Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Гинтерлейтнер, Н. И. Гусева, Й. Микеш, О геодезической определенности точками подобия, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 182, 19–27

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-19-27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 05:40:01

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 19–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-19-27

УДК 514.76

О ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ТОЧКАМИ ПОДОБИЯ

© 2020 г. И. ГИНТЕРЛЕЙТНЕР, Н. И. ГУСЕВА, Й. МИКЕШ

Аннотация. В статье изложены некоторые результаты, полученные в теории геодезических отображений поверхностей. Хорошо известно, что отображение, которое одновременно конформно и геодезично, является гомотетическим. На основании этого свойства были получены новые результаты об определенности поверхностей относительно геодезических отображений, которые обобщают исследования В. Т. Фоменко.

Ключевые слова: геодезическое отображение, конформное отображение, псевдориманово пространство, риманово пространство, поверхность, определенность.

ON GEODESIC DEFINITENESS BY SIMILARITY POINTS

© 2020 I. HINTERLEITNER, N. I. GUSEVA, J. MIKEŠ

ABSTRACT. In this paper, we present some results obtained in the theory of geodesic mappings of surfaces. It is well known that a mapping that is both conformal and geodesic is homothetic. Based on this property, we obtain new results on the definiteness of surfaces with respect to geodesic mappings, which generalize results obtained by V. T. Fomenko.

Keywords and phrases: geodesic mapping, conformal mapping, pseudo-Riemannian space, Riemannian space, surface, definiteness.

AMS Subject Classification: 53B05, 53B20, 53B22, 11Y11

1. Введение. В настоящей работе приведены новые результаты теории геодезических отображений, связанные с вопросом о геодезической определенности точками подобия.

Геодезические и конформные отображения играют очень важную роль в теории поверхностей, римановых и псевдоримановых многообразий. Известные из антики гномоническая и стереографическая проекции являются их примерами. *Гномоническая проекция* является проекцией полусферы из центра на плоскость, касающуюся полюса; она была известна уже в VI в. до н. э. Фалесу Милетскому. *Стереографическая проекция* является проекцией сферы из полюса на плоскость, касающуюся второго полюса. Ее первое упоминание на 8 веков позднее, например, в работах греческого астронома Птолемея. С 1569 г. Меркатор использует конформные проекции для картографических задач. Математическое обоснование указанных проекций дано в 1779 г. Лагранжем (см. [36]).

Общая теория конформных и геодезических отображений (псевдо-) римановых многообразий, а также пространств аффинной связности, изложена во многих монографиях и обзорных статьях, например, [1–4, 7–10, 17, 20, 23–27, 35, 39–43, 52]. В работах И. Гинтерлейтнер и Й. Микеша (см. [30–32]) доказано, что геодезические отображения сохраняют класс гладкости метрик (псевдо-) римановых многообразий. Это свойство естественным образом распространено на более общий случай (см. [33]).

Различным задачам теории конформных и геодезических отображений посвящено множество статей (см., например, [5, 8, 10, 18, 19, 21, 22, 26, 27, 30–32, 34, 35, 39–42, 44, 46, 51]). Интересные факты о геодезических линиях описаны в [6, 16, 48–50].

Геодезическим отображениям и проективным преобразованиям «в целом» посвящены, например, работы [5, 11, 12, 14, 28, 29, 37, 39, 47, 53]. Результаты о геодезической определенности «локально» и «в целом» получены например, в [10, 14, 17, 29, 38–41, 44, 45, 53].

В работах В. Т. Фоменко (см. [14]) исследованы геодезические отображения полных поверхностей при условии, что в определенном количестве точек выполняются условия подобия. В работе Й. Микеша требовалось выполнение таких условий на границе области (см. [38]), а затем в [17, 44, 45] для $n > 2$ в одной точке, в которой тензор проективной кривизны не обращается в нуль.

В настоящей работе продолжаем изучение вопросов о геодезической определенности поверхностей точками подобия.

2. Конформные и геодезические отображения. Напомним основные понятия конформных и геодезических отображений (псевдо-) римановых пространств (см. [7, 8, 10, 20, 35, 39–41]).

