Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Малышев, Доказательства теоремы Брунна—Минковского элементарными методами, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 182, 70–94

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-70-94>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:17:51

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 70–94
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-70-94

УДК 514.172.4, 514.177.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ БРУННА—МИНКОВСКОГО ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ

© 2020 г. Ф. М. МАЛЫШЕВ

Аннотация. Приведены новые доказательства классической теоремы Брунна—Минковского об объеме суммы выпуклых многогранников P_0, P_1 одинакового n -мерного объема в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: $V_n((1-t)P_0 + tP_1) \geq V_n(P_0) = V_n(P_1)$, $0 < t < 1$, причем равенство имеет место, только если P_1 получается из P_0 параллельным переносом, в остальных случаях теорема утверждает строгое неравенство. Доказательства основаны на последовательном разбиении гиперплоскостями многогранника P_0 на симплексы. Для размерностей $n = 2$ и $n = 3$ в случае, когда P_0 является симплексом (треугольником при $n = 2$), для произвольного выпуклого многогранника $P_1 \subset \mathbb{R}^n$ построено непрерывное (в метрике Хаусдорфа) однопараметрическое семейство выпуклых многогранников $P_1(s) \subset \mathbb{R}^n$, $s \in [0, 1]$, $P_1(0) = P_1$, для которого функция $w(s) = V_n((1-t)P_0 + tP_1(s))$ строго монотонно убывает, а $P_1(1)$ получается из P_0 параллельным сдвигом. Если P_1 не получается из многогранника P_0 параллельным переносом, то с помощью элементарных геометрических конструкций установлено существование многогранника P'_1 , для которого $V_n((1-t)P_0 + tP_1) > V_n((1-t)P_0 + tP'_1)$.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, симплекс, треугольник, объемы, неравенство Брунна—Минковского.

PROOF OF THE BRUNN–MINKOWSKI THEOREM BY ELEMENTARY METHODS

© 2020 F. M. MALYSHEV

ABSTRACT. In this paper, we propose new proofs of the classical Brunn–Minkowski theorem on the volume of the sum of convex polyhedra P_0 and P_1 of the same n -dimensional volume in Euclidean space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: $V_n((1-t)P_0 + tP_1) \geq V_n(P_0) = V_n(P_1)$, $0 < t < 1$, where the equality holds only if P_1 is obtained from P_0 by a parallel transfer; in other cases, the strict inequality holds. Proofs are based on the sequential partition of the polyhedron P_0 into simplexes by hyperplanes. For dimensions $n = 2$ and $n = 3$, in the case where P_0 is a simplex (a triangle for $n = 2$), for an arbitrary convex polyhedron $P_1 \subset \mathbb{R}^n$, we construct a continuous (in the Hausdorff metric) one-parameter family of convex polyhedra $P_1(s) \subset \mathbb{R}^n$, $s \in [0, 1]$, $P_1(0) = P_1$, for which the function $w(s) = V_n((1-t)P_0 + tP_1(s))$ strictly monotonically decreases, and $P_1(1)$ is obtained from P_0 by a parallel transfer. If P_1 is not obtained from P_0 by a parallel transfer, then, using elementary geometric constructions, we establish the existence of a polyhedron P'_1 for which $V_n((1-t)P_0 + tP_1) > V_n((1-t)P_0 + tP'_1)$.

Keywords and phrases: convex polytope, simplex, triangle, volumes, Brunn–Minkowski inequality.

AMS Subject Classification: 52A20, 52A40

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье речь идет о следующей известной геометрической теореме, имеющей много обобщений и приложений в различных областях математики (см., например, [5, 6, 12, 16]).

Теорема 1. Пусть в двух параллельных гиперплоскостях L_0, L_1 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, содержатся выпуклые многогранники P_0, P_1 одинакового n -мерного объема $v > 0$, и пусть P — сечение выпуклой оболочки их объединения гиперплоскостью L , параллельной L_0, L_1 и находящейся строго между ними. Тогда n -мерный объем многогранника P будет не меньше v , причем равен v только в случае, когда P_1 получается из P_0 параллельным переносом.

В аннотации предполагалось, что расстояния от L_0 до L и от L до L_1 относятся как t к $1 - t$, $t \in (0, 1)$. В этом случае $P = (1 - t)P_0 + tP_1$. Основные приложения теоремы связаны как раз с так смешанными объемами в $\mathbb{R}^n$, но в настоящей работе они рассматриваться не будут. Предлагаемые доказательства теоремы 1 более наглядно представляются в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорему 1 при $n = 2$ впервые сформулировал Г. Брунн в 1887 г. (см. [15]). Он заметил также, что эта теорема может быть распространена на случай $n > 2$. Приведем выдержку из работы Б. Н. Делоне (см. [8, с. 39]: «Сам Брунн доказал лишь первую часть этой теоремы (1887), второй же, дополнительной части об условиях равенства площади промежуточного сечения площадям первых двух сечений ему сначала строго доказать не удалось, на что обратил внимание Минковский. Впоследствии были даны Минковским и Брунном доказательства и дополнительной части. Любопытно, что Минковский закончил свою известную книгу „Geometrie der Zahlen“ как раз на 56-м параграфе (1896), в котором надо было дать доказательство теоремы Брунна, так что „Geometrie der Zahlen“ обрывается, так сказать, на полуслове. По смерти Минковского (1909) в его бумагах было найдено это доказательство и напечатано (1910) через 14 лет после появления „Geometrie der Zahlen“ в виде последнего 57-го параграфа».

Из ближайших обобщений теоремы 1 приведем неравенство

$$\sqrt[n]{V_n(Q_0 + Q_1)} \geq \sqrt[n]{V_n(Q_0)} + \sqrt[n]{V_n(Q_1)}$$

для непустых компактов $Q_0, Q_1 \subset \mathbb{R}^n$, где

$$Q_0 + Q_1 = \{a + b \mid a \in Q_0, b \in Q_1\},$$

а через $V_n(\cdot)$ обозначен n -мерный объем (см., например, [6]). Для выпуклых многогранников Q_0 и Q_1 это неравенство равносильно сформулированной выше теореме. И здесь равенство имеет место только в случае, когда выпуклые многогранники Q_0 и Q_1 гомотетичны с положительным коэффициентом гомотетии, включая единицу, когда Q_1 получается из Q_0 параллельным переносом.

Приведенная теорема доказывалась многими авторами; необходимые ссылки имеются, например, в [4, 6, 9, 13, 16]. В [14] приведено доказательство через монотонные отображения, которое хоть и не элементарное, но зато достаточно мощное для случая равенства. В [6, с. 71] читаем: «Если отбросить технические детали, то существующие доказательства следуют одному из двух планов. Это — либо пропорциональное деление объемов P_0, P_1 параллельными гиперплоскостями и раздельное доказательство для частей, лежащих по общую сторону от этих гиперплоскостей; либо — совместная симметризация P_0 и P_1 ».

Первый план, в котором для разбиения многогранников P_0, P_1 привлекаются большие семейства параллельных гиперплоскостей, восходит к работам самого Брунна. В [8] представлены оба плана, симметризация Штейнера использована там для условий равенства в теореме. Наиболее прозрачным из известных автору представляется аналитическое доказательство индукцией по n из [2, с. 844–846], соответствующее первому плану.

Теорема 1, кроме ее многочисленных приложений для изопериметрических оптимизационных задач, относится к основам теории выпуклых многогранников, поэтому вполне естественным является желание получить ее геометрическое доказательство элементарными методами, максимально выпукло высвечивающее суть вопроса и доступное если не школьникам старших классов, то по меньшей мере студентам младших курсов. Подобное желание дополнительно усиливается тем, что Б. Н. Делоне считал эту теорему «хотя, *быть может*, и трудно доказуемой, но самой по

себе довольно очевидной» (см. [7, с. 37]). Ощутимое несоответствие между *очевидностью* теоремы и существенной неэлементарностью ее доказательств (особенно в части строго неравенства) имеет место до настоящего времени.

В настоящей статье (с целью начатого Б. Н. Делоне в [8] уменьшения этого несоответствия) предлагается новое наглядное доказательство теоремы 1 как бы «в лоб», исходя из наивных соображений (см. п. 3.1). За основу в предлагаемом доказательстве берутся не столько параллелепипеды, как ранее, а симплексы, на которые P_0 разбивается при одинаковом *делении объемов* P_0 , P_1 *параллельными гиперплоскостями*. Симметризация Штейнера, основанная на принципе Кавальери, не используется. Условие для случая равенства возникает достаточно органично благодаря тому, что симплексы, в отличие от параллелепипедов, исчерпывают объем P_0 полностью, а не приближают его. Обратим внимание, что, начиная с доказательств Брунна и Минковского, случай равенства выделялся в отдельную особую и порой наиболее трудную (для доказательства) часть теоремы. Правильней говорить все же не о случае равенства, как это обычно принято, а о строгом неравенстве.

В предлагаемом доказательстве скорей обратная ситуация, трудность с равенством отсутствует. Элементарными методами доказывается, что если P_1 не получается из P_0 параллельным переносом, то

$$V_n((1-t)P_0 + tP_1) > V_n((1-t)P_0 + tP'_1)$$

для некоторого многогранника P'_1 с $V_n(P'_1) = v$. (Если многогранник P_0 является симплексом, то для многогранника P_1 общего положения многогранник P'_1 получается из P_1 в результате простой конструктивной перестройки.) Данного факта, названного в статье ослабленным вариантом теоремы, вместе с первоначальной теоремой Брунна, утверждавшей, что $V_n((1-t)P_0 + tP_1) \geq v$ для всех выпуклых многогранников $P_1 \subset \mathbb{R}^n$ с $V_n(P_1) = v$, достаточно для доказательства теоремы, поскольку из теоремы Брунна следует, что $\inf_{P_1: V_n(P_1)=v} V_n(P) = v$.

