Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский, О задаче Рамсея—Касса—Купманса для потребительского выбора, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 182, 39–44

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-39-44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:50:25

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 39–44
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

УДК 518.865

О ЗАДАЧЕ РАМСЕЯ—КАССА—КУПМАНСА ДЛЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА

© 2020 г. А. И. КОЗКО, Л. М. ЛУЖИНА, А. Ю. ПОПОВ, В. Г. ЧИРСКИЙ

Аннотация. Предлагаемая статья относится к классической (так называемой нереалистичной) модели Рамсея—Касса—Купманса. При этом рассматривается постановка задачи, в которой для соответствующего дифференциального уравнения предложен метод аналитической аппроксимации его решений. Суть метода наиболее явно проявляется именно в этой постановке задачи. В последующих работах предполагается развить этот метод и применить его к задачам в более общей постановке.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея—Касса—Купманса, конкурентные домохозяйства, максимизация полной полезности, дифференциальное уравнение, аналитическая аппроксимация.

ON THE RAMSEY—CASS—KOOPMANS PROBLEM FOR CONSUMER CHOICE

© 2020 А. И. КОЗКО, Л. М. ЛУЖИНА, А. Ю. ПОПОВ, В. Г. ЧИРСКИЙ

ABSTRACT. In this paper, we examine the classical (so-called unrealistic) Ramsey—Cass—Koopmans model. For the corresponding differential equation, we apply the method of analytical approximation of its solutions. In subsequent works, we develop this method and apply it to problems in a more general statement.

Keywords and phrases: mathematical model, Ramsey—Cass—Koopmans problem, competitive households, maximization of total utility, differential equation, analytical approximation.

AMS Subject Classification: 49K05, 49K15, 49K30

1. Введение. Рассмотрим модель Рамсея (см. [1, 3, 5]) в задаче потребительского выбора при оптимизации деятельности макроэкономической структуры. Исследование модели и ее усовершенствование были заложены в работах Касса и Купманса, поэтому часто модель называют моделью Касса—Купманса, чтобы подчеркнуть ее отличие от первоначального вида, рассмотренного Рамсеем. Также отметим большой вклад в развитие данной теории Маленво, в некоторых источниках [6] считают, что модель лучше называть моделью Касса—Маленво—Купманса.

Перейдем к постановке задачи. Через t обозначено время, $K(t)$ — экономический ресурс (капитал) в момент времени t , которым мы располагаем и можем вкладывать в производство. Предполагается заданным начальный капитал $K(0) = K_0$ и $K_1 = K(T)$ — капитал в момент времени T , в течение которого планируется экономическая деятельность.

Задача состоит в том, чтобы в течение всего промежутка времени $0 \leq t \leq T$, когда осуществляется экономическая деятельность, вкладывать в дело капитал с максимальной пользой; при этом нам известно, сколько капитала мы вообще в праве израсходовать (это и есть разность $K_0 - K_1$).

Полная полезность (см. [2]) экономической деятельности может быть задана как

$$\int_0^T U(f(K(t)) - \dot{K}(t)) \cdot e^{-\varrho t} dt. \quad (1)$$

Функция U называется функцией полезности, а функция f выражает зависимость производства продукта от капитала. Под $\dot{K}(t)$ понимается, как обычно, производная функции K по времени. Если ресурс $K(t)$ расходуется, то $\dot{K}(t) < 0$, а $|\dot{K}(t)|$ является скоростью расхода. Число $\varrho > 0$ определяется некоторыми факторами, характерными для деятельности данной макроэкономической структуры. В нем учтены ставка временного предпочтения, а также темп прироста семьи в задаче о домохозяйстве.

Заметим, что в работах [2,4] были рассмотрены непостоянные ставки временного предпочтения, т.е. рассматривается вместо множителя $e^{-\varrho t}$ множитель $e^{-\varrho t - \varphi(t)}$ в интеграле (1), выражающем полную полезность. В рамках данной статьи ограничимся случаем $\varphi(t) \equiv 0$.

Мы можем распоряжаться капиталом (функцией $K(t)$) в заданных пределах по своему усмотрению. Требуется найти такую оптимальную (естественно, убывающую) функцию $K(t)$, которая при условиях

$$K(0) = K_0, \quad K(T) = K_1 \quad (2)$$

доставляет максимум интеграла (1).