2.1. Конформные отображения. Конформными являются отображения, сохраняющие углы. Отображение между n -размерными (псевдо-) римановыми пространствами V_n и $\bar{V}_n$ является конформным тогда и только тогда, когда метрики этих пространств пропорциональны, т.е. выполняются отношения

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x), \quad (1)$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$ — общая по отображению $V_n \rightarrow \bar{V}_n$ система координат, $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x)$ — метрические тензоры (псевдо-) римановых пространств V_n и $\bar{V}_n$ соответственно.

В случае, когда $\sigma = \text{const}$, конформное отображение *гомотетично*, а в случае $\sigma = 0$ это отображение (локально) *изометрично*.

Из условий (1) следует, что связности Леви-Чивиты пространств V_n и $\bar{V}_n$ связаны условием

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \sigma_j + \delta_j^h \sigma_i - \sigma^h g_{ij}, \quad (2)$$

где $\sigma^h = g^{h\alpha} \sigma_\alpha$, $\sigma_i = \nabla_i \sigma$, Γ_{ij}^h и $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ — символы Кристоффеля связностей V_n и $\bar{V}_n$.

2.2. Геодезические отображения. Дiffeоморфизм $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ называют *геодезическим отображением*, если любая геодезическая линия пространства V_n отображается на геодезическую пространства $\bar{V}_n$.

Diffeоморфизм $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ является геодезическим отображением тогда и только тогда, когда выполняются уравнения Леви-Чивиты

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x), \quad (3)$$

где $\Gamma_{ij}^h(x)$ и $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ — символы Кристоффеля V_n и $\bar{V}_n$, а $\psi_i(x)$ — компоненты линейной формы ψ , $x = (x^1, \dots, x^n)$ — общая по отображению f система координат.

Векторное поле ψ_i является градиентом

$$\psi_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}, \quad \Psi = \frac{1}{2(n+1)} \ln \left| \frac{\det(\bar{g}_{ij})}{\det(g_{ij})} \right|.$$

Заметим, что в безындексной записи формулы (1), (2) и (3) имеют вид

$$\bar{g} = e^{2\sigma} \cdot g, \quad (4)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X \cdot \nabla_Y \sigma + Y \cdot \nabla_X \sigma - S \cdot g(X, Y), \quad (5)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X \cdot \nabla_Y \Psi + Y \cdot \nabla_X \Psi, \quad (6)$$

где X и Y — касательные векторные поля, векторное поле S определено условием $\nabla_X \sigma = g(S, X)$, g и $\bar{g}$ — метрики, ∇ и $\bar{\nabla}$ — связности Леви-Чивиты пространств V_n и $\bar{V}_n$ соответственно.

2.3. *Конформные геодезические отображения.* Докажем следующую лемму (см., например, [10, с. 75]).

Лемма 2.1. *Диффеоморфизм $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$, который одновременно является конформным и геодезическим, является гомотетическим.*

Доказательство. Очевидно, что должны одновременно выполняться уравнения (2) и (3):

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x) = \delta_i^h \sigma_j(x) + \delta_j^h \sigma_i(x) - \sigma^h g_{ij} = \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x).$$

Отсюда следует

$$\delta_i^h w_j + \delta_j^h w_i - \sigma^h g_{ij} = 0,$$

где $w_i = \sigma_i - \psi_i$. Легко показать, что при $n \geq 2$ имеет место соотношение $\psi_i = \sigma_i = 0$ и, следовательно, $\sigma = \text{const}$. $\square$

3. Об однозначной определенности пространства относительно геодезических отображений с условиями на кривизну. Вопросы об однозначной определенности относительно геодезических отображениях рассматривались многими авторами при разнообразных предположениях, например, Е. Н. Синюковой (см. [11]), Й. Микешем (см. [38]), С. Е. Степановым (см. [12]) и И. Гинтерлейтнер (см. [29]).

Используя метод А. Швеца (см. [15]), Й. Микеш ранее доказал следующую теорему.

