Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Галаев, О геодезических преобразованиях распределений субримановых многообразий, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 182, 14–18

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-14-18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:11:44

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 14–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-14-18

УДК 514.764

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2020 г. С. В. ГАЛАЕВ

Аннотация. Пусть M — субриманово многообразие контактного типа с распределением D . С помощью эндоморфизма $N : D \rightarrow D$ распределения D внутренняя связность, осуществляющая перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых многообразия M , продолжается до связности в векторном расслоении (D, π, M) , где $\pi : D \rightarrow M$ — естественная проекция. Полученная связность названа в работе N -продолженной связностью. Задание N -продолженной связности эквивалентно заданию на распределении D N -продолженной субримановой структуры. С помощью структурных уравнений N -продолженной структуры вычислены коэффициенты связности Леви-Чивиты, полученной в результате продолжения риманова многообразия. Доказано, что если распределение D субриманова многообразия не интегрируемо, то две N -продолженные субримановы структуры контактного типа, одна из которых определяется нулевым эндоморфизмом, а другая — произвольным ненулевым эндоморфизмом, принадлежат разным геодезическим классам.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, N -продолженная связность, геодезическое преобразование.

GEODESIC TRANSFORMATIONS OF DISTRIBUTIONS OF SUB-RIEMANNIAN MANIFOLDS

© 2020 S. V. GALAEV

ABSTRACT. Let M be a sub-Riemannian contact-type manifold endowed with a distribution D . Using an endomorphism $N : D \rightarrow D$ of the distribution D , one can prolong the inner connection, which transfers admissible vectors along admissible curves on the manifold M , up to a connection in the vector bundle (D, π, M) , where $\pi : D \rightarrow M$ is the natural projection. The connection obtained is called the N -prolonged connection. The setting of an N -prolonged connection is equivalent to the setting of an N -prolonged sub-Riemannian on the distribution D . Using the structure equations of the N -prolonged structure, we calculate the coefficients of the Levi-Civita connection obtained by the prolongation of the Riemannian manifold. We prove that if a distribution D of a sub-Riemannian manifold is not integrable, then two N -prolonged, contact-type, sub-Riemannian structures, one of which is determined by the zero endomorphism and the other by an arbitrary nonzero endomorphism, belong to distinct geodesic classes.

Keywords and phrases: sub-Riemannian manifold of contact type, N -extended connection, geodesic transformation.

AMS Subject Classification: 53C17

1. Введение. Систематическое изучение геометрии распределений почти контактных метрических многообразий, а затем и распределений субримановых многообразий начинается в [4, 7, 8, 12]. Как показано в [4], распределение субриманова многообразия может быть использовано для моделирования неголономных механических систем. На распределении субриманова

многообразия естественным образом возникает контактное векторное поле — аналог гамильтоновой системы. В [4] излагаются методы, позволяющие находить первые интегралы обобщенной гамильтоновой системы (контактного векторного поля). Полученные в [4] результаты основаны на исследовании структур, определяемых на распределениях субримановых многообразий. В настоящей работе эти структуры получили название N -продолженных структур. Как и исходные структуры, продолженные структуры являются субримановыми структурами. Распределения субримановых многообразий допускает задание более богатых структур (см. [1, 2, 10]), чем субримановы структуры контактного типа, но их изучение избыточно по отношению к решаемой в этой статье задаче.

Пусть (M, ξ, η, g, D) — субриманова структура контактного типа (см. [5]). Для задания N -продолженной структуры используется такой эндоморфизм $N : TM \rightarrow TM$, что для всех $x \in M$, для которых $N(D_x) \subset D_x$, выполняется равенство $N\xi = 0$. Наличие условия $N\xi = 0$ означает, что эндоморфизм N является допустимым эндоморфизмом (см. [7, 12]), поэтому в дальнейшем будем писать $N : D \rightarrow D$. Задание эндоморфизма N позволяет продолжить внутреннюю связность до связности в векторном расслоении (D, π, M) , где $\pi : D \rightarrow M$ — естественная проекция.