Используемые в статье понятия, относящиеся к ограниченным выпуклым множествам, довольно поверхностны, первой главы монографии [3] для этих целей вполне достаточно. Подготовленному читателю и этого не потребуются, по крайней мере в случаях $n = 2$ и $n = 3$, доступных школьникам. Через $\overline{X}$ и $[X]$ обозначается соответственно замыкание и выпуклая оболочка ограниченного подмножества X евклидова пространства. Через $\overset{\circ}{X}$ и ∂X обозначается соответственно множество внутренних и граничных точек выпуклого множества X . Но иногда для $\overset{\circ}{X}$ и $\overline{X}$ будем использовать обозначение X , потому как с точки зрения объемов ограниченных выпуклых множеств эти уточнения излишни. Для точек $B_1, \dots, B_k$ выпуклый многогранник $\{B_1, \dots, B_k\}$ обозначается через $[B_1, \dots, B_k]$. Гиперплоскость $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$, задающая разбиение $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}^- \cup \mathcal{L}^+$ на замкнутые полупространства $\mathcal{L}^-$, $\mathcal{L}^+$, $\mathcal{L}^- \cap \mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, считаем опорной для выпуклого многогранника $Q \subset \mathbb{R}^n$, если $\emptyset \neq Q \cap \mathcal{L} \subset \partial Q$. Опорную гиперплоскость $\mathcal{L}$ считаем ориентированной с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, перпендикулярным к гиперплоскости $\mathcal{L}$ и направленным в сторону от многогранника Q . Используем обозначение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и считаем, что $Q \subset \mathcal{L}^- = \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$. Длина отрезка $[A, B]$ обозначается как $|A, B| = V_1([A, B])$. Используются также обозначения $O(B, r)$ и $\overline{O}(B, r)$ соответственно для открытого и замкнутого шаров радиуса $r > 0$ с центром в точке B . Если многогранник P_1 получается из P_0 параллельным переносом, то пишем $P_1 \parallel P_0$, иначе $P_1 \nparallel P_0$. Здесь обозначения $\parallel$ и $\nparallel$ можно воспринимать соответственно как равенство и неравенство. Если не оговаривается противное, то многогранники предполагаются выпуклыми.

Будем использовать прием одинакового *деления объемов* P_0 , P_1 ; приведем его. Пусть M — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, разбивающая многогранники P_0 и P_1 соответственно на части P'_0 , P''_0 и P'_1 , P''_1 , $P_0 = P'_0 \cup P''_0$, $P_1 = P'_1 \cup P''_1$, причем $V_n(P'_0) = V_n(P'_1)$ и P'_0 , P'_1 находятся по одну сторону от гиперплоскости M . Тогда $V_n(P''_0) = V_n(P''_1)$, так как $V_n(P_0) = V_n(P_1)$. Если теорема верна для пар многогранников P'_0 , P'_1 и P''_0 , P''_1 , то она будет верна и для многогранников P_0 , P_1 . Действительно, тогда

$$\begin{aligned} V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) &\geq V_n(L \cap [P'_0 \cup P'_1]) + V_n(L \cap [P''_0 \cup P''_1]) \geq \\ &\geq V_n(P'_0) + V_n(L \cap [P''_0 \cup P''_1]) \geq V_n(P'_0) + V_n(P''_0) = V_n(P_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, если $P_1 \nparallel P_0$, то либо $P'_1 \nparallel P'_0$, либо $P''_1 \nparallel P''_0$. Иначе при $P'_1 \parallel P'_0$ и $P''_1 \parallel P''_0$ соответствующие векторы сдвига будут одинаковы, они совпадают с вектором сдвига для $(P_1 \cap M) \parallel (P_0 \cap M)$. Таким образом, при $P_1 \nparallel P_0$ одно из двух последних неравенств в цепочке (1) является строгим.

Обратим внимание, что первое неравенство в цепочке (1) в общем случае нельзя заменять равенством, например, из-за точек $[A, B] \cap L \in [P_0 \cup P_1] \cap L$, $A \in P'_0$, $B \in P'_1$, которые, возможно, не принадлежат $(L \cap [P'_0 \cup P'_1]) \cup (L \cap [P''_0 \cup P''_1])$. Подвергая аналогичному разбиению многогранники P'_0 и P''_0 (по отдельности), и затем так же поступая с образовавшимися частями, отличными от симплексов, доказательство теоремы 1 может быть сведено в конце концов к случаю, когда P_0 является n -мерным симплексом.

Структура статьи такова. В разделе 2 приведены три доказательства теоремы для рассмотренного первоначально Брунном в [15] случая $n = 2$. Когда P_0 является треугольником, все три доказательства позволяют строить непрерывное (по Хаусдорфу) семейство многоугольников $P_1(s)$, $s \in [0, 1]$, $P_1(0) = P_1$, для которых площади $V_2(P(s))$ многоугольников $P(s) = (1 - t)P_0 + tP_1(s)$ строго монотонно убывают и $P_1(1) \parallel P_0$. На общий случай ($n \geq 2$) в разделе 5 будет перенесено только второе доказательство без построения n -мерного аналога семейства $P_1(s)$. Третье доказательство в п.4.1 раздела 4 будет перенесено на случай $n = 3$, причем с построением трехмерного аналога семейства $P_1(s)$. Первое доказательство, не имеющее аналогов для $n > 2$, отличается своей особой простотой.

В разделе 3 вначале в 3.1 сформулирована основная идея доказательств. В п. 3.1 дано формальное подтверждение мнения Б. Н. Делоне о том, что теорема очевидна, хотя, возможно, и трудно доказуема. Затем в п. 3.2 доказана основная лемма работы о том, что произвольный выпуклый многогранник P_0 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, последовательными сечениями гиперплоскостями может быть разбит на n -мерные симплексы. Этим, повторим, доказательство теоремы сводится (см. (1)) к случаю, когда P_0 является n -мерным симплексом, обозначаемым как Δ_n . Полагаем тогда $w(P_1) = V_n(L \cap [\Delta_n \cup P_1])$.

Благодаря аффинным преобразованиям, сохраняющим объем, можно ограничиться правильным симплексом Δ_n с $V_n(\Delta_n) = 1$, у которого все ребра имеют одинаковую длину (п. 3.3.3). Наконец, в п. 3.5 для каждого выпуклого многогранника (даже выпуклого тела) $Q \subset L_1$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $P_0 = \Delta_n \subset L_0$ построен расширяющийся ряд из n многогранников (соответственно, выпуклых тел)

$$Q = Q^{(1)} \subseteq Q^{(2)} \subseteq \dots \subseteq Q^{(n-1)} \subseteq Q^{(n)} = \hat{\Delta}_n, \quad (2)$$

в котором $\hat{\Delta}_n \subset L_1$ — минимальный симплекс, содержащий Q и гомотетичный симплексу Δ_n с положительным коэффициентом гомотетии. Для определения многогранников $Q^{(i)}$ опорную гиперплоскость $\mathcal{L} \subset L_1$ многогранника Q отнесем к уровню $j \in \{1, \dots, n\}$, если ее вектор нормали является вектором нормали опорной гиперплоскости для симплекса $\hat{\Delta}_n$, содержащей грань $\hat{\Delta}_n$ размерности $j - 1$ и не содержащей граней большей размерности. В (2) многогранник $Q^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, задается пересечением полупространств всех опорных гиперплоскостей многогранника Q уровней $j \geq i$.

Выпуклый многогранник Q относим к классу i , $i = 1, \dots, n$, если $Q = Q^{(i)} \neq Q^{(i+1)}$. Чем больше i , тем более особенным будет многогранник Q . Для многогранника Q общего положения $i = 1$. Строгое неравенство $w(Q) > V_n(Q) = V_n(\Delta_n)$ проще доказывается как раз для многогранников общего положения. Трудности растут (несмотря на упрощение внешнего вида многогранников) с ростом i , что естественно, при максимальном $i = n$ это неравенство даже неверно.

Некоторую совокупность опорных гиперплоскостей многогранника Q (как и отдельную гиперплоскость) считаем существенной, если объединение их пересечений с границей ∂Q имеет ненулевой $(n - 1)$ -мерный объем. Многогранник может быть задан только существенными опорными гиперплоскостями.

Ряд (2) вместе с основной леммой из п. 3.2 — это единственная пара признаков, указывающих на новизну настоящей работы.

В разделе 4 приведено доказательство теоремы для $n = 3$ постепенной перестройкой многогранника P_1 с сохранением его объема (см. п. 4.1). Конкретно построено непрерывное (по Хаусдорфу)

семейство многогранников $P_1(s)$, $s \in [0, 1]$, $V_3(P_1(s)) = V_3(\Delta_3) = 1$, $P_1(0) = P_1$, $P_1(1) \parallel \Delta_3$, со строго монотонно убывающей функцией $w(P_1(s)) = V_3(L \cap [\Delta_3 \cup P_1(s)])$. При $s \in [0, 1/2]$ в п. 4.1.1 происходит постепенный перевод всех существенных опорных плоскостей 1-го уровня многогранника P_1 в несущественные путем параллельного перемещения их по направлению векторов нормали (в сторону от $P_1(s)$) с одновременным параллельным перемещением некоторых опорных плоскостей 2-го уровня, напротив, к центру $P_1(s)$. Последние, возможно, из несущественных для $P_1 = P_1(0)$ превратятся в существенные для $P_1(s)$, $s \in (0, 1/2]$. Существенными для $s > 0$ могут оказаться и неподвижные несущественные при $s = 0$ опорные плоскости уровня 2. В результате получаем $P_1(1/2) = P_1(1/2)^{(1)} = P_1(1/2)^{(2)}$. При $s \in [1/2, 1]$ в п. 4.1.2 происходит постепенный перевод всех существенных опорных плоскостей 2-го уровня многогранника $P_1(1/2)$ в несущественные путем параллельного перемещения их по направлению векторов нормали (в сторону от $P_1(s)$) с одновременным параллельным перемещением некоторых опорных плоскостей 3-го уровня, напротив, к центру $P_1(s)$.

В разделе 5 в общем случае для $n \geq 2$ вначале в п. 5.1 доказан ослабленный вариант теоремы, утверждающий, что для всех выпуклых многогранников $P_1 \subset \mathbb{R}^n$, $P_1 \nparallel \Delta_n$, $V_n(P_1) = V_n(\Delta_n) = 1$, справедливо строгое неравенство

$$w(P_1) > \inf_Q w(Q) = c, \quad (3)$$

где нижняя грань берется по всем выпуклым многогранникам Q с $V_n(Q) = 1$. Неравенство (3) равносильно наличию выпуклого многогранника $P'_1 \subset \mathbb{R}^n$, $V_n(P'_1) = 1$, для которого $w(P_1) > w(P'_1)$.

Для $P_1 \parallel \Delta_n$ имеем $w(P_1) = 1$, поэтому $1 \geq c \geq t^n$. Очевидная нижняя оценка для константы c следует из того, что многогранник P содержит пересечение гиперплоскости L и пирамиды с основанием P_1 и вершиной $A \in P_0$, обозначаемой далее как $\Lambda(A, P_1)$.