Теорема 3.1 (см. [38, 39]). *Пусть компактное ориентируемое собственно риманово пространство V_n с границей ∂V допускает геодезическое отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$. Если для всех точек $t \in V_n$ секционные кривизны неположительны и для всех $t \in \partial V_n$ выполняется условие подобия $\bar{g}(X, Y) = f \cdot g(X, Y)$ для метрик V_n и $\bar{V}_n$, для всех касательных векторов X, Y , то это отображение гомотетично.*

Используя интегральные формулы Гаусса, эту теорему обобщила И. Гинтерлейтнер.

Теорема 3.2 (см. [29]). *Пусть компактное собственно риманово пространство V_n без границы допускает геодезическое отображение на риманово пространство $\bar{V}_n$. Если для всех точек $t \in V_n$ секционные кривизны $K(e_i, e_j)$ неположительны, и в некоторой точке $x_0 \in M$ секционные кривизны $K(e_i, e_j)$ — отрицательны для любой двумерной площадки $e_i \wedge e_j$ главного ортонормального базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ векторов, являющихся главными направлениями тензора Риччи, то геодезическое отображение V_n является гомотетичным.*

Очевидно, что для размерности $n = 2$ эти теоремы тоже имеют место, в этом случае в условиях теорем Гауссова кривизна отрицательна. Заметим, что в теореме 3.2 опущены условия точек подобия на границе. Как покажем ниже, из условий подобия, даже для псевдоевклидовых пространств, вытекает гомотетичность геодезического отображения.

4. О геодезических отображениях двумерных пространств. Как мы уже отметили, гномоническая проекция полусферы на плоскость является примером геодезического отображения. У. Дини (см. [4, 19]) доказал, что только поверхности Лиувилля допускают нетривиальные геодезические отображения на другие поверхности. Отображение между поверхностями S^2 и $\bar{S}^2$ является геодезическим, если существует общая по отображению система координат, такая что метрики этих поверхностей имеют вид

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2) \text{ и } d\bar{s}^2 = (V^{-1} - U^{-1})(U^{-1}du^2 + V^{-1}dv^2), \quad (7)$$

где $U = U(u)$ и $V = V(v)$ — некоторые положительные функции указанных переменных, таких что $U - V > 0$. Очевидно, эти функции должны быть дифференцируемыми. Форму метрик (7) установил Ж. Г. Дарбу (см. [7]).

Следовательно, локально поверхности Лиувилля всегда допускают нетривиальные геодезические отображения. Заметим, что изометрия является тривиальным геодезическим соответствием. Поверхности Лиувилля образуют довольно большой класс поверхностей. Они включают, например, поверхности второго порядка, все поверхности вращения и, в частности, поверхности с постоянной гауссовой кривизной.

Так как локально такие поверхности допускают нетривиальные геодезические отображения, естественно спросить, как они ведут себя по отношению к геодезическим отображениям «в целом». В частности, допускают ли замкнутые поверхности нетривиальные геодезические отображения?

Сначала отметим, что сфера допускает геодезические отображения «в целом», более общий случай для n -мерной сферы рассматривался Й. Микешем в [5]. Геодезические отображения «в целом» n -мерных гиперповерхностей вращения изучались в работах Й. Микеша [37] и И. Гинтерлейтнера [25]. Интересные результаты получены в [28, 47] при изучении геодезических отображений поверхностей вращения второго порядка.

Заметим, что метрики двумерных псевдоримановых пространств, допускающих геодезические отображения, нашел П. А. Широков (см. [13]).

5. Об однозначной геодезической определенности замкнутых поверхностей точками подобия. В. Т. Фоменко (см. [14]) были получены интересные результаты для геодезических отображений «в целом» двумерных замкнутых поверхностей.

Теорема 5.1. *Любая замкнутая ориентируемая C^2 -поверхность рода r , где $r > 1$, однозначно определяется относительно геодезических отображений. Условие $r > 1$ существенно.*

Для формулировки дальнейших теорем нам понадобятся следующие определения. Пусть M_0 и $\bar{M}_0$ являются соответствующими точками поверхностей S^2 и $\bar{S}^2$, которые находятся в геодезическом соответствии. Предположим, что $d\bar{s}^2|_{\bar{M}_0} = c_0 \cdot ds^2|_{M_0}$, где $c_0 = \text{const}$, для любого направления d этих точек. Тогда мы говорим, что M_0 — точка подобия поверхности S^2 при заданном геодезическом отображении.

