Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Макаров, Краевая задача для систем сверточных уравнений в анизотропных пространствах функций, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 182, 66–69

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-66-69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 06:24:46

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 66–69
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-66-69

УДК 517.954

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ СВЕРТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ

© 2020 г. А. А. МАКАРОВ

Аннотация. В работе получены анизотропные классы корректности задачи Коши и краевой задачи для систем уравнений в свертках. Для частного случая дифференциальных уравнений используется гиперповерхность сопряженных порядков соответствующего многочлена и с ее помощью получают различные классы корректности.

Ключевые слова: уравнение в свертках, краевая задача, преобразование Фурье, гиперповерхность сопряженных порядков, анизотропное пространство функций.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR SYSTEMS OF CONVOLUTIONAL EQUATIONS IN ANISOTROPIC FUNCTIONAL SPACES

© 2020 А. А. MAKAROV

ABSTRACT. In this paper, anisotropic classes of well-posed Cauchy problems and boundary-value problems for systems of convolutions equations are obtained. For a particular case of differential equations, a hypersurface of conjugate orders of the corresponding polynomial is used, and various classes of well-posed problems are obtained.

Keywords and phrases: convolution equation, boundary-value problem, Fourier transform, hypersurface of conjugate orders, anisotropic space of functions.

AMS Subject Classification: 35A05, 35S10

Задача Коши для дифференциальных уравнений в частных производных рассматривается, как правило, в изотропных пространствах, т.е. когда по разным пространственным переменным рост решения одинаковый. Лишь в работах Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [1, 2] рассматривались уравнения в свертках в пространствах функций экспоненциального роста, в которых различным переменным соответствовал различный рост. И только в работе Г. П. Сердюка [5] были получены анизотропные классы единственности решений задачи Коши для систем дифференциальных уравнений.

В данной работе получены анизотропные классы корректности задачи Коши и краевой задачи для систем уравнений в свертках, обобщающих дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения.

Рассматривается краевая задача

$$2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A(x) * u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$B(x) * u(x, 0) + C(x) * u(x, T) = \varphi(x), \quad (2)$$

где $u(x, t)$, $\varphi(x)$ — вектор-функции, принадлежащие некоторому линейному топологическому пространству Φ при всех $t \in [0, T]$; $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ — матрицы, компоненты которых являются свертывателями в пространстве Φ .

Задача (1)–(2) называется *корректной* в пространстве Φ , если для любой функции $\varphi(x) \in \Phi$ существует единственное решение $u(x, t) \in \Phi$, $t \in [0, T]$, задачи (1)–(2) и это решение непрерывно зависит от $\varphi(x)$ в топологии пространства Φ .

При исследовании корректности краевой задачи (1)–(2) важную роль играет разрешающая матрица этой задачи

$$Q(s, t) = \exp t\tilde{A}(s) \left(\tilde{B}(s) + \tilde{C}(s) \exp T\tilde{A}(s) \right)^{-1},$$

где $\tilde{A}(s)$, $\tilde{B}(s)$ и $\tilde{C}(s)$ — преобразования Фурье матриц $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$. В [3, 4] автором был доказан критерий корректности краевой задачи (1)–(2).

Теорема 1. Пусть пространство Φ является классом единственности задачи Коши для системы (1). Краевая задача (1)–(2) корректна в пространстве Φ тогда и только тогда, когда $Q(s, t) \in FC(\Phi)$, т.е. является преобразованием Фурье от свертывателя в пространстве Φ .

В качестве пространства Φ будем рассматривать проективный предел банаховых пространств

$$W_{L, \alpha}^s = \left\{ \varphi(x) \in C^s(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |k| \leq s} |D^k \varphi(x)| \exp \left(- \sum_{j=1}^n l_j(\alpha_j |x|) \right) < \infty \right\},$$

где $\alpha_j > 0$, а $l_j(\xi)$ — выпуклая непрерывная положительная функция, растущая быстрее любой линейной функции. Тогда

$$W_L^\infty = \bigcap_{s \in \mathbb{N}, \alpha > 0} W_{L, \alpha}^s$$

с топологией проективного предела.

В [4] показано, что преобразования Фурье свертывателей этого пространства принадлежат пространству

$$\Omega_{L^*} = \left\{ \psi(s) — \text{целая функция: } |\psi(s)| \leq C_0(1 + |s|)^p \exp \sum_{j=1}^n l_j^*(\beta_j |\operatorname{Im} s_j|) \right\},$$

где $l_j^*(\eta)$ — двойственная по Юнгу к $l_j(\xi)$ с некоторым $\beta_j > 0$.

Будем также использовать следующие пространства из [1]:

$$S_{[\nu]} = \bigcap_{s, l} C_{l[\nu]}^s,$$

где $C_{l[\nu]}^s$ — банахово пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq s} \exp \left(- \sum_{j=1}^n \nu_j |x_j| \right) (1 + |x|^2)^{l/2} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

В [1] показано, что преобразование Фурье свертывателя принадлежит пространству

$$\Psi_{[\nu]} = \left\{ \psi(s) — \text{голоморфная в слое } |\operatorname{Im} s_j| < \nu_j, |\varphi(s)| < c(1 + |s|)^p d(\operatorname{Im} s_j)^{-h} \right\},$$

где $d(\operatorname{Im} s_j)$ — расстояние от s до границы слоя.

Применяя теорему 1 к введенным пространствам, получим следующие результаты.

Теорема 2. Краевая задача (1)–(2) корректна в пространстве W_L^∞ тогда и только тогда, когда $Q(s, t) \in \Omega_{L^*}$.