Идея построения N -связностей берет начало в работе В. В. Вагнера, посвященной развитию геометрической теории неголономной механики (см. [6]). С геометрической точки зрения уравнения движения неголономной динамической системы интерпретируются как уравнения геодезических внутренней связности (см. [7, 12]), заданной на неголономном многообразии — конфигурационном пространстве механической системы. В некоторых случаях геометрические свойства неголономного многообразия позволяют выбрать такую специальную систему координат, в которой уравнения движения неголономной динамической системы принимают наиболее простой вид. Поиск необходимых геометрических инвариантов привел В. В. Вагнера к построению тензора кривизны неголономного многообразия, называемого в настоящее время тензором кривизны Вагнера. В [9] автором статьи было показано, что в случае контактного многообразия тензор кривизны Вагнера совпадает с тензором кривизны некоторой связности в векторном расслоении (D, π, M) , пространством которого является распределение D контактной структуры (M, ξ, η, φ) . Необходимая для получения тензора кривизны Вагнера связность была названа связностью Вагнера. Задание связности Вагнера сводится к продолжению внутренней связности до связности в векторном расслоении с помощью эндоморфизма $N : D \rightarrow D$, имеющего специальное строение.

Пусть $(D, \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, G, \tilde{D})$, $(D, u, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{G}, \tilde{D})$ — две N -продолженные структуры контактного типа. Причем первая структура получена с помощью нулевого эндоморфизма, вторая — с помощью произвольного ненулевого эндоморфизма $N : D \rightarrow D$. В работе показано, что соответствующие римановы многообразия (D, G) , $(D, \tilde{G})$ принадлежат разным геодезическим классам.

2. N -продолженная связность на субримановом многообразии. Пусть M — субриманово многообразие контактного типа, т.е. гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой (M, ξ, η, g, D) , где η — 1-форма, порождающая распределение $D : D = \ker(\eta)$; ξ — векторное поле, порождающее оснащение $D^\perp$ распределения $D : D = \text{Span}(\xi)$; g — риманова метрика на многообразии M , относительно которой распределения D и $D^\perp$ взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства $\eta(\xi) = 1$ и $g(\xi, \xi) = 1$.

Назовем распределение D распределением субримановой структуры. Для проведения необходимых вычислений будем использовать атлас карт $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$; $i, j, k = 1, \dots, 2n-1$), удовлетворяющих условию $\partial_n = \xi$ (см. [3]). Пусть $P : TM \rightarrow D$ — оператор проектирования, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$. Линейно независимые в каждой точке векторные поля $P(\partial_a) = e_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают систему $D : D = \text{Span}(e_a)$. Легко проверить, что $[e_a, e_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$.

Рассмотрим допустимые тензорные поля (см. [7, 12]) следующего вида:

$$hx = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)(x), \quad C(x, y) = \frac{1}{2}(L_\xi g)(x, y), \quad g(Cx, y) = C(x, y), \quad x, y \in \Gamma(TM).$$

В адаптированных координатах имеем

$$h_b^a = \frac{1}{2} \partial_n \varphi_b^a, \quad C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}, \quad C_b^a = g^{da} C_{db}, \quad \varphi_a^c = g^{bc} \omega_{ba}.$$

Обозначим коэффициенты связности Леви-Чивиты тензора g символами $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Имеет место следующее предложение (см. [9]).

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивиты контактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (e_b g_{cd} + e_c g_{bd} - e_d g_{bc}), \quad \Gamma_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \Gamma_{an}^b = \Gamma_{na}^b = C_a^b - \varphi_a^b, \quad \Gamma_{nn}^a = \Gamma_{na}^a = 0.$$

Под внутренней линейной связностью на многообразии с контактной метрической структурой (см. [3, 9]) будем понимать отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, обладающее следующими свойствами:

- (1) $\nabla_{f_1 x + f_2 y} = f_1 \nabla_x + f_2 \nabla_y$,
- (2) $\nabla_x f y = (x f) y + f \nabla_x y$,
- (3) $\nabla_x (y + z) = \nabla_x y + \nabla_x z$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности задаются соотношениями $\nabla_{e_a} e_b = \Gamma_{ab}^c e_c$. Формулы преобразования для коэффициентов связности имеют обычный вид:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^{c'} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'} e_a A_b^{c'}.$$

Кручение внутренней линейной связности S задается равенством

$$S(x, y) = \nabla_x y - \nabla_y x - P[x, y].$$

В адаптированных координатах кручение внутренней связности получает следующее представление:

$$S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c.$$

Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве распределения D .