Далее справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть замкнутая C^2 -поверхность S^2 , гомеоморфная сфере, допускает геодезическое отображение на поверхность $\bar{S}^2$ и имеет по меньшей мере пять точек подобия. Тогда геодезическое отображение тривиально.*

Теорема 5.3. *Пусть замкнутая C^2 -поверхность S^2 , гомеоморфная тору, допускает геодезическое отображение на поверхность $\bar{S}^2$ и имеет по крайней мере одну точку подобия. Тогда геодезическое отображение тривиально.*

Для поверхностей S^2 с краем имеет место следующая теорема.

Теорема 5.4. *Поверхность S^2 класса C^2 однозначно определена относительно любого геодезического отображения, для которого набор точек подобия имеет предельную точку внутри S^2 или положительной линейной меры на границе S^2 .*

Ниже покажем, что указанные выше результаты можно улучшить, используя результаты теории о существовании первого интеграла геодезических.

6. Первый интеграл геодезических и геодезические отображения.

6.1. Первый интеграл геодезических. Задача о первом интеграле геодезических, как показано во многих работах, например, [16, 20, 41], тесно связана с аффинными, геодезическими, голоморфно-проективными и другими отображениями (псевдо-) римановых пространств. Собственно римановы и псевдоримановы пространства V_n в следующем тексте будем кратко называть *римановы*.

Пусть A_n — пространство с аффинной связностью ∇ . Кривая $\gamma : x = x(s)$ пространства A_n является геодезической, если в A_n она является интегральной кривой дифференциального уравнения: $\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0$, где $\dot{x}$ — касательный вектор γ , « $\dot{}$ » — дифференцирование относительно канонического параметра s кривой γ (см. [8, 10, 20, 39, 40, 53]).

Первым квадратичным (однородным) интегралом геодезических называется выражение $a(\dot{x}, \dot{x}) = \text{const}$, где a — симметрическая билинейная форма на A_n . Билинейная форма допускает

первый квадратичный интеграл геодезических тогда и только тогда, когда выполняется условие (см. [20, 41]):

$$\nabla_X a(Z, Y) + \nabla_Y a(X, Z) + \nabla_Z a(Y, X) = 0$$

для всех касательных векторов $X, Y, Z \in TA_n$.

Если пространство A_n является римановым пространством V_n с метрикой g , тогда $\text{const} \cdot g$ является первым квадратичным интегралом геодезических. Этот интеграл принято называть *тривиальным*.

6.2. Канонический геодезический каркас $G(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Рассмотрим связную область V в V_n с липшицевой границей ∂V . Систему точек $x, x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ будем называть *каноническим геодезическим каркасом* $G(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$, если выполняются приведенные ниже условия.

Пусть x — некоторая внутренняя точка области V , т.е. $x \in \text{int } V$. Метрика g пространства V_n в этой точке является билинейной формой g_x , такой что: $T_x \times T_x \rightarrow R$, где T_x — касательное пространство в точке x , $\dim T_x = n$. С другой стороны, $g_x : S^2 T_x \rightarrow R$, где $S^2 T_x$ — симметрическая часть второго порядка T_x . Очевидно, $\dim S^2 T_x = N = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Построим в точке x векторы $v_1, v_2, \dots, v_N \in T_x$ так, что

- (1) $v_1 \circ v_1, v_2 \circ v_2, \dots, v_N \circ v_N$ образуют базис $S^2 T_x$,
- (2) $g(v_i, v_i) \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$.

Далее построим N геодезических путей $\gamma_i(s)$, $i = 1, \dots, N$, для которых $x \in \gamma_i$ и векторы v_i являются касательными к γ_i в точке x . Построим точки x_i на каждой из этих геодезических γ_i и предположим, что дуга геодезической (x, x_i) находится целиком в области V .

Через γ_{ij} обозначим геодезические дуги, соединяющие точки x_i и x_j . Предположим, что γ_{ij} являются неизотропными, и дуги (x_i, x_j) находятся в области V . Эта система геодезических γ_{ij} может быть «неполная». Достаточно, чтобы любые две точки x_i и x_j можно было соединить геодезическими дугами этой системы. Это означает, что не обязательно, чтобы все точки x_i и x_j были соединены геодезической γ_{ij} (т. к. она может не существовать). Этим конструкция канонического геодезического каркаса завершена.

Очевидно, для двух симметрических форм g и $\bar{g}$ в точке x имеет место утверждение

$$\bar{g}(v_i, v_i) = k \cdot g(v_i, v_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \iff \bar{g} = k \cdot g.$$

Отметим, что существует некоторая открытая окрестность $U \subset V$ данной точки x такая, что для всех точек $y \in U$ существуют неизотропные геодезические дуги ($\subset V$), соединяющие y с точками x_i , для которых касательные векторы являются базисом в $S^2 T_y$.

6.3. Теоремы о тривиальных решениях. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6.1 (Г. Худа, Й. Микеш; см. [16]). Пусть в V_n существует выше описанная область V , и в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ выполняются условия

$$a_{x_i} = k_i \cdot g_{x_i},$$

где a определяет первый интеграл геодезических. Тогда первый интеграл геодезических является тривиальным, т.е. $a = k \cdot g$, $k = \text{const}$, на всем пространстве V_n .

Поскольку известно, что существование геодезических отображений связано с существованием первого интеграла геодезических (см. [20, 40]), то из теоремы 6.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 6.2 (Г. Худа, Й. Микеш; см. [44]). Пусть V_n с метрическим тензором g допускает геодезическое отображение на $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}$. Если в V_n существует выше описанная область V канонического геодезического каркаса, и в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ выполняются условия

$$\bar{g}_{x_i} = k_i \cdot g_{x_i},$$

то отображение является гомотетическим, т.е. $\bar{g} = k \cdot g$, $k = \text{const}$, на всем пространстве V_n .

Детальным анализом основных уравнений геодезических отображений Синюкова (см. [10, 40]) доказана следующая теорема.

Теорема 6.3 (Г. Худа, Й. Микеш; см. [17]). Пусть $V_n (n > 2)$ с метрическим тензором g допускает геодезическое отображение на $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}$. Если в точке x_0 , в которой проективный тензор не равен нулю, имеет место $\bar{g} = k \cdot g$, то отображение является гомотетическим, т.е. $\bar{g} = k \cdot g$, $k = \text{const}$, на всем пространстве V_n .

Заметим, что теоремы 6.1 и 6.2 доказаны в предположении, когда $V_n \in C^1$, т.е. когда $g_{ij}(x) \in C^1$. Теорема 6.3 доказана когда $V_n \in C^3$ и $\bar{V}_n \in C^3$.

Комбинацией этих теорем нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 6.4. Пусть $V_n \in C^1$ ($n > 2$) с метрическим тензором g допускает геодезическое отображение на $\bar{V}_n \in C^1$ с метрическим тензором $\bar{g}$. Если в некоторой окрестности точки x_0 метрика $g \in C^3$, в этой точке проективный тензор не равен нулю, и имеет место $\bar{g} = k \cdot g$, то отображение является гомотетическим, т.е. $\bar{g} = k \cdot g$, $k = \text{const}$, на всем пространстве V_n .

Доказательство. На основании результата о сохранении дифференцируемости при геодезическом отображении, доказанном И. Гинтерлейтнер и Й. Микешем (см. [33]), убедимся, что в образе упомянутой окрестности метрика $\bar{g} \in C^3$. Тогда для этой окрестности справедлива теорема 6.3, и в ней $\bar{g} = k \cdot g$. В этой окрестности тогда выполняются условия теоремы 6.2. Следовательно, теорема полностью доказана. $\square$

7. Об однозначной геодезической определенности поверхностей точками подобия.

Нетрудно заметить, что В. Т. Фоменко теоремы 5.1–5.4 доказал для замкнутых поверхностей. В теоремах 6.1–6.4 это условие отсутствует. Более того, теоремы 6.3–6.4 сформулированы для (псевдо-) римановых пространств размерности $n > 2$.

