (1) работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него// Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — 26, № 1. — С. 20–32.
2. *Воблый В. А.* Число помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков// Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 47. — С. 57–61.
3. *Воблый В. А.* Явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k -циклических блоков// Мат. заметки. — 2020. — 108, № 4. — С. 622–624.
4. *Воблый В. А., Мелешко А. М.* О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков// Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения» (Тула, 28-31 мая 2018 г.). — Тула: ТПГУ. — С. 168–170.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
6. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs// Eur. J. Combin. — 2007. — 28, № 8. — P. 2091–2105.
7. *Radhavan S.* Low-connectivity network design on series-parallel graphs// Networks. — 2004. — 43, № 3. — P. 163–176.

Воблый Виталий Антониевич

Всероссийский институт научной и технической информации, Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru