Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Хаусдорфова реализация линейных геодезических пространства Громова—Хаусдорфа, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 182, 33–38

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-33-38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:22:38

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 33–38
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-33-38

УДК 514.75

ХАУСДОРФОВА РЕАЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВА ГРОМОВА—ХАУСДОРФА

© 2020 г. А. О. ИВАНОВ, А. А. ТУЖИЛИН

Аннотация. Построена реализация «прямолинейной» геодезической, лежащей в пространстве Громова—Хаусдорфа, в виде кратчайшей геодезической относительно расстояния Хаусдорфа в некотором объемлющем метрическом пространстве.

Ключевые слова: метрическая геометрия, расстояние Хаусдорфа, расстояние Громова—Хаусдорфа, геодезическая.

HAUSDORFF REALIZATION OF LINEAR GEODESICS IN THE GROMOV–HAUSDORFF SPACE

© 2020 А. О. IVANOV, А. А. TUZHILIN

ABSTRACT. A realization of a “rectilinear” geodesic lying in the Gromov–Hausdorff space is constructed in the form of the shortest geodesic with respect to the Hausdorff distance in some ambient metric space.

Keywords and phrases: metric geometry, Hausdorff distance, Gromov–Hausdorff distance, geodesic.

AMS Subject Classification: 51F99, 53C23

1. Введение. В [5] было доказано, что пространство классов изометрии компактных метрических пространств, наделенное метрикой Громова—Хаусдорфа, является геодезическим. Доказательство состояло из двух шагов: сначала было показано, как на оптимальном соответствии R между конечными метрическими пространствами X и Y можно задать однопараметрическое семейство метрик, являющееся фактически кратчайшей геодезической R_t , $t \in [0, 1]$, соединяющей X с Y , причем длина этой геодезической равна расстоянию Громова—Хаусдорфа между X и Y . На втором шаге при помощи критерия Громова предкомпактности семейства метрических компактов было доказано, что для произвольных метрических компактов можно построить метрический компакт, являющийся их серединой. Несколько позже, в [2] и независимо в [4] было показано, что компактное оптимальное соответствие существует и между любыми компактными метрическими пространствами, причем если на таком соответствии задать однопараметрическое семейство метрик так же, как это было сделано в [5], то снова получится кратчайшая геодезическая с описанными выше свойствами. В [3] такие геодезические были названы *прямолинейными* (имеются еще и другие кратчайшие геодезические, которые в [3] называются *девиантными*).

В данной работе мы покажем, что по каждой паре X, Y компактных метрических пространств и каждому компактному оптимальному соответствию R между ними на компакте $R \times [0, 1]$ можно

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ для ведущих научных школ России (проект НШ-6399.2018.1, соглашение 075-02-2018-867) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00775-а).

так ввести метрику, чтобы при каждом t ограничение метрики на $R \times \{t\}$ совпадало с метрикой компакта R_t , и чтобы расстояние Хаусдорфа между $R \times \{t\}$ и $R \times \{s\}$ равнялось расстоянию Громова–Хаусдорфа между R_t и R_s . Иными словами, мы строим реализацию геодезической R_t в виде кратчайшей геодезической относительно расстояния Хаусдорфа, заданном на подмножествах пространства $R \times [0, 1]$ с введенной специальным образом метрикой.

2. Основные определения и предварительные результаты. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех *непустых* подмножеств пространства X . Для каждого $A, B \in \mathcal{P}(X)$ и $x \in X$ положим

$$|xA| = |Ax| = \inf \{|xa| : a \in A\}, \quad |AB| = \inf \{|ab| : a \in A, b \in B\},$$

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |Ab| \right\} = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |ab|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} |ba| \right\}.$$

Определение 2.1. Функция $d_H : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *расстоянием Хаусдорфа*.

Обозначим через $\mathcal{H}(X)$ семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X .

Теорема 2.2 (см. [1]). *Функция d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Теорема 2.3 (см. [1]). *Пространство $\mathcal{H}(X)$ компактно тогда и только тогда, когда X компактно.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z) , состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y' , изометричных соответственно X и Y , назовем *реализацией пары (X, Y)* . Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y назовем точную нижнюю грань чисел r , для которых существует такая реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) , что $d_H(X', Y') \leq r$.

Теорема 2.4 (см. [1]). *Расстояние Громова–Хаусдорфа задает метрику на множестве классов изометрии компактных метрических пространств.*

Определение 2.5. Множество классов изометрии всех метрических компактов, наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа, будем называть *пространством Громова–Хаусдорфа* и обозначать через $\mathcal{M}$.

Нам будет полезно еще одно (эквивалентное) определение расстояния Громова–Хаусдорфа. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех *непустых* отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$.

Определение 2.6. Если X и Y — метрические пространства, то *искажением $\text{dis } \sigma$ отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$* назовем число

$$\text{dis } \sigma = \sup \left\{ ||xx'| - |yy'| : (x, y), (x', y') \in \sigma \right\}.$$

Отношение $R \subset X \times Y$ между множествами X и Y называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Теорема 2.7 (см. [1]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \left\{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \right\}.$$

Для топологических пространств X и Y будем рассматривать $X \times Y$ как топологическое пространство со стандартной топологией декартова произведения. Тогда имеет смысл говорить о *замкнутых отношениях и соответствиях*. Множество всех замкнутых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^c(X, Y)$.

Следствие 2.8 (см. [4]). Для метрических пространств X и Y имеем

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}^c(X, Y) \}.$$

Определение 2.9. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{dis } R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$. Подмножество в $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$, состоящее из всех замкнутых оптимальных соответствий, обозначим через $\mathcal{R}_{\text{opt}}^c(X, Y)$.

Теорема 2.10 (см. [4]). Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\text{opt}}^c(X, Y) \neq \emptyset$.

Теорема 2.11 (см. [2, 4]). Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и каждого $R \in \mathcal{R}_{\text{opt}}^c(X, Y)$ семейство R_t , $t \in [0, 1]$, компактных метрических пространств, удовлетворяющее условиям $R_0 = X$ и $R_1 = Y$, а при $t \in (0, 1)$ пространство R_t — это множество R с метрикой

$$|(x, y), (x', y')|_t = (1 - t)|xx'| + t|yy'|,$$

является кратчайшей кривой в $\mathcal{M}$, соединяющей X и Y , причем длина этой кривой равна $d_{GH}(X, Y)$.

Следуя работе [3], кривую вида R_t будем называть *прямолинейной геодезической*, соответствующей $R \in \mathcal{R}_{\text{opt}}^c(X, Y)$. В этой же работе отмечалось, что в пространстве Громова—Хаусдорфа имеются и не прямолинейные геодезические.

Основной результат настоящей работы вытекает из более общей теоремы, описывающей некоторую специальную конструкцию метрики на декартовом произведении метрического пространства и отрезка евклидовой прямой.

3. Специальное продолжение метрики на декартово произведение. Пусть Z — произвольное множество, на котором задано однопараметрическое семейство метрик ρ_t , $t \in [a, b]$. Для удобства изложения положим $|zz'|_t = \rho_t(z, z')$ и $Z_t = Z \times \{t\}$. Фиксируем некоторое $c > 0$ и определим на $Z \times [a, b]$ функцию расстояния, положив

$$|(z_1, t_1)(z_2, t_2)| = \inf_{z \in Z} (|z_1 z|_{t_1} + |zz_2|_{t_2}) + c|t_1 - t_2|. \quad (1)$$

Ясно, что определенная только что функция неотрицательна и симметрична, т.е. действительно является расстоянием, причем ограничение этой функции на каждое сечение $Z \times \{t\}$ совпадает с ρ_t , а на каждое сечение $\{z\} \times [a, b]$ — с евклидовым расстоянием $c|t - s|$, $t, s \in [a, b]$, которое, заметим, не зависит от выбора z ; при этом $|Z_t Z_s| = c|t - s|$.

Чтобы добиться выполнения неравенства треугольника, нам понадобится ввести еще два дополнительных условия.

Теорема 3.1. Во введенных выше обозначениях предположим, что выполняются следующие условия:

- (i) для любых $z, z' \in Z$ функция $f(t) = |zz'|_t$, $t \in [a, b]$, монотонна;
- (ii) для любых $(z, t), (z', s) \in Z \times [a, b]$ имеем

$$|zz'|_t \leq c|t - s| + |zz'|_s + c|t - s|.$$

Тогда определенная в формуле (1) функция расстояния удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. является метрикой, причем для любых $t, s \in [a, b]$ имеем

$$d_H(Z_t, Z_s) = |Z_t Z_s| = c|t - s|,$$

где d_H — расстояние Хаусдорфа в $\mathcal{H}(Z \times [a, b])$.