Парадоксом также является факт, что построенные геодезически соответствующие метрики Лиувилля не допускают точек подобия.

С другой стороны, гномоническая проекция полусферы на плоскость в точке касания допускает точку подобия. Две точки подобия существуют при нетривиальном геодезическом отображении сферы на себя, построенном Й. Микешем (см. [5]) — это «полюсы» сферы, а также «полюсы» геодезически соответствующих поверхностей вращения, построенных в [25, 28, 37, 47] (см. также [39–41]).

Очевидно, теорему 6.2 для поверхностей и V_2 можно сформулировать так:

Пусть V_2 с метрическим тензором g допускает геодезическое отображение на $\bar{V}_2$ с метрическим тензором $\bar{g}$. Если в V_2 существует выше описанная область V канонического геодезического каркаса $G(x_1, x_2, x_3, x)$, и в точках $x_i, i = 1, 2, 3$, выполняются условия подобия

$$\bar{g}_{x_i} = k_i \cdot g_{x_i},$$

то отображение является гомотетическим, т.е. $\bar{g} = k \cdot g$, $k = \text{const}$, на всем пространстве V_2 .

Здесь точки $x_i, i = 1, 2, 3$, взаимно соединены геодезическими линиями и они соединены геодезическими линиями с точкой x так, что касательные этих геодезических в точке x не совпадают.

Казалось бы, что для геодезической определенности достаточно трех точек подобия и, таким образом, теорема 5.2 В. Т. Фоменко «переопределена».

Однако структура геодезических сферы и цилиндра показывает, что картина о геодезической определенности точками подобия более любопытна. И на сфере, и на цилиндре существуют точки, которые соединяют более чем три различных геодезических линии (и, более того, бесконечное количество).

Пусть V_2 с метрическим тензором g допускает геодезическое отображение на $\bar{V}_2$ с метрическим тензором $\bar{g}$, и в V_2 существуют две фиксированные точки x_1 и $\tilde{x}_1$, которые соединены хотя бы тремя разными геодезическими (более точно — касательные векторы которых в этих точках разные). Тогда условие подобия в точке x_1 влечет, что точка $\tilde{x}_1$ по необходимости тоже является точкой подобия. Это вытекает, по существу, из доказательства теорем 6.1 и 6.2, причем геодезический каркас построен только на базе лишь одной точки x_1 . (Такое возможно и для поверхностей вращения для точек пересечения поверхности и оси вращения).

а) Для сферы эти две точки — взаимные полюсы. Через любую другую точку проходит единственная геодезическая линия, содержащая x_1 и $\tilde{x}_1$. Поэтому информация, что и точка $\tilde{x}_1$ является точкой подобия, не дает никакой дополнительной информации.

Если аналогично построить точки x_2 и $\tilde{x}_2$, то через любую точку x , отличную от x_1 , $\tilde{x}_1$, x_2 и $\tilde{x}_2$, проходит не более двух различных геодезических линий. Поэтому то, что эти четыре точки являются точками подобия, не дает основания методами, изложенными в доказательстве теорем 6.1 и 6.2, сделать заключение, что данное геодезическое отображение гомотетично. Однако наличие еще одной точки подобия влечет гомотетичность отображения.

В связи с этим возникает вопрос: *существуют ли поверхности, допускающие нетривиальные геодезические отображения при наличии трех или четырех точек подобия.*

б) С другой стороны, структура геодезических на цилиндре позволяет заключить, что для гомотетичности отображения достаточно, чтобы была лишь точка x_1 точкой подобия. Так как все точки x некоторой окрестности точки $\tilde{x}_1$ соединены хотя бы тремя различными геодезическими линиями. Тогда эта окрестность допускает конформное отображение на часть $\tilde{V}_2$, и это отображение на основании леммы 2.1 является гомотетическим. А следовательно, и отображение V_2 на $\tilde{V}_2$ — гомотетическое.