Неравенство (3) последовательно доказывается для выпуклых многогранников P_1 для классов $1, 2, \dots, n-1$. Доказательство для выпуклых многогранников P_1 класса $i > 1$ в п. 5.1.2 использует справедливость неравенства (3) для выпуклых многогранников класса $i-1$ и осуществляется путем разбиения гиперплоскостью $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ симплекса $\Delta_n \subset L_0$ на два симплекса и многогранника $P_1 \subset L_1$ (класса i) на два многогранника с долями объемов как у соответствующих симплексов так, что один из многогранников относится к классу $i-1$ по отношению к своему из двух образовавшихся симплексов. Для многогранников P_1 класса 1 неравенство (3) в п. 5.1.1 проверяется наиболее просто, так же, как в доказательствах теоремы для $n = 2$ в пп. 2.2, 2.3 и для $n = 3$ в п. 4.2.1. Во второй части раздела 4 неравенство (3) доказано для $n = 3$, $i = 2$ (см. рис. 6 в п. 4.2.2).

Благодаря неравенству (3) случай строгого неравенства в теореме 1 автоматически следует из теоремы Брунна для $P_0 = \Delta_n$, утверждающей только нестрогое неравенство $w(P_1) \geq 1$ для выпуклых многогранников P_1 в $\mathbb{R}^n$ с $V_n(P_1) = 1$, поскольку тогда правая часть в (3) достигается при $P_1 = \Delta'_n \parallel \Delta_n$ и равна $w(\Delta'_n) = 1$. В п. 5.2 неравенство $V_n(L \cap [P_0, P_1]) \geq V_n(P_0) = V_n(P_1)$ доказано, как это было в первоначальных работах Брунна, путем использования соотношений (1) с предварительным одинаковым делением объемов P_0, P_1 параллельными гиперплоскостями.

Во второй части раздела 5 вначале в п. 5.3 доказана компактность в метрике Хаусдорфа множества $\mathcal{K}$ всех тел Q (ограниченных замкнутых выпуклых множеств) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, для которых $V_n(Q) = 1$, $w(Q) \leq 1$, центры тяжести $C = C(Q)$ совпадают с началом координат. Это следует из того, что диаметр таких тел Q ограничен некоторой константой R . Вместо метрики Хаусдорфа в п. 5.3 используется эквивалентная ей метрика, задаваемая равенством

$$\rho(Q', Q'') = \max_{n \in S^{n-1}} |f_{Q'}(n) - f_{Q''}(n)|, \quad (4)$$

в котором центры тяжести тел Q' и Q'' совпадают с началом координат, S^{n-1} — единичная сфера с центром в начале координат,

$$f_{Q'}, f_{Q''}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad f_{Q'}(n)n \in \partial Q', \quad f_{Q''}(n)n \in \partial Q''.$$

Максимум в (4) существует в силу непрерывности функций $f_{Q'}, f_{Q''}$. Из непрерывности функции $w(Q)$ на рассматриваемом компакте $\mathcal{K}$ следует, что правая часть в (3) достигается на некотором

теле Q_0 . Доказательство неравенства (3) в первой части раздела 5 изложено так, что оно непосредственно может быть перенесено с выпуклых многогранников на тела Q . В результате при $Q_0 \not\parallel \Delta_n$ из (3) следует противоречивое неравенство $w(Q_0) > w(Q_0)$. Наиболее простые в статье рассуждения п. 5.3 нельзя отнести к элементарным, зато ими завершается второе наиболее естественное доказательство теоремы 1 в общем случае для $n \geq 2$.

В п. 5.3 фактически теорема доказана в ситуации, когда P_0 — выпуклый многогранник, а P_1 — тело. В этой связи в п. 5.4 доказательство теоремы в рамках предлагаемого подхода распространено на случай тел P_0, P_1 , хотя это первоначально и не ставилось целью статьи. Справедливости ради здесь следует оговориться, что с самого начала классиками теорема формулировалась именно для выпуклых тел P_0, P_1 . Данное незначительное обобщение, видимо, и явилось одной из причин, из-за которой в многочисленных появлявшихся после 1887 г. и до настоящего времени доказательствах теоремы сразу для тел была проигнорирована роль симплекса, позволившего доказывать теорему элементарными методами.

Столь пространное введение приведено в надежде на то, что после этого некоторым читателям даже не потребуется знакомиться собственно с доказательствами из разделов 2–5 или с некоторыми из этих доказательств. Например, все утверждения второй половины раздела 5 в пп. 5.3, 5.4 являются несложными упражнениями на выпуклые множества, которые заведомо проще упражнений, предлагаемых в [3].

В заключение введения приведем ответ к одной достаточно наглядной оптимизационной задаче, отвечающей теореме Брунна—Минковского. Для замкнутых выпуклых тел X и Q в $\mathbb{R}^n$ рассмотрим множество

$$\Gamma_Q(X) = \bigcup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n: \\ \emptyset \neq (v+Q) \cap X = \partial(v+Q) \cap \partial X}} (v+Q),$$

называемое Q -границей для тела X . В [11] доказана теорема о том, что при заданных Q с $V_n(Q) > 0$ и $v = V_n(X) > 0$ минимум объема Q -границы $V_n(\Gamma_Q(X))$ достигается для единственного (с точностью до параллельных сдвигов) тела X_0 , гомотетичного с положительным коэффициентом гомотетии Q -границе точки.

Кроме решения в [11] приведенной оптимизационной задачи прикладного практического происхождения и знакомства в этой связи с работами [7, 8], побудительным мотивом для автора обратиться к доказательству теоремы явилась монография [1], в которой эта теорема, к сожалению, не представлена.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ДЛЯ $n = 2$

Теорему достаточно доказать только в случае, когда P_0 является треугольником. Необходимое разбиение секущими прямыми выпуклого многоугольника P_0 на треугольники, о котором говорилось во введении (см. (1)), очевидно, существует, оно производится по диагоналям. Далее во всех трех доказательствах считаем P_0 треугольником, $P_0 = \Delta_2$.

2.1. Первое доказательство теоремы для $n = 2$. Обозначим через $\hat{\Delta}_2$ минимальный треугольник, содержащий многоугольник P_1 и гомотетичный Δ_2 с коэффициентом гомотетии, не меньшим 1 (см. рис. 1). Пусть A_1, A_2, A_3 — вершины треугольника Δ_2 , а B_1, B_2, B_3 — соответствующие вершины треугольника $\hat{\Delta}_2$, и, наконец, M_1, M_2, M_3 — многоугольники (не выпуклые в общем случае) соответственно при вершинах B_1, B_2, B_3 , на которые разбивается множество $\hat{\Delta}_2 \setminus P_1$.

Выпуклая оболочка $[\Delta_2 \cup P_1]$ множества $\Delta_2 \cup P_1$ получается из усеченной пирамиды $[\Delta_2 \cup \hat{\Delta}_2]$ с основаниями Δ_2 и $\hat{\Delta}_2$ исключением пирамид $\Lambda_i = \Lambda(A_i, M_i)$ с вершинами A_i и основаниями M_i , $i = 1, 2, 3$. Поясним это. Многогранник $[\Delta_2 \cup P_1]$ есть пересечение всех полупространств, содержащих многоугольники Δ_2 и P_1 , поэтому его боковая поверхность состоит из отрезков $[A, B]$, $A \in \Delta_2$, $B \in P_1$, содержащихся в опорных плоскостях E , общих для многоугольников Δ_2 и P_1 .

Рис. 1

Многоугольники Δ_2 и P_1 должны находиться по одну сторону от опорных плоскостей E , которые однозначно восстанавливаются по прямой $l_1 = L_1 \cap E$, опорным для многоугольника P_1 в плоскости L_1 .

Просматривая по кругу все возможные положения прямой l_1 , замечаем, что опорная плоскость E содержит двумерную грань боковой поверхности многогранника $[\Delta_2 \cup P_1]$ только если

- (1) прямая l_1 содержит отрезок $[B_i, B_j]$ или
- (2) прямая l_1 содержит сторону m многоугольника P_1 , являющуюся одновременно стороной многоугольника M_i , $i = 1, 2, 3$.

В первом случае боковая грань многогранника $[\Delta_2 \cup P_1]$ является трапецией с основаниями $[A_i, A_j]$ и $P_1 \cap E$ (или треугольником, если пересечение $P_1 \cap E$ состоит из одной точки). Во втором случае боковая грань многогранника $[\Delta_2 \cup P_1]$ является треугольником с вершиной A_i и основанием m , который одновременно является боковой гранью пирамиды $\Lambda_i = \Lambda(A_i, M_i)$.

Пусть площади многоугольников Δ_2 и P_1 равны 1, и линейный размер треугольника Δ_2 (например, с точностью до постоянного множителя, его периметр) равен 1. Положим площадь треугольника $\hat{\Delta}_2$ равной $1 + \delta$, $\delta \geq 0$, $\delta = V_2(M_1) + V_2(M_2) + V_2(M_3)$. Расстояния от L до L_0 и L_1

Рис. 2

относятся как t к $1-t$, $0 < t < 1$. Тогда по гомотетии линейный размер $\widehat{\Delta}_2$ равен $\sqrt{1+\delta}$, а линейный размер треугольника $\Delta'_2 = [\Delta_2 \cup \widehat{\Delta}_2] \cap L$ равен $1 + t(\sqrt{1+\delta} - 1)$, и, в свою очередь, площадь треугольника Δ'_2 равна $(1 - t + t\sqrt{1+\delta})^2$.

Для получения площади сечения P нужно из площади треугольника Δ'_2 вычесть суммарную площадь пересечений плоскости L с тремя пирамидами, исключаемыми из усеченной пирамиды $[\Delta_2 \cup \widehat{\Delta}_2]$ (см. рис. 1). В результате для площади сечения P имеем

$$V_2(P) = (1 - t + t\sqrt{1+\delta})^2 - t^2\delta = 1 + 2t(1-t)(\sqrt{1+\delta} - 1). \quad (5)$$

Последнее выражение не меньше 1, причем равенство 1 достигается только при $\delta = 0$.

Теорема при $n = 2$ первым способом доказана.