Гладкая структура на распределении D задается следующим образом. Каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M ставится в соответствие сверхкарта $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D , где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $e_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Задание связности над распределением эквивалентно заданию такого объекта $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a})$, что $HD = \text{Span}(\varepsilon_a)$, где $\varepsilon_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$.

Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD , и $N : D \rightarrow D$ — поле допустимого тензора типа $(1, 1)$. N -Продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M) , определяемую разложением

$$TD = \widetilde{HD} \oplus VD,$$

где

$$\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}_x = \varepsilon - (N\mathbf{x})^v, \quad \varepsilon = \partial_n, \quad \mathbf{x} \in D,$$

$(N\mathbf{x})^v$ — вертикальный лифт. В базисе $(\varepsilon_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\mathbf{u}$ имеет координатное представление $\mathbf{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z} = \nabla_x \nabla_y \mathbf{z} - \nabla_y \nabla_x \mathbf{z} - \nabla_{P[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} \mathbf{z} - P[Q[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}],$$

где $Q = 1 - P$, названо Вагнером (см. [6]) тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R_{abc}^d = 2e_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D , а распределение D , в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Частные производные

$\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Векторные поля

$$\varepsilon_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \quad \mathbf{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a}$$

задают на D адаптированное поле базисов, а формы

$$dx^a, \quad \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \quad \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n$$

— сопряженное поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\varepsilon_a, \varepsilon_b] = 2\omega_{ba} \mathbf{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} N_d^c + R_{bad}^c) \partial_{n+c},$$

$$[\varepsilon_a, \mathbf{u}] = x^{n+d} (\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a N_d^c) \partial_{n+c},$$

$$[\varepsilon_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c},$$

$$[\mathbf{u}, \partial_{n+a}] = N_a^c \partial_{n+c}.$$

Определим на многообразии D римановы структуры (D, G) , $(D, \tilde{G})$, полагая

$$\tilde{G}(\mathbf{x}^h, \mathbf{y}^h) = \tilde{G}(\mathbf{x}^v, \mathbf{y}^v) = G(\mathbf{x}^h, \mathbf{y}^h) = G(\mathbf{x}^v, \mathbf{y}^v) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$\tilde{G}(\mathbf{x}^h, \mathbf{y}^v) = \tilde{G}(\mathbf{x}^h, \mathbf{u}) = \tilde{G}(\mathbf{x}^v, \mathbf{u}) = 0, \quad \tilde{G}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1,$$

$$G(\mathbf{x}^h, \mathbf{y}^v) = G(\mathbf{x}^h, \partial_n) = G(\mathbf{x}^v, \partial_n) = 0, \quad G(\partial_n, \partial_n) = 1.$$

Предложение 2. Пусть M — субриманово многообразие. Тогда коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ связности Леви-Чивиты метрики G удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \Gamma_{ab}^c, & 2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^n &= 2\tilde{\Gamma}_{n+b,a}^n = P_{ac}^e x^{n+c} g_{eb}, \\ 2\tilde{\Gamma}_{ab}^{n+c} &= R_{bad}^c x^{n+d}, & \tilde{\Gamma}_{n+a,n+b}^n &= C_{ab}, \\ \tilde{\Gamma}_{ab}^n &= \Gamma_{ab}^n, & \tilde{\Gamma}_{an}^c &= \tilde{\Gamma}_{na}^c = \Gamma_{na}^c, \\ 2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^c &= R_{bda}^c x^{n+d}, & 2\tilde{\Gamma}_{an}^{n+c} &= -2\tilde{\Gamma}_{na}^{n+c} = P_{ad}^c x^{n+d}, \\ 2\tilde{\Gamma}_{n+a,b}^c &= R_{adb}^c x^{n+d}, & 2\tilde{\Gamma}_{n+a,n}^c &= 2\tilde{\Gamma}_{n,n+a}^c = g^{cd} P_{db}^e x^{n+b} g_{ae}, \\ \tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} &= \Gamma_{ab}^c, & \tilde{\Gamma}_{n+a,n}^{n+b} &= \tilde{\Gamma}_{n,n+a}^{n+b} = C_a^b. \end{aligned}$$

Доказательство предложения сводится к применению равенства

$$2\tilde{\Gamma}_{ij}^m = g^{km} (A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