Доказательство. Доказательство проиллюстрировано на рисунке 1.

Для проверки неравенства треугольника выберем произвольные три точки (z_i, t_i) , $i = 1, 2, 3$, и покажем, что

$$|(z_1, t_1)(z_2, t_2)| + |(z_2, t_2)(z_3, t_3)| \geq |(z_1, t_1)(z_3, t_3)|.$$

Рис. 1. Проверка неравенства треугольника

Доказательство зависит от того, в каком порядке расположены числа t_i (на рисунке t_i соответствуют высоте, на которой изображены сечения Z_{t_i} в виде прямоугольников): с точностью до симметрии и вырождения, т.е. когда некоторые t_i равны друг другу, имеется ровно три случая, каждый из которых мы сейчас разберем аналитически. Отметим, что сплошные ломаные линии, соединяющие z_i и z_j , естественным образом кодируют расстояние между точками (z_i, t_i) и (z_j, t_j) , а пунктирные линии показывают, как можно сократить величину, равную $|(z_1, t_1)(z_2, t_2)| + |(z_2, t_2)(z_3, t_3)|$, чтобы получить значение, большее или равное $|(z_1, t_1)(z_3, t_3)|$.

Во всех трех случаях начальный шаг оценки одинаков и получается из неравенства треугольника $|zz_2|_{t_2} + |z_2z'|_{t_2} \geq |zz'|_{t_2}$:

$$\begin{aligned} |(z_1, t_1)(z_2, t_2)| + |(z_2, t_2)(z_3, t_3)| &= \\ &= \inf_{z \in Z} (|z_1z|_{t_1} + |zz_2|_{t_2}) + c|t_1 - t_2| + \inf_{z' \in Z} (|z_2z'|_{t_2} + |z'z_3|_{t_3}) + c|t_3 - t_2| \geq \\ &\geq \inf_{z, z' \in Z} (|z_1z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z'z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_2| + c|t_3 - t_2|. \end{aligned}$$

Затем начинаются отличия.

(a) Имеем

$$\begin{aligned} \inf_{z, z' \in Z} (|z_1z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z'z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_2| + c|t_3 - t_2| &= \\ &= \inf_{z, z' \in Z} (|z_1z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z'z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_3| + c|t_3 - t_2| + c|t_3 - t_2| \geq \\ &\geq \inf_{z, z' \in Z} (|z_1z|_{t_1} + |zz'|_{t_3} + |z'z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_3| \geq \\ &\geq \inf_{z \in Z} (|z_1z|_{t_1} + |zz_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_3| = |(z_1, t_1)(z_3, t_3)|, \end{aligned}$$

где первое равенство, в силу выбранного порядка между числами t_i , получается из соотношения

$$c|t_1 - t_2| = c|t_1 - t_3| + c|t_3 - t_2|;$$

первое неравенство вытекает из условия (ii) теоремы 3.1, дающее

$$c|t_3 - t_2| + |zz'|_{t_2} + c|t_3 - t_2| \geq |zz'|_{t_3};$$

последнее неравенство следует из неравенства треугольника

$$|zz'|_{t_3} + |z'z_3|_{t_3} \geq |zz_3|_{t_3}.$$

(b) В этом случае мы воспользуемся условием (i) теоремы 3.1, в силу которой $|zz'|_{t_2}$ больше либо равен одному из $|zz'|_{t_1}$ и $|zz'|_{t_3}$. Без ограничения общности, предположим, что $|zz'|_{t_2} \geq |zz'|_{t_1}$; тогда

$$\begin{aligned} \inf_{z, z' \in Z} (|z_1 z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z' z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_2| + c|t_3 - t_2| &\geq \\ &\geq \inf_{z, z' \in Z} (|z_1 z|_{t_1} + |zz'|_{t_1} + |z' z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_3| \geq \\ &\geq \inf_{z' \in Z} (|z_1 z'|_{t_1} + |z' z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_3| = |(z_1, t_1)(z_3, t_3)|, \end{aligned}$$