Непрерывное по Хаусдорфу семейство многоугольников $P_1(s)$, $V_2(P_1(s)) = 1$, $s \in [0, 1]$, $P_1(0) = P_1$, $P_1(1) \parallel \Delta_2$, со строго монотонно убывающей функцией $w(P_1(s)) = V_2(L \cap [\Delta_2 \cup P_1(s)])$

строится по семейству треугольников $\widehat{\Delta}_2(s) = \sqrt{\frac{1+\delta}{1+s\delta}} \Delta_2$, получающемуся из треугольника $\widehat{\Delta}_2$

параллельным перемещением его сторон к центру. Многоугольник $\widehat{\Delta}_2(s) \cap P_1$ достраивается до многоугольника $P_1(s) \subset \widehat{\Delta}_2(s)$ параллельным перемещением сторон m (общих для P_1 и M_i , $i = 1, 2, 3$) от центра. Строгое монотонное убывание функции $w(P_1(s))$ следует из равенства (5), выписанного для многоугольника $P_1(s)$. Вместо δ там будет строго монотонно убывающая с ростом s функция

$$\delta(s) = \frac{1+\delta}{1+s\delta} - 1 = \frac{(1-s)\delta}{1+s\delta}.$$

2.2. Второе доказательство теоремы для $n = 2$. Предварительные рассуждения относительно устройства многоугольника $P = L \cap [\Delta_2 \cup P_1]$ те же, что и в первом доказательстве. Пусть вершина $B_2 \notin P_1$ (см. рис. 2).

Уменьшим треугольник $\widehat{\Delta}_2$ до $\widetilde{\Delta}_2$ параллельным переносом стороны $[B_1, B_3]$ по направлению к вершине B_2 . Если при этом на сторонах $[B_1, B_2]$ и $[B_3, B_2]$ не окажется точек многоугольника $P_1 \cap \widetilde{\Delta}_2$, то их параллельно переносим до касания с этим многоугольником. Вершина B_2 переместится тогда в положение $\widetilde{B}_2$. Компенсация утраченной в результате площади многоугольника P_1 достигается, например, параллельным перемещением границы многоугольника $\widetilde{M}_2 \subseteq M_2$ в сторону вершины $\widetilde{B}_2$.

Для уменьшенных в результате треугольника $\tilde{\Delta}_2$ и многоугольника M_2 используем обозначения $\tilde{\Delta}_2$ и $\tilde{M}_2$. Площадь выпуклого многоугольника $\Omega_- = P_1 \setminus \tilde{\Delta}_2$, оказавшегося за пределами треугольника $\tilde{\Delta}_2$, компенсируем такой же площадью добавляемого (не обязательно выпуклого) многоугольника $\Omega_+ \subseteq \tilde{M}_2$, $V_2(\Omega_+) = V_2(\Omega_-)$. Многоугольник Ω_+ выбирается таким, что многоугольник $\tilde{P}_1 = (P_1 \setminus \Omega_-) \cup \Omega_+$ является выпуклым. В результате вместо многоугольника $P = L \cap [\Delta_2 \cup P_1]$ возникает многоугольник $\tilde{P} = L \cap [\Delta_2 \cup \tilde{P}_1]$, получающийся из P удалением некоторой области $O^- \supseteq L \cap [(A_1, A_3) \cup \Omega_-]$ и добавлением другой области $O^+ = L \cap \Lambda(A_2, \Omega_+)$. Легко видеть, что

$$V_2(O^+) = t^2 V_2(\Omega_+), \quad \text{но} \quad V_2(O^-) > t^2 V_2(\Omega_-),$$

так как область O^- содержит многоугольники $O_1^- = L \cap \Lambda(A_1, \Omega_-)$ и $O_3^- = L \cap \Lambda(A_3, \Omega_-)$, площади которых равны $t^2 V_2(\Omega_-) = t^2 V_2(\Omega_+)$. Многоугольник O_3^- получается из O_1^- параллельным сдвигом на вектор $(1-t)\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3$. Из ограниченности и выпуклости многоугольников O_1^-, O_3^- следует, что

$$V_2(O_1^- \cup O_3^-) > V_2(O_1^-) = V_2(O_3^-) = t^2 V_2(\Omega_-) = t^2 V_2(\Omega_+).$$

Отсюда следует, что $V_2(O^+) < V_2(O^-)$ и $V_2(\tilde{P}) < V_2(P)$. Такие перестройки можно проводить до тех пор, пока в текущем многоугольнике $\tilde{P}_1$ не окажутся все три вершины гомотетичного Δ_2 минимального текущего треугольника $\tilde{\Delta}_2$, содержащего $\tilde{P}_1$. Тогда $\tilde{P}_1 = \tilde{\Delta}_2$, причем $\tilde{\Delta}_2 \parallel \Delta_2$, так как

$$V_2(\tilde{\Delta}_2) = V_2(\tilde{P}_1) = 1 = V_2(\Delta_2).$$

Приведенные рассуждения корректны, так как текущие площади $V_2(\Omega_-)$ и $V_2(\tilde{M}_2)$ являются непрерывными строго монотонными функциями аргумента x , равного расстоянию от стороны $[B_1, B_3]$ до текущего ее положения $[\tilde{B}_1, \tilde{B}_3]$.

Теорема при $n = 2$ вторым способом доказана.

Непрерывное по Хаусдорфу семейство многоугольников $P_1(s)$, $V_2(P_1(s)) = 1$, $s \in [0, 1]$, $P_1(0) = P_1$, $P_1(1) \parallel \Delta_2$, с монотонно убывающей функцией $w(P_1(s)) = V_2(L \cap [\Delta_2 \cup P_1(s)])$ фактически строилось по ходу второго доказательства.

Возможность исключения опорных гиперплоскостей первого уровня, проиллюстрированная во втором доказательстве теоремы для $n = 2$, в разделе 5 будет использоваться при доказательстве в п. 5.1.1 ослабленного варианта теоремы (см. (3)) в общем случае для $n \geq 2$. Этим способом ослабленный вариант теоремы доказан также в п. 4.1.1 для $n = 3$.

2.3. Третье доказательство теоремы для $n = 2$. Доказательство, разбиваемое на несколько этапов, будет производиться путем постепенного изменения многоугольника P_1 , сохраняющего его площадь. Текущее его состояние обозначаем $\tilde{P}_1$.

На каждом этапе (см. рис. 3) исключается одна существенная опорная прямая l_1 первого уровня, содержащая сторону $m = [C, D]$ текущего многоугольника $\tilde{P}_1$, у которой один конец C лежит (для определенности) на стороне $[\tilde{B}_1, \tilde{B}_2]$ текущего гомотетичного Δ_2 минимального треугольника $\tilde{\Delta}_2$ с вершинами $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3$, содержащего многоугольник $\tilde{P}_1$.

Исключение опорной прямой l_1 (точнее, перевод ее в несущественные) происходит (как и во втором доказательстве) путем уменьшения треугольника $\tilde{\Delta}_2$ параллельным переносом стороны $[\tilde{B}_1, \tilde{B}_2]$ по направлению к его центру и компенсирующим (возникающее уменьшение площади многоугольника $\tilde{P}_1$) параллельным перемещением прямой l_1 по направлению вектора нормали. Все остальные (пассивные) существенные опорные прямые, задающие многоугольник $\tilde{P}_1$, остаются при этом неподвижными, но они автоматически могут перестать быть опорными или перейти в разряд несущественных. При необходимости, как и во втором доказательстве, стороны $[\tilde{B}_1, \tilde{B}_3]$ и $[\tilde{B}_3, \tilde{B}_2]$ треугольника $\tilde{\Delta}_2$ тоже должны параллельно передвигаться до касания с текущим многоугольником $\tilde{P}_1$.

Строгое монотонное убывание функции $w(\tilde{P}_1)$ устанавливается так же, как и во втором доказательстве в п. 2.2. После конечного числа этапов у многоугольника $\tilde{P}_1$ площади 1 не будет существенных опорных прямых первого уровня, поэтому получаем $\tilde{P}_1 = \tilde{\Delta}_2 \parallel \Delta_2$.

Рис. 3

Теорема при $n = 2$ третьим способом доказана.

Как и во втором доказательстве, в приведенном третьем доказательстве теоремы для $n = 2$ фактически строится непрерывное семейство многоугольников $P_1(s)$, $V_2(P_1(s)) = 1$, $s \in [0, 1]$, $P_1(0) = P_1$, $P_1(1) \parallel \Delta_2$, со строго монотонно убывающей функцией площади $w(P_1(s))$.

Существенное различие двух последних доказательств проявится уже для $n = 3$ в разделе 4, в котором аналогом третьего доказательства устанавливается в п. 4.1 справедливость теоремы (для $n = 3$), а аналогом второго доказательства в п. 4.2 устанавливается (для $n = 3$) только справедливость неравенства (3), названного во введении ослабленным вариантом теоремы.

3. ПОДХОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ДЛЯ $n \geq 2$

Настоящий раздел состоит из 6 пунктов, часть из которых содержит необходимые предварительные понятия.

3.1. Пусть P_0, P_1 — произвольные ограниченные замкнутые выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$, $V_n(P_0) = V_n(P_1)$, и P_1 не получается из P_0 параллельным переносом. Теорему можно пытаться доказать перестройками тела P_1 в другое выпуклое тело P'_1 , $V_n(P'_1) = V_n(P_1)$, для которого

$$V_n(L \cap [P'_1 \cup P_0]) < V_n(P), \quad P = L \cap [P_1 \cup P_0].$$

Простейшей перестройкой представляется отсечение некоторого объема в районе одной точки A границы ∂P_1 тела P_1 и добавлении такого же объема (с сохранением выпуклости) в район другой точки $B \in \partial P_1$ (см. рис. 4).

Для выбора точек A и B рассмотрим соответствие φ между точками границ ∂P_1 и ∂P_0 . Пара $(s_1, s_0) \in \partial P_1 \times \partial P_0$ находится в соответствии $s_1 \varphi s_0$, если отрезок $[s_1, s_0]$ лежит на боковой поверхности тела $[P_1 \cup P_0]$, т.е. содержится в общей опорной гиперплоскости для P_1 и P_0 .

Для окрестности $O_x \subset \partial P_1$ точки $x \in \partial P_1$ положим

$$\varphi(O_x) = \{s_0 \in \partial P_0 \mid \exists s_1 \in O_x : s_1 \varphi s_0\}, \quad \varphi^{(t)}(O_x) = L \cap \bigcup_{\substack{(s_1, s_0) \in O_x \times \varphi(O_x): \\ s_1 \varphi s_0}} [s_1, s_0].$$

Рис. 4

Окрестность $\varphi^{(t)}(O_x) \subset \partial P$ состоит из таких точек $y \in [s_1, s_0]$, что

$$\frac{|s_0, y|}{|y, s_1|} = \frac{t}{1-t}, \quad s_1 \in O_x, \quad s_0 \in \varphi(O_x), \quad s_1 \varphi s_0.$$

Определим показатель расширения $\rho(x)$, $x \in \partial P_1$, как предел (когда он существует) отношения $\frac{V_{n-1}(\varphi(O_x))}{V_{n-1}(O_x)}$ при неограниченном уменьшении окрестности O_x .