Теорема 3. Краевая задача (1)–(2) корректна в пространстве $S_{[\nu]}$ тогда и только тогда, когда $Q(s, t) \in \Psi_{[\nu]}$.

Замечание 1. Можно рассмотреть также функциональные пространства, в которых по одним параметрам функция растет как $\exp b|x_k|^{p_k}$, а по другим — как $\exp \nu_k|x_k|$.

Замечание 2. Так как разрешающий оператор является сверткой в заданном пространстве, то его можно продолжить на функции конечной гладкости и получить корректную разрешимость краевой задачи в шкале соответствующих банаховых пространств.

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad a, b \neq 0, \\ u(x_1, x_2, 0) + u(x_1, x_2 - bT, T) &= \varphi(x).\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{A}(s) = -as_1^2 + bis_2$, $\tilde{B}(s) = 1$, $\tilde{C}(s) = \exp^{-ibs_2T}$. Тогда

$$Q(s_1, s_2, t) = \frac{\exp t(-as_1^2 + ibs_2)}{(1 + \exp(-Tas_1^2))}.$$

Знаменатель $1 + \exp(-Tas_1^2)$ не обращается в нуль при $|\operatorname{Im} s_1| < \sqrt{\pi/(T|a|)} = \nu_1$. Значит, в слое $|\operatorname{Im} s_1| < \sqrt{\pi/(T|a|)}$, $s_2 \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$|Q(s_1, s_2, t)| \leq C \exp |b| \cdot |\operatorname{Im} s_2| \cdot d^{-1}(\operatorname{Im} s_1).$$

Следовательно, данная краевая задача корректна в пространстве бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих оценке

$$|D^k \varphi(x)| \leq C \exp(l(\alpha|x_2|) + \beta|x_1|),$$

где $\beta \in (0, \nu_1)$, а $l(|x_2|)$ — любая выпуклая положительная функция, растущая быстрее линейных функций.

Рассмотрим теперь частный случай нашей краевой задачи — задачу Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \quad \text{где} \quad P(is) = \sum_{|k| \leq m} a_k s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n}.$$

Для таких уравнений в [5] было введено понятие гиперповерхности сопряженных порядков

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^n : \max_{k: \alpha_k \neq 0} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\alpha_i} \leq 1 \right\}.$$

В той же работе был получен следующий результат: если $\alpha \in S$, причем $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 1$, $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n = 1$, и решение задачи Коши с нулевым начальным условием удовлетворяет оценке

$$|u(x, t)| \leq C \exp \left(\sum_{k=1}^r c_k |x_k|^{\alpha'_k} + \sum_{k=r+1}^n c_k |x_k|^{b_k} \right) \quad \forall t \in [0, T],$$

где $\alpha'_k = \alpha_k/(\alpha_k - 1)$ — сопряженный порядок, а b_k — любое число, большее 1, то $u(x, t) \equiv 0$. Применяя к задаче Коши теорему 2, получим следующий результат.

Теорема 4. Если полином $Q(\tau, s) = \tau - P(is)$ является экспоненциально корректным (см. [2]), т.е. $\operatorname{Re} P(is) < C(\nu)$ при $|\operatorname{Im} s| < \nu$ при всех $\nu > 0$ и $\alpha \in S$, причем $\alpha_j > 1$ для $j = 1, r, \dots$ и $\alpha_j = 1$ для $j = r+1, n$, то задача Коши корректна в пространстве W_L^∞ , где $l_j(|x_j|) = |x_j|^{\alpha'_j}$ при $j \leq r$, а $l_j(|x_j|) = |x_j|^{b_j}$ при $j > r$ для всех $b_j > 1$.

Доказательство. Разрешающая функция $Q(s, t) = \exp t(P(is))$ удовлетворяет оценке

$$|Q(s, t)| \leq \exp T \operatorname{Re} P(is) \leq C \exp T \left(\sum_{j=1}^r c_j |\operatorname{Im} s_j|^{\alpha_j} + \sum_{j>r} c_j |\operatorname{Im} s_j| \right)$$

(см. [5]), откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Пример. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^{2p} u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^{2p}} + c \frac{\partial^{m+n} u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^m \partial x_2^n} + b \frac{\partial^{2q} u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^{2q}},$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2).$$

Здесь гиперповерхность сопряженных порядков задается неравенствами

$$\alpha_1 \geq 2p, \quad \alpha_2 \geq 2q, \quad \frac{m}{\alpha_1} + \frac{n}{\alpha_2} \leq 1.$$

Пусть $m \leq p$, $n \leq q$. Тогда можно взять $\alpha_1 = 2p$, $\alpha_2 = 2q$. Если $(-1)^p a < 0$ и $(-1)^q b < 0$, то при достаточно малых $|c|$ данная задача Коши корректна в пространстве W_L^∞ с функциями $l_1(|x_1|) = |x_1|^{(2p)'}$ и $l_2(|x_2|) = |x_2|^{(2q)'}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений типа свертки // Усп. мат. наук. — 1972. — 27, № 4 (166). — С. 65–143.
2. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М.: Физматлит, 1994.
3. Макаров А. А. Критерий корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы линейных уравнений в свертках в топологических пространствах // в кн.: Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры. — Киев: Наукова думка, 1978. — С. 178–180.
4. Макаров А. А. О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Диффер. уравн. — 1981. — 17, № 2. — С. 320–324.
5. Сердюк Г. П. О единственности решений линейных дифференциальных уравнений / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Харьков: ХГУ, 1983.

Макаров Александр Анатольевич

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: natvasmak@ukr.net