где

$$\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba}, \quad \Omega_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d}, \quad \Omega_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c, \quad \Omega_{an}^{n+c} = \partial_n \Gamma_{ab}^c x^{n+b}.$$

Теорема. Пусть M — субриманово многообразие с неинтегрируемым распределением D и $(D, \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, G, \tilde{D})$, $(D, \mathbf{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{G}, \tilde{D})$ — две N -продолженные субримановы структуры контактного типа, причем первая структура получена с помощью нулевого эндоморфизма, вторая — с помощью произвольного ненулевого эндоморфизма $N : D \rightarrow D$. Тогда соответствующие этим структурам римановы многообразия (D, G) , $(D, \tilde{G})$ принадлежат разным геодезическим классам.

Доказательство. Пусть ∇ — связность Леви-Чивиты метрического тензора G с коэффициентами $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ относительно базиса $(\varepsilon_a, \partial_n, \partial_{n+a})$. Предположим противное, что (D, G) , $(D, \tilde{G})$ принадлежат одному геодезическому классу. Тогда найдется такой ковектор ψ_i , что будет выполняться равенство (см. [11])

$$\nabla_i \tilde{G}_{jk} = 2\psi_i \tilde{G}_{jk} + \psi_j \tilde{G}_{ik} + \psi_k \tilde{G}_{ji}.$$

Перепишем последнее равенство для трех разных наборов индексов. Воспользуемся тем, что $\nabla_i \tilde{G}_{ab} = \nabla_i G_{ab}$. Это равенство оказывается справедливым благодаря тому, что в базисе $(\varepsilon_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ выполняются соотношения

$$\tilde{G}_{ab} = G_{ab}, \quad \tilde{G}_{n+a,n+b} = G_{n+a,n+b}, \quad \tilde{G}_{an} = \tilde{G}_{a,n+b} = 0$$

Имеем:

$$\nabla_c G_{ab} = 2\psi_c G_{ab} + \psi_a G_{bc} + \psi_b G_{ac}, \quad \nabla_{n+c} G_{ab} = 2\psi_{n+c} G_{ab}, \quad \nabla_n G_{ab} = 2\psi_n G_{ab}.$$

Отсюда получаем, что $\psi_c = \psi_{n+c} = \psi_n = 0$.

Пусть теперь выполняются равенства $\psi_c = \psi_{n+c} = \psi_n = 0$. Вновь воспользуемся равенством

$$\nabla_i \tilde{G}_{jk} = 2\psi_i \tilde{G}_{jk} + \psi_j \tilde{G}_{ik} + \psi_k \tilde{G}_{ji}.$$

Получаем для подходящего набора индексов следующее равенство:

$$\nabla_c \tilde{G}_{a,n+b} = \nabla_c G_{a,n+b} - \Gamma_{ca}^n \tilde{G}_{n,n+b}.$$

Мы здесь воспользовались тем, что относительно базиса $(\varepsilon_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ выполняется соотношение $\tilde{G}_{n,n+b} = g_{bc} N_d^c x^{n+d}$. После стандартных вычислений получаем

$$(\omega_{ab} + C_{ab}) N_d^c x^{n+d} = 0.$$

Отсюда при условии, что $\omega_{ab} \neq 0$, следует, что $N = 0$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буккушева А. В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — 14, № 3. — С. 247–251.
2. Буккушева А. В. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2015. — № 46. — С. 58–63.
3. Буккушева А. В. О геометрии контактных метрических пространств с φ -связностью // Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2015. — 17 (214), № 40. — С. 20–24.
4. Буккушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 4. — С. 10–18.
5. Буккушева А. В., Галаев С. В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2017. — № 48. — С. 32–41.
6. Вагнер В. В. Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семин. по вектор. тензор. анал. — 1941. — № 5. — С. 173–255.
7. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N -продолженной связностью // Мат. заметки СВФУ. — 2015. — 22, № 1. — С. 25–34.
8. Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N -связностью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2015. — 15, № 3. — С. 258–263.
9. Галаев С. В. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышев. сб. — 2016. — 17, № 3 (59). — С. 53–63.
10. Галаев С. В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 3. — С. 263–272.
11. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
12. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bull. Transilv. Univ. Braşov. Ser. III. Math. Inform. Phys. — 2011. — 4 (53), № 2. — P. 13–22.

Галаев Сергей Васильевич

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: sgalaev@mail.ru