Если $\rho(A) > \rho(B)$, то естественно ожидать, что при некоторых окрестностях $O_A \subset \partial P_1$, $O_B \subset \partial P_1$ с $V_{n-1}(O_A) \approx V_{n-1}(O_B)$ будем иметь: $V_{n-1}(\varphi^{(t)}(O_A)) > V_{n-1}(\varphi^{(t)}(O_B))$. Это позволяет надеяться на удачную пересадку некоторого объема от точки A к точке B , поскольку в гиперплоскости L происходит аналогичное, как и в L_1 , отсечение и добавление холмиков, но в t^{-1} раз меньшей толщины.

Если многогранник P_0 является симплексом, то в качестве точек $A \in \partial P_1$ можно рекомендовать точки на общих опорных гиперплоскостях для P_1 и P_0 , содержащих $(n-1)$ -мерную грань симплекса P_0 , а в качестве точек $B \in \partial P_1$ можно рекомендовать точки на общих опорных гиперплоскостях для P_1 и P_0 , пересекающихся с симплексом P_0 ровно по одной его вершине. Второе и третье доказательства теоремы для $n=2$ построены как раз на этом принципе (см., соответственно, рис. 2 и рис. 3).

3.2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ произвольный выпуклый многогранник Q . Разобьем его секущей гиперплоскостью на две части. (Точки Q на секущей гиперплоскости относим к обеим частям.) Каждую отдельную часть, не являющуюся симплексом, дальше (независимо от остальных частей) будем разбивать своей гиперплоскостью на две части. Чтобы свести доказательство теоремы к случаю, когда многогранник P_0 является симплексом, о чем говорилось во введении (см. (1)), важно все части сделать симплексами за конечное число таких разбиений.

Лемма 1. *Произвольный выпуклый ограниченный многогранник в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, за конечное число последовательных рассечений гиперплоскостями можно разбить на симплексы.*

Доказательство. Многогранник, для которого Лемма справедлива, назовем благоприятным. Симплекс благоприятный. Обе части симплекса, на которые он разбивается гиперплоскостью, тоже благоприятны. Убедимся в последнем утверждении индукцией по n , начиная с $n=2$. Пусть $n > 2$ и $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ — вершины симплекса $\Delta_n = [A_1, \dots, A_n, A_{n+1}]$, который является пирамидой с вершиной A_{n+1} и с основанием в виде симплекса $\Delta_{n-1} = [A_1, \dots, A_n]$. Если секущая гиперплоскость L содержит вершину A_{n+1} , то останется применить предположение индукции к частям симплекса Δ_{n-1} , на которые он разбивается гиперплоскостью L . Пусть $L \cap \{A_1, \dots, A_n, A_{n+1}\} = \emptyset$ и гиперплоскость L содержит внутреннюю точку A_0 ребра $[A_n, A_{n+1}]$. Гиперплоскость L_0 , проходящая через точки $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$, разбивает симплекс Δ_n на два симплекса: $[A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_i]$, $i = n, n+1$. Каждый из двух полученных симплексов (или только один из них) гиперплоскость L разбивает (по предыдущему) на благоприятные многогранники, поскольку в обоих случаях вершина симплекса A_0 содержится в L .

Так как благоприятный многогранник по определению может считаться разбитым на симплексы, то из доказанного следует, что благоприятной является любая отсеченная гиперплоскостью часть произвольного благоприятного многогранника.

Каждый выпуклый многогранник Q содержится в благоприятном многограннике $\hat{Q}$, например, в достаточно большом симплексе. Гиперплоскость, содержащая $(n-1)$ -мерную грань многогранника Q , отсекает от $\hat{Q}$ меньший благоприятный многогранник, содержащий Q . Перебирая последовательно все $(n-1)$ -мерные грани многогранника Q , получим самый маленький благоприятный многогранник, совпадающий с Q . Лемма доказана. $\square$

Заметим, что при $n = 2$ произвольный выпуклый многоугольник можно одновременно разбить на треугольники конечной совокупностью прямых. Справедлив ли аналог этого утверждения при $n > 2$ (и при $n = 2$ для невыпуклых многоугольников), автору не известно. Доказанная Лемма этого не утверждает, разбиения отдельных частей гиперплоскостями происходят в ней независимо.

3.3. Выбор за основу в доказательстве теоремы именно симплекса Δ_n для P_0 не случаен. Приведем аргументы в пользу этого в виде утверждений, используемых далее не оговаривая.

3.3.1. При разбиении многогранника P_0 на симплексы, в отличие от традиционно используемых для этого параллелепипедов, удастся, согласно доказанной Лемме, исчерпать весь объем P_0 . Благодаря этому проще получать именно строгие неравенства, относящиеся к теореме.

3.3.2. Симплекс — выпуклый многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ненулевого n -мерного объема с минимально возможным числом $(n-1)$ -мерных граней, равным $n+1$. Убедиться в этом можно индукцией по n , проводя через внутреннюю точку (например, через центр тяжести) такого многогранника гиперплоскость, параллельную одной из его $(n-1)$ -мерных граней.

Замкнутый шар, как строго выпуклое тело, является прямой противоположностью симплексу, для его задания пересечениями полупространств потребуются гиперплоскости со всеми нормальными $\mathbf{n}$ из S^{n-1} .

Симплексы предпочтительней и параллелепипедов, ранее часто используемых в доказательствах теоремы и требующих для такого задания $2n$ гиперплоскостей, вместо $n+1$, как у симплексов.

3.3.3. С точки зрения доказываемой теоремы, конкретная форма симплекса Δ_n не так существенна, поскольку аффинным преобразованием, сохраняющим $(n-1)$ -мерный объем (например, с определителем 1 у матрицы линейной части преобразования), произвольный симплекс Δ_n переводится в правильный симплекс, у которого все ребра одной длины. Это тоже доказывается индукцией по n . Вначале представляемое горизонтально основание $\Delta_{n-1} = [A_1, \dots, A_n]$ пирамиды $\Delta_n = \Lambda(A_{n+1}, \Delta_{n-1})$ переводится в правильный симплекс Δ_{n-1} с центром в начале координат. Затем вершина пирамиды A_{n+1} переводится по горизонтали (при неподвижном основании) на вертикальную координатную ось. Наконец, растяжениями основания пирамиды и изменением ее высоты (передвижением вершины A_{n+1} вдоль вертикальной координатной оси) можно получить правильный симплекс Δ_n прежнего объема.

Для параллелепипедов, конечно, можно выше сказанное повторить, но для них нет аналога леммы из п. 3.2 даже при $n = 2$.

3.3.4. Два симплекса в $\mathbb{R}^n$ с одним и тем же множеством нормалей для существенных опорных гиперплоскостей гомотетичны с положительным коэффициентом гомотетии. В этом можно убедиться параллельным переносом одного из симплексов до совпадения пары вершин этих симплексов, задаваемых множествами из n существенных опорных гиперплоскостей с одинаковыми наборами их нормалей.

Для параллелепипедов это неверно, поэтому с их помощью уже не получишь аналог доказательства из п. 2.1.

3.3.5. Предусматриваемая теоремой геометрическая конструкция позволяет пользоваться рассуждениями, инвариантными относительно аффинных преобразований. Конкретно, если в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ выбран базис с началом координат и с первыми n координатными осями в гиперплоскости L_1 и α — аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющее $(n+1)$ -ю координату неизменной, то $\alpha(L \cap [P_0 \cup P_1]) = L \cap [\alpha(P_0) \cup \alpha(P_1)]$.

3.3.6. Пусть для правильного симплекса Δ_n объема $V_n(\Delta_n) = 1$ правая часть в (3) равна $c > 0$. Из пп. 3.3.3 и 3.3.5 следует, что для произвольного симплекса Δ_n объема $V_n(\Delta_n) = v$ правая часть в (3), в которой нижняя грань берется по многогранникам Q с $V_n(Q) = v$, равна cv .

3.4. Во введении условились опорные гиперплоскости $\mathcal{L}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ считать ориентированными. С каждой такой гиперплоскостью связывается разбиение $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}^- \cup \mathcal{L}^+$ на полупространства $\mathcal{L}^-$, $\mathcal{L}^+$, $\mathcal{L}^- \cap \mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$. Определяющий ориентацию $\mathcal{L}$ вектор нормали $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ направлен в сторону $\mathcal{L}^+$. Здесь, напомним, S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. В настоящем пункте вводится используемая далее терминология, относящаяся к двойственному границе симплекса Δ_n специальному «симплексу» δ_n , расположенному на сфере S^{n-1} . При определении далее «симплекса» δ_n симплекс Δ_n удобнее представлять правильным с центром тоже в начале координат. Коротко, «симплекс» δ_n является центральной проекцией на сферу S^{n-1} границы симплекса, двойственного Δ_n .

Для точек сферы S^{n-1} «плоскостями» размерности $k = 0, 1, \dots, n-2$ считаем пересечения векторных подпространств $\mathbb{R}^n$ размерности $k+1$ с открытыми полусферами (без границ в виде «экваторов» S^{n-2}). Выпуклой оболочкой точек $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in S^{n-1}$ с угловым расстоянием меньшим 180° считаем «отрезок» $[\mathbf{n}, \mathbf{m}]$, являющийся пересечением с углом с вершиной в начале координат и лучами вдоль векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. Это позволяет использовать на сфере S^{n-1} аналоги понятий и терминов, относящихся к выпуклым множествам евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $A_1, \dots, A_{n+1}$ — вершины симплекса Δ_n , $\mathbf{n}_i$, $i = 1, \dots, n+1$, — нормаль опорной гиперплоскости симплекса Δ_n , содержащей его грань

$$\Delta_{n-1}^{(1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1)} = [A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{n+1}].$$

«Вершинами» «симплекса» δ_n являются векторы $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n+1}$, а k -мерными его «гранями» являются выпуклые оболочки $\delta_k^{(i_1, \dots, i_{k+1})} = [\mathbf{n}_{i_1}, \dots, \mathbf{n}_{i_{k+1}}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, где $(k+1)$ -подмножества $\{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset \{1, \dots, n+1\}$ могут быть произвольными.

