Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Жильников, М. С. Маскина, Приложение преобразования Радона векторных функций к магнитному неразрушающему контролю, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 182, 28–32

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-28-32>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:16:59

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 28–32
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-28-32

УДК 514.83

ПРИЛОЖЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ К МАГНИТНОМУ НЕРАЗРУШАЮЩЕМУ КОНТРОЛЮ

© 2020 г. Т. А. ЖИЛЬНИКОВ, М. С. МАСКИНА

Аннотация. В работе рассматривается преобразование Радона для векторных представлений функций. Предложена реализация неразрушающего магнитоиндукционного исследования, позволяющая получить изображение внутренней структуры намагниченного образца посредством измерения плотности пронизывающего его потока.

Ключевые слова: компьютерная томография, прямое преобразование Радона, обратное преобразование Радона, магнитный неразрушающий контроль, плотность магнитного потока.

APPLICATION OF THE RADON TRANSFORM OF VECTOR FUNCTIONS TO MAGNETIC NONDESTRUCTIVE TESTING

© 2020 T. A. ZHILNIKOV, M. S. MASKINA

ABSTRACT. In this paper, we consider the Radon transform for vector representations of functions. We propose an implementation of a nondestructive magnetic-induction research, which allows one to obtain an image of the internal structure of a magnetized sample by measuring the density of the flux penetrating it.

Keywords and phrases: computed tomography, direct Radon transform, inverse Radon transform, magnetic nondestructive testing, magnetic flux density.

AMS Subject Classification: 53A45

1. Введение. Анализ известных методов магнитного неразрушающего контроля (НК) объектов закономерно указывает на необходимость использования метода компьютерной томографии, который базируется на частном случае преобразования Радона и представляет собой математический аппарат получения изображения распределения физической величины в объеме (см. [6]). Как следует из значения слова «томографический» в названии, данный метод представляет исследуемое трехмерное пространство объема с объектом внутри совокупностью сечений, благодаря чему размерность задачи понижается до двумерной (томографической), что допускает использование самого простого частного описания математического аппарата преобразования Радона, в котором интегрирование осуществляется по лучу и, как следствие, решается основное интегральное уравнение первого порядка (см. [1]). Возникающие при таком томографическом описании проблемы реализации магнитного неразрушающего контроля заключаются, во-первых, в том, что на практике измерение величины магнитной индукции (или, другими словами, плотности потока) возможно только через процедуру регистрации магнитного потока, которая предполагает интегрирование по площади, а не по прямой, а во-вторых, метод компьютерной томографии предполагает визуализацию скалярных распределений, в то время как магнитная индукция является

распределением векторной величины. Таким образом, изложенным обусловлена потребность в отходе от частного описания математического аппарата преобразования Радона и использование его общего вида.

2. Прямое векторное преобразование Радона от функции трех переменных. Пусть $\mathbf{f}$ — исходная векторная функция со скалярными компонентами, во-первых, удовлетворяющими условиям регулярности, определенными в ограниченной области, а во-вторых, достаточно быстро убывающими к границам области. Координаты точек в трехмерном пространстве ограниченной области определения исходной векторной функции заданы в декартовой (прямоугольной) системе координат радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$, из начала координат, поэтому компоненты $\mathbf{f}$ в разложении вектора по ортогональному базису:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = f_x(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{i} + f_y(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j} + f_z(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{k},$$

где $f_x(\mathbf{r})$, $f_y(\mathbf{r})$, $f_z(\mathbf{r})$ — скалярные компоненты векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — ортогональный базис. Геометрический смысл векторного преобразования Радона $\mathbf{p}$ в трехмерном случае есть интеграл от исходной векторной функции $\mathbf{f}$ по гиперплоскости, перпендикулярной вектору нормали $\mathbf{n}$ и проходящей на расстоянии s от начала координат (так, для трехмерного пространства гиперплоскость есть плоскость Ω ; см. [2]).

Интеграл по гиперплоскости, реализуемый в прямом векторном преобразовании Радона $\mathbf{p}$, определен с помощью дельта-функции Дирака через интеграл по всему пространству $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{p}(s, \mathbf{n}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \delta(s - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})) d\mathbf{r} = p_x(s, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{i} + p_y(s, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{j} + p_z(s, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k},$$

где δ — дельта-функции Дирака, s — расстояние от начала координат до гиперплоскости, равное скалярному произведению векторов $s = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$, $d\mathbf{r}$ — трехмерный элемент объема, равный $d\mathbf{r} = dx dy dz$. Фактически каждая компонента векторной функции $\mathbf{p}(s, \mathbf{n})$ является линейной проекцией «плоскостной суммы значений» соответствующей компоненты исходной функции $\mathbf{f}$, определенная по оси OS аргументом s для каждого положения нормали $\mathbf{n}$ (см. рис. 1). Кроме того, вектор нормали $\mathbf{n}$ коллинеарен единичному вектору оси OS .