2. Формализация модели. Данная задача в ее математической постановке входит в достаточно широкий класс задач нахождения гладких оптимальных процессов $K(t)$, являющихся экстремальными для функционалов

$$\int_0^T F(t, K(t), \dot{K}(t)) dt \quad (3)$$

при условиях (2), где F — дифференцируемая функция трех переменных достаточно общего вида. Известно, что экстремали функционала (3) при наличии граничных условий (2) удовлетворяют уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{K}} \right) = \frac{\partial F}{\partial K}. \quad (4)$$

Однако сказать что-либо содержательное о поведении решений дифференциального уравнения (4) в силу его слишком большой общности не представляется возможным.

В рассматриваемой нами задаче Рамсея

$$F(t, K, \dot{K}) = e^{-\varrho t} U(f(K) - \dot{K}), \quad (5)$$

причем относительно функции U предполагается, что она возрастает, дважды дифференцируема и ее вторая производная отрицательна (U вогнута), предполагается также, что функция f дифференцируема и возрастает. Частные производные по K и $\dot{K}$ функции трех переменных (5) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} &= e^{-\varrho t} \frac{\partial}{\partial K} U(f(K) - \dot{K}) = \\ &= e^{-\varrho t} U'(f(K) - \dot{K}) \frac{\partial}{\partial K} (f(K) - \dot{K}) = e^{-\varrho t} f'(K) U'(f(K) - \dot{K}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{K}} = e^{-\varrho t} \frac{\partial}{\partial \dot{K}} U(f(K) - \dot{K}) = -e^{-\varrho t} U'(f(K) - \dot{K}). \quad (7)$$

Теперь, рассмотрев частную производную $\partial F/\partial \dot{K}$ как функцию переменной t , найдем $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{K}} \right)$. Согласно (7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{K}} &= \frac{d}{dt} (-e^{-\varrho t}) U'(f(K) - \dot{K}) - e^{-\varrho t} \frac{d}{dt} U'(f(K) - \dot{K}) = \\ &= \varrho e^{-\varrho t} U'(f(K) - \dot{K}) - e^{-\varrho t} U''(f(K) - \dot{K}) \frac{d}{dt} (f(K) - \dot{K}). \end{aligned} \quad (8)$$

При дифференцировании по t выражения $f(K) - \dot{K}$ учтем, что K является функцией переменной t :

$$\frac{d}{dt} (f(K) - \dot{K}) = \dot{K} f'(K) - \ddot{K}. \quad (9)$$

Из (8), (9) находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{K}} \right) = (f(K) - \dot{K}) = \varrho e^{-\varrho t} U'(f(K) - \dot{K}) - (\dot{K} f'(K) - \ddot{K}) e^{-\varrho t} U''(f(K) - \dot{K}). \quad (10)$$

На основании (6) и (10) заключаем, что уравнение Эйлера (4) для интересующей нас функции (5) после умножения обеих частей на $e^{\varrho t}$ принимает вид

$$(\ddot{K} - \dot{K} f'(K)) U''(f(K) - \dot{K}) + \varrho U'(f(K) - \dot{K}) = f'(K) U'(f(K) - \dot{K})$$

или, после переноса $\varrho U'(f(K) - \dot{K})$ в правую часть,

$$(\ddot{K} - \dot{K} f'(K)) U''(f(K) - \dot{K}) = (f'(K) - \varrho) U'(f(K) - \dot{K}).$$

Для упрощения записи полученного уравнения введем функцию

$$\mathcal{L} = -\frac{U'(x)}{U''(x)}. \quad (11)$$

Поскольку согласно сделанным предположениям производная $U'(x)$ положительна, а вторая производная $U''(x)$ отрицательна, $\mathcal{L}$ является положительной функцией. Более того, ниже мы увидим, что в наиболее востребованных моделях функция $\mathcal{L}$ оказывается линейной. В результате введенного обозначения уравнение Эйлера для задачи Рамсея записывается в следующей форме:

$$\ddot{K} - \dot{K} f'(K) = (\varrho - f'(K)) \mathcal{L}(f(K) - \dot{K}). \quad (12)$$

Тем самым показано, что оптимальная зависимость экономического ресурса от времени в задаче Рамсея удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, разрешенному относительно второй производной, но не линейному даже в наиболее употребительном случае $\mathcal{L}(x) \equiv px$ (p постоянная) из-за наличия функции f .