Нетрудно видеть, что опорная плоскость симплекса Δ_n с вектором нормали из внутренности k -мерного «симплекса» $\delta_k^{(i_1, \dots, i_{k+1})}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, пересекается с Δ_n по $(n-1-k)$ -мерной грани

$$\Delta_{n-1-k}^{(\{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{k+1}\})} = \left[\{A_i \mid i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{k+1}\}\} \right],$$

а опорные плоскости симплекса Δ_n с векторами нормали из границы этого «симплекса» $\partial \delta_k^{(i_1, \dots, i_{k+1})}$ при $k = 1, \dots, n-1$ пересекаются с Δ_n по его граням размерности $n-k$ и выше. Это грани $\Delta_{n-r}^{(\{1, \dots, n+1\} \setminus R)}$, где $R \subset \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$ — произвольные собственные подмножества мощности $r = 1, \dots, k$. При $k = 0$ по определению считаем $\delta_0^{(i)} = \delta_0^{(i)} = \{\mathbf{n}_i\}$, $i = 1, \dots, n+1$.

Совокупность из $2^{n+1} - 2$ подмножеств

$$\delta_k^{(i_1, \dots, i_{k+1})} \subset S^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset \{1, \dots, n+1\},$$

на которые разбилась сфера S^{n-1} , упорядочим по мере увеличения $k = 0, 1, \dots, n-1$. Подмножества $\delta_k^{(i_1, \dots, i_{k+1})}$ естественно называть открытыми k -мерными «гранями». При каждом k всю совокупность k -мерных открытых «граней» общим числом $\binom{n+1}{k+1}$ линейно упорядочиваем произвольным образом.

Далее полагаем

$$\mathcal{N}_k^{(i_1, \dots, i_{k+1})} = \delta_k^{(i_1, \dots, i_{k+1})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset \{1, \dots, n+1\},$$

$$\mathcal{N}_k = \coprod_{\{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset \{1, \dots, n+1\}} \mathcal{N}_k^{(i_1, \dots, i_{k+1})}, \quad \mathcal{M}_i = \prod_{k=0}^{n-i} \mathcal{N}_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Все выше перечисленное в этом пункте относится к симплексу $\hat{\Delta}_n$ в той же мере, что и к симплексу Δ_n , поскольку они гомотетичны с положительным коэффициентом гомотетии. Во введении опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_n \subset L_1$ с $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-j}$ были названы опорными гиперплоскостями уровня j , $j = 1, \dots, n$.

3.5. Для ограниченного замкнутого выпуклого подмножества Q в пространстве $\mathbb{R}^n$, называемого телом, и вектора $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ имеется единственная опорная гиперплоскость $\mathcal{L} = \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n^{(Q)}$ с вектором нормали $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ и $Q \subset \mathcal{L}^-$. Этим устанавливается биекция между единичной сферой $S^{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \mathcal{N}_k = \mathcal{M}_1$ и множеством $\mathfrak{L}$ всех опорных гиперплоскостей $\mathcal{L}$ тела Q . Ясно, что

$$Q = \bigcap_{\mathbf{n} \in S^{n-1}} \mathcal{L}_n^-. \quad (6)$$

Во введении (см. (2)) полагали

$$Q^{(i)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{M}_i} \mathcal{L}_n^-, \quad i = 1, \dots, n, \quad Q^{(1)} = Q, \quad Q^{(n)} = \hat{\Delta}_n.$$

Ряд (2) отвечает вложениям

$$S^{n-1} = \mathcal{M}_1 \supsetneq \mathcal{M}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{M}_{n-1} \supsetneq \mathcal{M}_n = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n+1}\}. \quad (7)$$

Тело Q отнесем к классу j , $j = 1, \dots, n$, если $Q = Q^{(j)} \neq Q^{(j+1)}$. В этом случае нормали $\mathbf{n} \in S^{n-1} \setminus \mathcal{M}_j$ в представлении (6) можно исключить. Точнее, при некотором подмножестве $\{i_1, \dots, i_{n-j+1}\} \subset \{1, \dots, n+1\}$ имеет место разбиение

$$\mathcal{N}_{n-j} = \mathcal{N}'_{n-j} \sqcup \left\{ \mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})} \right\} \sqcup \mathcal{N}''_{n-j},$$

в котором в принятой линейной упорядоченности номера подмножеств в виде открытых $(n-j)$ -мерных «граней» из $\mathcal{N}'_{n-j}$, $\left\{ \mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})} \right\}$, $\mathcal{N}''_{n-j}$ следуют в порядке увеличения и

$$\hat{Q}^{(j+1)} = Q^{(j+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}'_{n-j}} \mathcal{L}_n^- \supsetneq \hat{Q}^{(j+1)} \cap \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})}} \mathcal{L}_n^- = Q^{(j)} = Q. \quad (8)$$

Подмножество $\mathcal{N}'_{n-j} \subset \mathcal{N}_{n-j}$, как и $\mathcal{N}''_{n-j} \subset \mathcal{N}_{n-j}$, может быть пустым. Нормали $\mathbf{n} \in \mathcal{N}''_{n-j}$, как и $\mathbf{n} \in S^{n-1} \setminus \mathcal{M}_j$, тоже можно исключить в представлении (6).

Часть границы ∂Q , выделяющая тело Q в большем теле $\hat{Q}^{(j+1)}$, равная $\hat{Q}^{(j+1)} \cap \partial Q$, представляется $(n-j)$ -мерным семейством $(j-1)$ -мерных «плоских» областей, параллельных $\hat{\Delta}_{j-1}(\{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\})$. Эта часть является непустым открытым подмножеством на границе ∂Q . По этой причине любая опорная плоскость $\mathcal{L} = \mathcal{L}_n$ тела Q , проходящая через точку $x \in \hat{Q}^{(j+1)} \cap \partial Q$, имеет вектор нормали $\mathbf{n}$, перпендикулярный грани $\hat{\Delta}_{j-1}(\{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\})$, и в соответствии с п. 3.4 обязательно $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})}$. Приведем подробное доказательство данного факта.

Рассмотрим более плотный ряд из вложенных тел, нежели (2). Вместо последовательности (7) можно рассматривать последовательность

$$S^{n-1} = \mathcal{M}_1 = \mathcal{H}_1 \supsetneq \mathcal{H}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{H}_{2^n-n-3} \supsetneq \mathcal{H}_{2^n-n-2} = \{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n+1}\}, \quad (9)$$

где множество открытых «граней» $\mathcal{H}_{j+1}$, $j = 1, \dots, 2^n - n - 3$, получается из множества $\mathcal{H}_j$ удалением из $\mathcal{H}_j$ единственной открытой «грани» с максимальным (в $\mathcal{H}_j$) номером. Положив $R^{(j)} = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{H}_j} \mathcal{L}_n$, $j = 1, \dots, 2^n - n - 2$, последовательности (9) будет отвечать ряд из тел

$$Q = Q^{(1)} = R^{(1)} \subseteq R^{(2)} \subseteq \dots \subseteq R^{(2^n-n-3)} \subseteq R^{(2^n-n-2)} = \hat{\Delta}_n. \quad (10)$$

Для нас важно первое слева неравенство в этом ряду. Выше для некоторого $s = 1, \dots, 2^n - n - 3$ имели

$$\begin{aligned}\widehat{Q}^{(j+1)} &= R^{(s+1)}, \quad Q = Q^{(j)} = R^{(s)}, \quad \mathcal{M}_{j+1} \sqcup \mathcal{N}'_{n-j} = \mathcal{H}_{s+1}, \\ \mathcal{M}_{j+1} \sqcup \mathcal{N}'_{n-j} \sqcup \left\{ \mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})} \right\} &= \mathcal{H}_s.\end{aligned}$$

Пусть $x \in \widehat{Q}^{(j+1)} \cap \partial Q$. Для $\mathbf{n}$ из открытых «граней», предшествующих $\mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})}$, имеем $x \in \mathring{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}}^-$, поэтому $x \notin \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$. Для любой открытой «грани» $\mathcal{N}_{n-j'}^{(i'_1, \dots, i'_{n-j'+1})}$, $j' \leq j$, которая следует за $\mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})}$, в множестве

$$\bigcup_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-j'}^{(i'_1, \dots, i'_{n-j'+1})}} (Q \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}) \subset \partial Q$$

нет открытых окрестностей, в отличие от

$$\bigcup_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})}} (Q \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}) \supset \widehat{Q}^{(j+1)} \cap \partial Q,$$

иначе имели бы $R^{(s')} \subsetneq R^{(s+1)}$ для $s' < s$. Таким образом, если $x \in \widehat{Q}^{(j+1)} \cap \partial Q \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$, то $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-j}^{(i_1, \dots, i_{n-j+1})}$.

Вложения (9) и (10) показывают, что симплекс и сфера принимают одинаковое участие в формировании выпуклого многогранника Q .

3.6. В этом пункте для тела $Q \subset L_1$ предполагаем, что

$$V_n(Q) = 1 = V_n(\Delta_n), \quad w(Q) = V_n(L \cap [Q \cup \Delta_n]) \in [t^n, e],$$

где $e \geq 1$ — константа. Будем говорить, что некоторая характеристика, относящаяся к телу Q , имеет *гарантированную* величину, если она имеет нижнюю оценку в виде положительной константы, зависящей только от $n \geq 2$, $t \in (0, 1)$ и $e \geq 1$.

3.6.1. Тело Q содержится в шаре гарантированно небольшого радиуса $R = R(n, t, e)$. Иначе, благодаря нескольким взаимно не пересекающимся сечениям $L \cap \Lambda(B, \Delta_n)$, $B \in Q$, имели бы $w(Q) > e$.

3.6.2. Для любого $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ расстояние $h = h_{\mathbf{n}} = \rho(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}, \mathcal{L}_{-\mathbf{n}})$ между опорными для Q гиперплоскостями $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и $\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}$ гарантировано, поскольку $V_n(Q) = 1$, а для всех гиперплоскостей $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ величина $V_{n-1}(Q \cap L)/R^{n-1}$ меньше зависящей от n константы. В то же время для некоторой гиперплоскости $\mathcal{L}' \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ величина $V_{n-1}(Q \cap \mathcal{L}')$ гарантирована, не меньше $1/(2R)$.

3.6.3. При любом $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ для гиперплоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)}$, параллельной гиперплоскостям $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и $\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}$ и расположенной строго по середине между ними, гарантировано значение $V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap Q)$. Действительно, если $\mathcal{L}'$ — гиперплоскость из предыдущего п. 3.6.2 и $\rho(\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}, \mathcal{L}') < h_{\mathbf{n}}/2$, а вершина $B \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \cap Q$, то даже значение

$$V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap \Lambda(B, \mathcal{L}' \cap Q)) \leq V_{n-1}(\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)} \cap Q)$$

гарантированно меньше по сравнению с $V_{n-1}(Q \cap \mathcal{L}')$ не более чем в 2^{n-1} раз.