Поэтому (без доказательства) можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 7.1. Пусть V_2 с метрическим тензором g допускает геодезическое отображение на $\tilde{V}_2$ с метрическим тензором $\tilde{g}$, и в V_2 существуют точки x_1 и $\tilde{x}_1$, соединенные хотя бы тремя различными геодезическими линиями, и существует окрестность $\tilde{x}_1$, такая что любая ее точка с x_1 соединена также тремя различными геодезическими. Тогда если x_1 — точка подобия, то отображение является гомотетическим, т.е. $\tilde{g} = k \cdot g$, $k = \text{const}$, на всем пространстве V_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березовский В. Е., Гусева Н. И., Микеш Й. О частном случае почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при котором сохраняется некоторый тензор // Мат. заметки. — 2015. — 98, № 3. — С. 463–466.
2. Березовский В. Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й. Конформные отображения римановых пространств на Риччи симметрические пространства // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 2. — С. 303–306.
3. Евтушик Л. Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й. Конформные отображения на пространства Эйнштейна // Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 10. — С. 8–13.
4. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. Т. 1, 2. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947–1948.
5. Микеш Й. О существовании n -мерных компактных пространств, допускающих нетривиальных геодезических отображений «в целом» // Докл. АН СССР. — 1989. — 305. — С. 534–536.
6. Микеш Й., Гинтерлейтнер И. Об одном вариационном свойстве геодезических в римановых и финслеровых пространствах // Вестн. Твер. ун-та. Сер. Прикл. мат. — 2008. — 8. — С. 59–63.
7. Норден А. П. Теория поверхностей. — М.: ГИТТЛ, 1956.
8. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966.
9. Синюков Н. С. Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими // Докл. АН СССР. — 1961. — 137, № 6. — С. 1312–1314.
10. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
11. Синюкова Е. Н. О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств // Мат. заметки. — 1981. — 30, № 6. — С. 889–894.
12. Степанов С. Е. К глобальной теории проективных отображений // Мат. заметки. — 1995. — 58, № 1. — С. 111–118.
13. Широков П. А. Избранные работы по геометрии. — Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1966.
14. Фоменко В. Т. Об однозначной определенности замкнутых поверхностей относительно геодезических отображений // Докл. РАН. — 2006. — 407, № 4. — С. 453–456.
15. Afwat M., Švec A. Global differential geometry of hypersurfaces // Rozpr. Česk. Akad. Věd, Řada Mat. Přír. Věd. — 1978. — 88, № 7. — P. 75.
16. Chudá H., Mikeš J. First quadratic integral of geodesics with certain initial conditions // APLIMAT — 2007. — P. 85–88.