Тем не менее, уравнение (12) является автономным: переменная t в него явно не входит. Из теории дифференциальных уравнений известно, что это обстоятельство дает возможность написать дифференциальное уравнение первого порядка для функции y , выражающей зависимость $\dot{K}$ от K :

$$\dot{K} = y(K). \quad (13)$$

По нашему мнению, нахождение зависимости $\dot{K}$ от K является наиболее важной задачей для практического оптимального управления экономическим ресурсом. В процессе управления капиталом мы в каждый момент времени знаем его величину K . И для того, чтобы в каждый момент времени выбрать оптимальное решение относительно размера вложения капитала в производство, как раз необходимо знать оптимальную скорость его расхода $|\dot{K}|$ в зависимости от величины K , т.е. функцию (13).

Выведем дифференциальное уравнение, которому вследствие (12) должна удовлетворять функция (13). Имеем

$$\ddot{K} = \frac{d\dot{K}}{dt} = \frac{dy(K)}{dK} \frac{dK}{dt} = y'(K) \dot{K} = y'(K) y(K).$$

Отсюда находим

$$\ddot{K} - \dot{K}f'(K) = y'(K)y(K) - y(K)f'(K) = y(K)(y'(K) - f'(K)). \quad (14)$$

Подставив выражение (14) в левую часть (12), приходим к уравнению

$$y(K)(y'(K) - f'(K)) = (\varrho - f'(K))\mathcal{L}(f(K) - y(K)). \quad (15)$$

Для удобства записи введем функцию

$$z(K) = f(K) - y(K).$$

По смыслу задачи $z(K) > 0$. Действительно, величина $z(K) = f(K(t)) - \dot{K}(t)$ представляет собой потребление ресурсов и должна быть положительной. В этих обозначениях уравнение (15) приобретает следующий вид:

$$z'(K)(z(K) - f(K)) = \mathcal{L}(z(K))(\varrho - f'(K)).$$

Это дифференциальное уравнение может быть записано в форме дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной; оно равносильно уравнению (15):

$$\frac{dz}{dK} = \frac{\mathcal{L}(z(K))}{z(K) - f(K)}(\varrho - f'(K)). \quad (16)$$

3. Подходы к исследованию математической модели. Рассмотрим подходы к решению уравнения (16) в наиболее употребительном случае, когда функция U в модели Рамсея выбирается степенной или логарифмической [1]:

$$U(x) = U_0 + x^d, \quad 0 < d < 1, \quad U(x) = U_0 + \ln x.$$

Согласно (11) имеем

$$\mathcal{L}(x) = (1 - d)^{-1}x, \quad 0 < d < 1, \quad \mathcal{L}(x) = x \text{ (в логарифмическом случае)}. \quad (17)$$

Таким образом, требуется решить уравнение

$$\frac{dz}{dK} = \frac{p(\varrho - f'(K))z(K)}{z(K) - f(K)} = \frac{p(\varrho - f'(K))z(K)}{1 - \frac{f(K)}{z(K)}}. \quad (18)$$

где p — постоянная, $p \geq 1$.

Изучим часто используемые модели, в которых f является степенной функцией с показателем степени меньшим 1:

$$f(K) = \alpha K^\beta, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \beta < 1. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться в том, что найти точное решение уравнений (12) или (18) в квадратурах, если функция f имеет вид (19) вряд ли удастся. С другой стороны, поскольку рассматриваемая модель является приближительной, нахождение даже точного решения уравнения Эйлера не означает, что найденный «теоретически оптимальный» процесс $K(t)$ окажется таковым в действительности. Поэтому на самом деле мы вполне можем удовлетвориться нахождением приближенных решений уравнений (12) или (18). Если относительная погрешность приближения окажется малой, то такой близкий к теоретически оптимальному процесс вполне можно использовать в практических расчетах. Для нахождения аналитической аппроксимации оптимального экономического ресурса $K(t)$ (или оптимальной скорости его вложения $|\dot{K}|$) мы предлагаем следующие два подхода.