3.6.4. Пусть $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ и гиперплоскость $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ такая, что $\mathcal{L}^- \subset \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-$, $\rho(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{\mathbf{n}}) = d < h_{\mathbf{n}}/2$. Тогда значение $V_n(\mathcal{L}^+ \cap Q)/d^n$ гарантировано согласно предыдущим подпунктам.

3.6.5. Приведенную последовательность замечаний естественно закончить утверждением о наличии в теле Q вписанного шара гарантированного радиуса с центром в центре тяжести, хоть оно и не будет востребовано далее при доказательстве теоремы. Пусть вектор $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ выбран произвольным и направлен вертикально вверх, а $\mathcal{L}_{-\mathbf{n}}$ является горизонтальной опорной гиперплоскостью для тела Q , $B \in \mathcal{L}_{-\mathbf{n}} \cap Q$, $A \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \cap Q$. Центр тяжести тела Q располагается на высоте $H = I/V_n(Q)$, где

$$I = \int_0^{h_n} x V_{n-1}(Q \cap (\mathcal{L}_{-\mathbf{n}} + x\mathbf{n})) dx.$$

Аналогичное представление имеем для высоты H' центра тяжести меньшего тела

$$Q' = \Lambda(A, Q \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)}) \cup \Lambda(B, Q \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{(0)})$$

с аналогичным интегралом $I' \leq I$, $H' = I'/V_n(Q')$. Поскольку $H' = h_n/2$, имеем

$$V_n(Q)H \geq V_n(Q')H' = \frac{1}{2}V_n(Q')h_n, \quad H \geq \frac{1}{2}V_n(Q')h_n.$$

Согласно предыдущим рассуждениям значения h_n и $V_n(Q')$ гарантированы, поэтому H и радиус вписанного шара вокруг центра тяжести тела Q гарантированы.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ И ЕЕ ОСЛАБЛЕННОГО ВАРИАНТА ДЛЯ $n = 3$

В первой части этого раздела приведено доказательство теоремы для $n = 3$ путем построения непрерывного (по Хаусдорфу) семейства многогранников

$$P_1(s), \quad s \in [0, 1], \quad V_3(P_1(s)) = V_3(\Delta_3) = 1, \quad P_1(0) = P_1, \quad P_1(1) \parallel \Delta_3,$$

со строго монотонно убывающей функцией

$$w(P_1(s)) = V_3(L \cap [\Delta_3 \cup P_1(s)]).$$

Во второй части раздела приведено для $n = 3$ доказательство неравенства (3) (ослабленного варианта теоремы). После знакомства с этим доказательством (формально не нужным) лучше будет восприниматься в п. 5.1.2 первая начальная часть доказательства теоремы в общем случае для $n \geq 2$, относящаяся как раз к ослабленному варианту теоремы.

4.1. Доказательство теоремы для $n = 3$. Пусть $P_1 \subset \mathbb{R}^3$ — выпуклый многогранник, $V_3(P_1) = 1$, $P_1 \subset L_1 \subset \mathbb{R}^4$. Доказательство будет заключаться в последовательном переводе каждой существенной опорной плоскости многогранника P_1 , отличной от $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_1}, \mathcal{L}_{\mathbf{n}_2}, \mathcal{L}_{\mathbf{n}_3}, \mathcal{L}_{\mathbf{n}_4}$, в разряд несущественной путем параллельного переноса по направлению ее нормали с одновременным параллельным переносом другой опорной плоскости большего уровня (возможно несущественной и переводом ее в существенные) по направлению к центру многогранника P_1 . Объем изменяемого многогранника P_1 должен оставаться равным 1, а объем соответствующего многогранника $P = L \cap [\Delta_3 \cup P_1]$ должен строго убывать.

4.1.1. Пусть имеется существенная опорная плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$, $\mathbf{n}_0 \in S^2$, уровня 1. Тогда

$$\mathbf{n}_0 \in \mathcal{N}_2^{\{1,2,3,4\} \setminus \{i\}}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Пусть $\mathcal{N}$ — множество нормалей $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_2^{\{1,2,3,4\} \setminus \{i\}}$, для которых $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ — существенная опорная плоскость многогранника P_1 . Введем обозначение

$$\mathcal{M} = (S^2 \setminus \mathcal{N}_2^{\{1,2,3,4\} \setminus \{i\}}) \cup (\mathcal{N} \setminus \{\mathbf{n}_0\}).$$

Рассмотрим многогранник

$$\hat{P}_1 = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- \supsetneq P_1 = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{M} \cup \{\mathbf{n}_0\}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-. \quad (11)$$

Как и в доказательствах теоремы при $n = 2$ (см. пп. 2.2 и 2.3), будем параллельно передвигать опорную плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$ по направлению $\mathbf{n}_0$ с одновременным параллельным (напротив)

«вдавливанием» какой-либо опорной плоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}$ второго или третьего (не принципиально) уровней. Текущее положение плоскостей $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}$ обозначим $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)$, $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}(v)$, где переменная $v = V_3(P_1 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'}^+(v)) \geq 0$ увеличивается. В задании многогранника $Q(v)$ отличные от $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}'$ (пассивные) опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathcal{M} \setminus \{\mathbf{n}'\}$, предполагаются неподвижными или параллельно передвигающимися до касания с $Q \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'}^-(v)$, некоторые из них из несущественных изначально могут превращаться в существенные.

Объем многогранника $P_1(v)$ должен оставаться неизменным, равным 1. Объем многогранника $\hat{P}_1(v)$ будет строго монотонно уменьшаться, поскольку в его представлении (11) только одно подвижное полупространство $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}^-(v)$, в отличие от представления для $P_1(v)$ с двумя (если не считать пассивные) подвижными полупространствами $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}^-(v)$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}^-(v)$. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока в (11) не наступит равенство $\hat{P}_1(v) = P_1(v)$, когда плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)$ перестанет быть существенной, и ее тоже можно исключать из представления (11) для $P_1(v)$.

Доказательство строгого монотонного убывания текущего объема

$$V_3(P(v)) = V_3(L \cap [\Delta_3 \cup P_1(v)])$$

проводится дословным повторением соответствующих доказательств из пп. 2.2 и 2.3.

Описанным способом последовательно исключаем все существенные опорные плоскости первого уровня, но некоторые даже неподвижные несущественные опорные плоскости уровня 2 и 3 могут превратиться в существенные.

4.1.2. Пусть теперь у многогранника P_1 нет существенных опорных плоскостей уровня 1, но есть существенные опорные плоскости уровня 2. В этом случае у многогранника P_1 двумерные грани, содержащиеся в двумерных гранях симплекса $\hat{\Delta}_3$, являются правильными треугольниками, а все остальные двумерные грани разбиваются на 6 групп, отвечающих ребрам симплекса $\hat{\Delta}_3$. Грани одной группы разбиваются на трапеции с основаниями, параллельными соответствующему ребру.

Далее $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$, $\mathbf{n}_0 \in S^2$, — одна из существенных опорных плоскостей второго уровня, для которой грань $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0} \cap P_1$ имеет общие точки (хотя бы одну) с одной из двумерных граней симплекса $\hat{\Delta}_3$, располагающейся на опорной плоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'} = \mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}$, $\mathbf{n}' = \mathbf{n}_i \in S^2$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, третьего уровня. На плоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}$ точки многогранника P_1 образуют правильный треугольник $P_1 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}$ площади $c_2 l^2$, где l — длина его стороны, а c_2 — некоторая константа.

Теперь рассуждения из предыдущего пункта можно дословно повторить. Отдельного доказательства требует строгое монотонное убывание объема текущего многогранника $P(v) = L \cap [\Delta_3 \cup P_1(v)]$.

Из-за отсутствия у многогранника $P_1(v)$ существенных опорных плоскостей уровня 1 пересечение $P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v)$ будет правильным треугольником с длиной стороны, обозначаемой как $l(v)$. Введем также обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_-(v) &= V_2(P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v)) = c_2 l(v)^2, & \Omega_+(v) &= V_2(P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)), \\ x_-(v) &= \rho(\mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(0), \mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v)), & x_+(v) &= \rho(\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(0), \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)). \end{aligned}$$

Тогда

$$dv = \Omega_-(v) dx_-(v) = \Omega_+(v) dx_+(v),$$

откуда следует

$$\frac{dx_+(v)}{dx_-(v)} = \frac{\Omega_-(v)}{\Omega_+(v)}. \quad (12)$$

Пусть $L_{\mathbf{n}_i}(v)$ — гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^4$, содержащая плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v)$ и двумерную грань Δ_2 симплекса $\Delta_3 \subset L_0$, параллельную $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v)$. Плоскость $L_{\mathbf{n}_i}(v) \cap L$ пересекает многогранник $P(v)$ по правильному треугольнику $L \cap [\Delta_2 \cup (P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v))]$ с длиной стороны $(1-t)a + tl(v)$, где a — длина стороны треугольника Δ_2 .

Аналогично, рассмотрим гиперплоскость $L_{\mathbf{n}_0}(v) \subset \mathbb{R}^4$, содержащую плоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)$ и ребро Δ_1 симплекса $\Delta_3 \subset L_0$ из его опорной плоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}^{(\Delta_3)}$. Тогда

$$L_{\mathbf{n}_0}(v) \cap P(v) = L \cap [\Delta_1 \cup (P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v))].$$

Положим

$$\begin{aligned} O_-(v) &= V_2(L \cap [\Delta_2 \cup (P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v))]) = c_2((1-t)a + tl(v))^2, \\ O_+(v) &= V_2(L \cap [\Delta_1 \cup (P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v))]). \end{aligned}$$

Проверим, что для всех v производная функции $w(P_1(v)) = V_3(P(v))$ отрицательна. Бесконечно малые уменьшения объема $V_3(P(v))$ снизу оцениваются величиной $O_-(v)tdx_-(v)$, поэтому, согласно (12), в процессе удаления очередной существенной опорной плоскости второго уровня имеем

$$\frac{dV_3(P(v))}{dv} \leq \frac{O_+(v)tdx_+(v) - O_-(v)tdx_-(v)}{dv} = \frac{tdx_-(v)}{\Omega_+(v)dv} (O_+(v)\Omega_-(v) - O_-(v)\Omega_+(v)). \quad (13)$$

Последнее выражение отрицательно, если

$$O_-(v)\Omega_+(v) > O_+(v)\Omega_-(v). \quad (14)$$

Обратим внимание, что для нас важнее именно неравенство (14), а не первое нестрогое неравенство в (13), которое часто оказывается равенством, бесконечно малые уменьшения объема $V_3(P(v))$ могут совпадать с $O_-(v)tdx_-(v)$.