где первое неравенство получается из $|zz'|_{t_2} \geq |zz'|_{t_1}$, а также, в силу выбранного порядка между числами t_i , из

$$c|t_1 - t_3| = c|t_1 - t_2| + c|t_3 - t_2|;$$

второе неравенство вытекает из неравенства треугольника

$$|z_1 z|_{t_1} + |zz'|_{t_1} \geq |z_1 z'|_{t_1}. \quad (2)$$

(c) Имеем

$$\begin{aligned} \inf_{z, z' \in Z} (|z_1 z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z' z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_2| + c|t_3 - t_2| &= \\ = \inf_{z, z' \in Z} (|z_1 z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z' z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_2| + c|t_1 - t_2| + c|t_3 - t_1| &\geq \\ \geq \inf_{z, z' \in Z} (|z_1 z|_{t_1} + |zz'|_{t_1} + |z' z_3|_{t_3}) + c|t_3 - t_1| &\geq \\ \geq \inf_{z' \in Z} (|z_1 z'|_{t_1} + |z' z_3|_{t_3}) + c|t_1 - t_3| &= |(z_1, t_1)(z_3, t_3)|, \end{aligned}$$

где первое равенство, в силу выбранного порядка между числами t_i , получается из соотношения

$$c|t_3 - t_2| = c|t_3 - t_1| + c|t_1 - t_2|;$$

первое неравенство вытекает из условия (ii) теоремы 3.1, дающее

$$c|t_1 - t_2| + |zz'|_{t_2} + c|t_1 - t_2| \geq |zz'|_{t_1};$$

последнее неравенство следует из неравенства треугольника (2). $\square$

В качестве следствия из теоремы 3.1 построим реализацию прямолинейной геодезической из пространства Громова—Хаусдорфа в виде кратчайшей геодезической в смысле метрики Хаусдорфа.

4. Реализация прямолинейных геодезических. Выберем произвольные $X, Y \in \mathcal{M}$, $R \in \mathcal{R}_{\text{opt}}^c(X, Y)$ и построим соответствующую R прямолинейную геодезическую R_t , $t \in [0, 1]$. Для удобства изложения расстояние в R_t между точками (x, y) и (x', y') обозначим через $|(x, y), (x', y')|_t$. Положим $c = \frac{1}{2} \text{dis } R$ и зададим на $R \times [0, 1]$ расстояние по формуле (1).

Следствие 4.1. Для неизометричных X и Y определенная выше функция расстояния на $R \times [0, 1]$ является метрикой, для которой $d_H(R_t, R_s) = d_{GH}(X, Y)|t - s|$, так что R_t , рассматриваемое как кривая в пространстве $\mathcal{H}(R \times [0, 1])$, является кратчайшей геодезической.

Доказательство. Достаточно проверить, что в рассматриваемом случае выполняются условия теоремы 3.1. Так как X и Y неизометричны, то $\text{dis } R > 0$ и, значит, $c > 0$.

Далее, для произвольных (x, y) и (x', y') из R функция $f(t)$ из п. (i) равна $(1 - t)|xx'| + t|yy'|$, так что она линейна по t и, значит, условие п. (i) выполняется.

Наконец, проверим выполнение условия п. (ii). Для этого выберем произвольные $(x, y), (x', y') \in R$, а также любые $t, s \in [0, 1]$; тогда

$$\begin{aligned} |(x, y), (x', y')|_t - |(x, y), (x', y')|_s &= \\ &= (1 - t)|xx'| + t|yy'| - (1 - s)|xx'| - s|yy'| = \\ &= (t - s)(|yy'| - |xx'|) \leq |t - s| \text{dis } R = 2c|t - s|, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. — М.-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2004.
2. Chowdhury S., Memoli F. Constructing geodesics on the space of compact metric spaces/ [arXiv:1603.02385v3](#) [math.MG].
3. Chowdhury S., Memoli F. Explicit geodesics in Gromov–Hausdorff space/ [arXiv:1603.02385v4](#) [math.MG].
4. Ivanov A. O., Iliadis S., Tuzhilin A. A. Realizations of Gromov–Hausdorff distance/ [arXiv:1603.08850](#) [math.MG].
5. Ivanov A. O., Nikolaeva N. K., Tuzhilin A. A. The Gromov–Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic/ [arXiv:1504.03830](#) [math.MG].

Иванов Александр Олегович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Тужилин Алексей Августинovich

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuz@mech.math.msu.su