Если исходная векторная функция действительных переменных определена на всей плоскости и достаточно быстро убывает на бесконечности (так что соответствующие несобственные интегралы сходятся), то в трехмерном случае преобразование Радона обратимо. В подтверждение этого рассмотрим векторную спектральную функцию $\mathbf{P}(\omega, \mathbf{n})$ пространственной частоты ω как одномерное преобразование Фурье $\mathbf{p}(s, \mathbf{n})$ по переменной s :

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{n}) = \int \mathbf{p}(s, \mathbf{n}) e^{-i\omega s} ds = P_x(\omega, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{i} + P_y(\omega, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{j} + P_z(\omega, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}.$$

Итак,

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{n}) = \int \left[\int \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \delta(s - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})) d\mathbf{r} \right] e^{-i\omega s} ds.$$

Независимость векторной функции $\mathbf{f}$ от переменной интегрирования s позволяет изменить очередность интегрирования:

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{n}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{r}) \left[\int \delta((\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - s) e^{-i\omega s} ds \right] d\mathbf{r}.$$

Из последнего выражения после свертки с дельта-функцией получаем

$$\int \delta((\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - s) e^{-i\omega s} ds = e^{-i\omega(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})};$$

тогда

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{n}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{r}) e^{-i\omega(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})} d\mathbf{r}.$$

$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$, свяжем функциональным соотношением векторное преобразование Радона $\mathbf{p}$ в трехмерном случае и исходную векторную функцию $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}') &= \int \left(\int \left[\frac{\omega^2}{(2\pi)^3} \right] \cdot \left[\int \mathbf{p}(s, \mathbf{n}) e^{-i\omega s} ds \right] e^{i\omega(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})} d\omega \right) \sin \theta d\mathbf{n} = \\ &= \int \left(\int H(\omega) \cdot \mathbf{P}(\omega, \mathbf{n}) e^{i\omega(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})} d\omega \right) \sin \theta d\mathbf{n}, \end{aligned}$$

где скалярная спектральная функция $H(\omega) = \omega^2/(2\pi)^3$ — Фурье-образ свертывающей скалярной функции h .

Удобное представление обратного Фурье преобразования произведения спектральных функций в круглых скобках последнего выражения в пространстве оригинала в виде свертки дает одно из представлений обратного преобразования Радона:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}') = \int \left[\int h(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} - s) \mathbf{p}(s, \mathbf{n}) ds \right] \sin \theta d\mathbf{n} = \iint h(s) * \mathbf{p}(s, \theta, \alpha) \sin \theta d\theta d\alpha,$$

где символ «*» — знак операции свертки; при этом

$$h(s) = \int \frac{\omega^2}{(2\pi)^3} e^{i\omega s} d\omega$$

— свертывающая функция.

4. Реализация математического аппарата векторного преобразования Радона в магнитном неразрушающем контроле. На практике для описания физической величины, доступной косвенному измерению, используется определение магнитного потока индукции ϕ как совокупности (количества) силовых линий, проходящих сквозь рассматриваемую поверхность. Магнитный поток ϕ — величина скалярная и является интегралом вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ через конечную плоскость Ω первичного преобразователя:

$$\phi = \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\sigma,$$

где $d\sigma = \mathbf{n} d\sigma$ — векторный элемент площади плоскости Ω с вектором нормали $\mathbf{n}$:

$$\phi(s, \mathbf{n}) = \int_{\Omega, s} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) d\sigma;$$

скалярное произведение векторов $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})$ равно потоку через элемент плоскости Ω , которая удалена от центра координат на расстояние s . Скалярное произведение векторной функции индукции с единичным вектором тождественно равно проекции $\text{пр}_{\mathbf{n}} \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})/|\mathbf{n}| = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})$.

Введем векторную функцию, ориентируя скаляр магнитного потока в направление вектора нормали:

$$\phi(s, \mathbf{n}) = \phi(s, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n};$$

тогда обратное векторное преобразование Радона для функции магнитной индукции:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \int_0^\pi \int_0^\pi h(s) * \phi(s, \theta, \alpha) \sin \theta d\theta d\alpha.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жильников А. А. Способ и алгоритмы магнитоиндукционного исследования ферромагнитных тел внутри объектов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук — Рязань, 2018.
2. Жильников А. А., Жильников Т. А., Жулев В. И. Концептуальная модель способа неразрушающего измерения магнитных полей внутри биологических объектов// Биомед. технол. радиоэлектроника. — 2012. — № 7. — С. 37–43.

3. Жильников А. А., Жильников Т. А., Жулев В. И. Квазистационарная модель описания магнитного поля при реализации способа магнитоиндукционного исследования ферромагнитных тел внутри объектов// Инж. физ. — 2017. — № 9. — С. 33–39.
4. Клюев В. В., Соснин Ф. Р., Ковалев А. В. Неразрушающий контроль и диагностика. — М.: Машиностроение, 2003.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1988.
6. Deans S. R. The Radon Transform and Some of Its Applications. — New York: Wiley, 1983.

Жильников Тимур Александрович
Академия права и управления ФСИН России, Рязань
E-mail: quadrus02@mail.ru

Маскина Мария Сергеевна
Академия права и управления ФСИН России, Рязань
E-mail: mariaya_maskina@mail.ru