17. Chudá H., Mikeš J. Conformally geodesic mappings satisfying a certain initial condition// Arch. Math. (Brno). — 2011. — 47. — P. 389–394.
18. Čirić M., Zlatanović M., Stanković M., Velimirović Lj. On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces// Appl. Math. Comput. — 2012. — 218. — P. 6648–6655.
19. Dini U. On a problem in the general theory of the geographical representations of a surface on another// Anali di Mat. — 1869. — 3. — P. 269–294.
20. Eisenhart L. P. Riemannian Geometry. — Princeton Univ. Press, 1926.
21. Formella S., Mikeš J. Geodesic mappings of Einstein spaces// Ann. Sci. Stet. — 1994. — 9. — P. 31–40.
22. Hall G. Projective structure in space-times. Adv. in Lorentzian Geometry// AMS/IP Stud. Adv. Math. — 2011. — 49. — P. 71–79.
23. Hinterleitner I. Conformally-projective harmonic diffeomorphisms of equidistant manifolds// Publ. de la RSME. — 2007. — 11. — P. 298–303.
24. Hinterleitner I., Mikeš J. On the equations of conformally-projective harmonic mappings// AIP Conf. Proc. — 2007. — 956. — P. 141–148.
25. Hinterleitner I. Special mappings of equidistant spaces// J. Appl. Math. — 2008. — 2. — P. 31–36.
26. Hinterleitner I., Mikeš J. Projective equivalence and spaces with equi-affine connection// J. Math. Sci. — 2011. — 177. — P. 546–550.
27. Hinterleitner I., Mikeš J. Fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2011. — 174. — P. 537–554.
28. Hinterleitner I. On global geodesic mappings of ellipsoids// AIP Conf. Proc. — 2012. — 1460. — P. 180–184.
29. Hinterleitner I. Geodesic mappings on compact Riemannian manifolds with conditions on sectional curvature// Publ. Inst. Math. — 2013. — 94 (108). — P. 125–130.
30. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds preserve class of differentiability// Miskolc Math. Notes. — 2013. — 14. — P. 89–96.
31. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings and Einstein spaces// in: Geometric Methods in Physics. — Basel: Birkhäuser-Springer, 2013. — P. 331–335.
32. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings and differentiability of metrics, affine and projective connections// Filomat. — 2015. — 29. — P. 1245–1249.
33. Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings onto Riemannian manifolds and differentiability// in: Geometry, Integrability and Quantization XVIII. — Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 2017. — P. 183–190.
34. Kuzmina I., Mikeš J. On pseudoconformal models of fibrations determined by the algebra of antiquaternions and projectivization of them// Ann. Math. Inform. — 2013. — 42. — P. 57–64.
35. Levi-Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. Milano. — 1896. — 24. — P. 255–300.
36. Lagrange J. L. Sur la construction des cartes géographiques// Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin — 1779. — № 4. — P. 637–692.
37. Mikeš J. On existence of nontrivial global geodesic mappings on n -dimensional compact surfaces of revolution// Proc. Conf. "Differential Geometry and Its Applications" (Brno, 1989). — World Scientific, 1990. — P. 129–137.
38. Mikeš J. Global geodesic mappings and their generalizations for compact Riemannian spaces// Silesian Univ. Math. Publ. — 1993. — 1. — P. 143–149.
39. Mikeš J. Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces// J. Math. Sci. — 1996. — 78. — P. 311–333.
40. Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. Geodesic Mappings and Some Generalizations. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009.
41. Mikeš J. et al. Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.
42. Mikeš J., Berezovski V. Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1992. — 56. — P. 491–494.
43. Mikeš J., Berezovski V., Stepanova E., Chudá H. Geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2016. — 217, № 5. — P. 607–623.
44. Mikeš J., Chudá H. On geodesic mappings with certain initial conditions// Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. — 2010. — 26. — P. 337–341.
45. Mikeš J., Chudá H., Hinterleitner I. Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition// Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2014. — 11, № 5. — 1450044.

46. *Najdanović M., Zlatanović M., Hinterleitner I.* Conformal and geodesic mappings of generalized equidistant spaces// Publ. Inst. Math. Beograd. — 2015. — 98 (112). — P. 71–84.
47. *Rýparová L., Mikeš J.* On global geodesic mappings of quadrics of revoution// in: Proc. 16th Conf. APLI-MAT 2017, 2017. — P. 1342–1348.
48. *Rýparová L., Mikeš J.* On geodesic bifurcations// in: Geometry, Integrability and Quantization XVIII. — Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 2017. — P. 217–224.
49. *Rýparová L., Mikeš J.* Bifurcation of closed geodesics// in: Geometry, Integrability and Quantization XIX. — Sofia: Bulgar. Acad. Sci., 2018. — P. 188–192.
50. *Rýparová L., Mikeš J.* On geodesic bifurcations of product spaces// J. Math. Sci. — 2019. — 239, № 1. — P. 86–91.
51. *Stanković M., Mincić S., Velimirović Lj., Zlatanović M.* On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 2010. — 124. — P. 77–90.
52. *Stepanov S., Shandra I., Mikeš J.* Harmonic and projective diffeomorphisms// J. Math. Sci. — 2015. — 207. — P. 658–668.
53. *Yano K., Bochner S.* Curvature and Betti Numbers. — Princeton Univ. Press, 1953.

Hinterleitner Irena

Технический университет Брно, Чехия

E-mail: hinterleitner.i@fce.vutbr.cz

Гусева Надежда Ивановна

Московский педагогический государственный университет;

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва

E-mail: ngus12@mail.ru

Mikeš Josef

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: josef.mikes@upol.cz