Если конечный уровень капитала K_1 не намного меньше начального K_0 (например, $K_1 = K_0/2$), то на отрезке $[K_1, K_0]$ мы можем приблизить функцию (19) с «достаточно малой» относительной погрешностью. Например, абсолютная погрешность наилучшего приближения функции $\sqrt{x}$ линейной функцией на отрезке $[1; 2]$ в равномерной метрике равна $(\sqrt{2} - 1)^3/8 < 0,01$. Следовательно, относительная погрешность приближения функции $\sqrt{K}$ линейной на произвольном отрезке вида $[K_0/2, K_0]$ составляет менее 1%. Если же в уравнении (12) вместо функции f мы рассмотрим линейную функцию $f_1(K) = aK + b$, то уравнение (12) приобретает вид

$$\ddot{K} - a\dot{K} = (\varrho - a)\mathcal{L}(aK + b - \dot{K}).$$

А коль скоро, как отмечалось в (17), в наиболее употребительных ситуациях $\mathcal{L}(x) \equiv px$ (p — постоянная), то приходим к дифференциальному уравнению

$$\ddot{K} + ((\varrho - a)p - a)\dot{K} - (\varrho - a)apK = (\varrho - a)pb. \quad (20)$$

Оно является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и его общее решение записывается в простом аналитическом виде. Таким образом, если доказать, что решения уравнений (12) и (20) «мало отличаются» при условии, что «мало отличаются» функции f_1 и f , то, решив уравнение (20), мы получим аналитическую аппроксимацию решений уравнения (12).

Предложим способ построения аналитической аппроксимации для решений уравнения (20), которые должны образовывать однопараметрическое семейство. Предположим, что мы нашли хотя бы одно точное решение $Z_0(K)$ уравнения (20). (В частном случае $\beta = 1 - d$ такое решение сразу предъясняется: $Z_0(K) \equiv p\varrho K \equiv (\varrho/\beta)K$.) Все же остальные решения мы приближенно считаем равными

$$Z_C(K) = Z_0(K) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Тогда согласно (16) для функции (13) следует взять приближение

$$y_C(K) = f(K) - Z_0(K) - C,$$

в котором требуется определить постоянную C , исходя из граничных условий (2). Это осуществляется следующим образом. Поскольку

$$\frac{dK}{dt} = y(K),$$

то

$$\int \frac{dK}{y(K)} = t + \text{Const.}$$

А так как $K(0) = K_0$, то получаем

$$\int_{K_0}^K \frac{ds}{y(s)} = t.$$

Условие же $K(T) = K_1$ (с учетом, что $K_1 < K_0$ и $y(s) < 0$) дает равенство

$$\int_{K_1}^{K_0} \frac{ds}{-y(s)} = T.$$

Следовательно, постоянная C определяется равенством

$$\int_{K_1}^{K_0} \frac{dK}{C + Z_0(K) - f(K)} = T.$$

В заключение отметим, что это работа представляет собой начальный этап исследований в намеченных выше направлениях построения аналитической аппроксимации оптимальных процессов вложения капитала. Продолжение исследований предполагает, в том числе проведение вычислительных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост. — М.: БИНОМ—Лаборатория знаний, 2010.
2. Barro R. J. Laibson meets Ramsey in the neoclassical growth model// Quart. J. Econ. — 1999. — № 114. — P. 1125–1152.
3. Benassy J.-P. The Ramsey model// in: Macroeconomic Theory. — New York: Oxford Univ. Press, 2011. — P. 145–160.
4. Laibson D. Golden eggs and hyperbolic discounting// Quart. J. Econ. — 1997. — № 112. — P. 443–477.
5. Ramsey F. P. A mathematical theory of saving// Econ. J. — 1928. — 38, № 152. — P. 543–559.

6. *Spear S. E., Young W.* Optimum savings and optimal growth: the Cass–Malinvaud–Koopmans nexus// *Macroecon. Dyn.* — 2014. — 18, № 1. — P. 215–243.

Козко Артем Иванович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации, Москва

E-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Лужина Любовь Михайловна

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации, Москва

E-mail: lluzhina@gmail.com

Попов Антон Юрьевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации, Москва

E-mail: aypopov.msu@yandex.ru

Чирский Владимир Григорьевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Московский педагогический государственный университет

E-mail: vgchirskii@yandex.ru