В неравенстве (14)

$$\Omega_-(v) = c_2l(v)^2, \quad O_-(v) = c_2((1-t)a + tl(v))^2.$$

С целью упрощения выражений для $\Omega_+(v)$ и $O_+(v)$ вначале будем исключать грани второго уровня из групп с более чем одной гранью, при этом из граней, примыкающих к треугольнику $P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v)$, для исключения выбирается та, которая помещается между плоскостями $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v)$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_i}(v) - h\mathbf{n}_i$ с меньшим значением $h > 0$. Тогда $P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)$ будет трапецией с основаниями $l(v)$ и $l_1(v)$. Далее для упрощения формул в обозначении длин будем опускать переменную (v) и писать l и l_1 .

Когда в каждой из 6 групп останется не более одной существенной опорной плоскости, наиболее типичным для выпуклого многоугольника $P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)$ будет представленный на рис. 5 шестиугольник $ABCDEF$, составленный из трех трапеций с основаниями длины l, l_1, l_2, l_3 , параллельными соответствующему ребру симплекса $\hat{\Delta}_3$. На рис. 5 через h_1, h_2, h_3 обозначены высоты этих трапеций. Одна из ломаных ABC, FED (или обе) может оказаться прямым отрезком, когда из тройки ребер, инцидентных некоторой вершине симплекса $\hat{\Delta}_3$, только для одного ребра имеется параллельная ему единственная существенная опорная плоскость уровня 2. На рис. 5

$$l \geq 0, \quad l_i \geq 0, \quad h_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad l + l_1 + l_2 + l_3 > 0, \quad h_1 + h_2 + h_3 > 0. \quad (15)$$

Неравенство (14) проверим только для представленного на рис. 5 вида многоугольника $P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)$. Этим будут охвачены все возможные случаи. Например, в случае трапеции для вида многоугольника $P_1(v) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)$ достаточно положить (оставаясь в условиях (15)) $h_2 = h_3 = 0$, $l_1 = l_2 = l_3$. При $B = B', E' = E$ нужно полагать $h_2 = 0$, $l_1 = l_2$.

Исходя из рис. 5, для выпуклого многоугольника $L \cap [\Delta_1 \cup \mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}(v)]$ имеем такой же вид, но с высотами th_i , $i = 1, 2, 3$, и с основаниями $(1-t)a + tl$, $(1-t)a + tl_i$, $i = 1, 2, 3$.

Сократив обе части неравенства (14) на величину $t^2c_2/2$ и положив $(1-t)/ta = b$, получим

$$\begin{aligned} (b+l)^2 \left[(l+l_1)h_1 + (l_1+l_2)h_2 + (l_2+l_3)h_3 \right] &> \\ &> l^2 \left[(2b+l+l_1)h_1 + (2b+l_1+l_2)h_2 + (2b+l_2+l_3)h_3 \right]. \end{aligned}$$

После возможных сокращений, деления на 4 и замены

$$\frac{1}{2} \left[(l+l_1)h_1 + (l_1+l_2)h_2 + (l_2+l_3)h_3 \right] = U$$

это неравенство примет вид

$$\frac{1}{2}b^2U + blU > \frac{1}{2}bl^2(h_1 + h_2 + h_3). \quad (16)$$

Рис. 5

Рис. 6

Первое слагаемое левой части (16) больше нуля, поэтому неравенство при $l = 0$ справедливо. При $l > 0$ неравенство (14) тоже справедливо, так как $l(h_1 + h_2 + h_3)/2$ — площадь треугольника, содержащегося в многоугольнике $P_1(v) \cap \mathcal{L}_{n_0}(v)$ площади U (см. рис. 5), из-за чего правая часть в (16) не превосходит второе слагаемое левой части в (16).

После исключения всех существенных опорных плоскостей уровня 1 и 2 останутся среди существенных только опорные плоскости $\mathcal{L}_{n_1}$, $\mathcal{L}_{n_2}$, $\mathcal{L}_{n_3}$, $\mathcal{L}_{n_4}$ третьего уровня, которые задают симплекс объема 1. Теорема при $n = 3$ доказана.

4.2. Доказательство ослабленного варианта теоремы для $n = 3$. Неравенство (3) для выпуклых многогранников $P_1 \subset \mathbb{R}^3$, $P_1 \not\parallel \Delta_3$, $V_3(P_1) = V_3(\Delta_3) = 1$, докажем вначале (в п. 4.2.1) при наличии существенных опорных плоскостей уровня 1 и потом (в п. 4.2.2) при их отсутствии.

4.2.1. Пусть $\mathcal{L}_{n_0}$, $\mathbf{n}_0 \in S^2$, — существенная опорная плоскость уровня 1. Рассуждения п. 4.1.1 говорят о наличии выпуклого многогранника $P'_1 \subset \mathbb{R}^3$, $V_3(P'_1) = 1$, такого, что

$$V_3(L \cap [\Delta_3 \cup P'_1]) < V_3(L \cap [\Delta_3 \cup P_1]).$$

Этого достаточно для справедливости (3).

4.2.2. Пусть теперь у выпуклого многогранника $P_1 \subset \mathbb{R}^3$, $P_1 \not\parallel \Delta_3$, $V_3(P_1) = 1$, нет существенных опорных плоскостей уровня 1. Тогда найдется существенная опорная плоскость $\mathcal{L}_{n_0}$, $\mathbf{n}_0 \in S^2$, уровня 2, иначе имели бы $P_1 \parallel \Delta_3$. На рис. 6 плоскость $\mathcal{L}_{n_0}$ параллельна ребру $[A, B]$ симплекса $\hat{\Delta}_3$. Пересечение $\mathcal{L}_{n_0} \cap \hat{\Delta}_3$ является трапецией $A_1A_2B_2B_1$ (стороны $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ параллельны ребру $[A, B]$), а пересечение $H = P_1 \cap \mathcal{L}_{n_0} \subseteq A_1A_2B_2B_1$ является выпуклым многоугольником положительной площади.

Выбрав внутреннюю точку $B' \in [C, D]$ поближе к B , разобьем симплекс $\hat{\Delta}_3$ плоскостью $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{n'}$, содержащей треугольник $\Delta_{AB'D}$, на два симплекса. Ориентация плоскости $\mathcal{L}$ выбрана так, что $B \in \mathcal{L}_{n'}^+$. Симплекс $\Delta_3 \subset L_0$ разобьем на два симплекса плоскостью $\mathcal{L}_{n'}^{(0)} \subset L_0$, параллельной $\mathcal{L}_{n'}$. Плоскость $\mathcal{L}_{n'}$ параллельно перенесем в положение $\tilde{\mathcal{L}}_{n'}$ так, чтобы

$$V_3(\tilde{\mathcal{L}}_{n'}^+ \cap P_1) = V_3(\mathcal{L}_{n'}^{(0)+} \cap \Delta_3).$$

Положим

$$\begin{aligned} P_1^+ &= P_1 \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'}^+, & P_1^- &= P_1 \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'}^-, & P_1 &= P_1^- \cup P_1^+, \\ \Delta_3^- &= \Delta_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'}^{(0)-}, & \Delta_3^+ &= \Delta_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'}^{(0)+}, & \Delta_3 &= \Delta_3^- \cup \Delta_3^+. \end{aligned}$$

Согласно п. 3.6.4 точку $B' \in [D, B]$ мож но выбрать настолько близкой к вершине B , что будет справедливо неравенство

$$V_2(H \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'}^-) > 0.$$

Прямые AB и A_1B_1 параллельны, поэтому прямые AB' и A_1B_1 пересекутся. Ребро $[A, B']$ не параллельно плоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0}$, поэтому относительно симплекса $\Delta_3^- \subset L_0$ у многогранника $P_1^- \supset H' = H \cap \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}'}^-$ имеется существенная опорная плоскость первого уровня $\mathcal{L}_{\mathbf{n}_0} \supset H \supseteq H'$.

Пусть

$$V_3(\Delta_3^-) = V_3(P_1^-) = v^-, \quad V_3(\Delta_3^+) = V_3(P_1^+) = v^+, \quad v^- + v^+ = 1.$$

Согласно п. 3.3.6 имеем

$$w(P_1^-) \geq cv^-, \quad w(P_1^+) \geq cv^+.$$

Из рассуждений предыдущего п. 4.2.1 следует, что $w(P_1^-) > cv^-$. В результате имеем

$$w(P_1) \geq w(P_1^-) + w(P_1^+) \geq w(P_1^-) + cv^+ > cv^- + cv^+ = c.$$

Ослабленный вариант теоремы для $n = 3$ доказан.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ДЛЯ $n \geq 2$

Первое доказательство разбито на две части. В п. 5.1 доказан ослабленный вариант теоремы. В п. 5.2, следуя рассуждениям работы [8], доказано, что $c = 1$, чем завершается первое доказательство теоремы. В п. 5.3 правая часть неравенства (3), равная нижней грани $\inf_Q w(Q)$, рассматривается не только для выпуклых многогранников P_1 , но и для всех выпуклых тел $Q \subset \mathbb{R}^n$ с $V_n(Q) = 1$. В п. 5.3 установлена достижимость этой нижней грани на некотором теле Q_0 и доказан ослабленный вариант теоремы для тел $Q \not\parallel \Delta_n$. В результате при $Q_0 \not\parallel \Delta_n$ получаем $w(Q_0) > w(Q_0)$. Этим противоречием устанавливается, что $Q_0 \parallel \Delta_n$, и поэтому получаем второе доказательство теоремы. В п. 5.4 теорема доказана в ситуации, когда P_0, P_1 являются выпуклыми телами.

5.1. При доказательстве ослабленного варианта теоремы для $n \geq 2$ будем использовать обозначения и понятия из пп. 3.4, 3.5, 3.6, относящиеся к выпуклому многограннику $Q \subset \mathbb{R}^n$, $V_n(Q) = 1$.

5.1.1. Пусть вначале многогранник Q относится к классу 1, $Q = Q^{(1)} \subsetneq Q^{(2)}$ (см. (2)). Это означает, что для некоторого $i \in \{1, \dots, n+1\}$ имеет место включение

$$\hat{Q} = \bigcap_{\mathbf{n} \in S^{n-1} \setminus \mathcal{N}_{n-1}^{(1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1)}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- \supsetneq \bigcap_{\mathbf{n} \in S^{n-1}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^- = Q. \quad (17)$$

Как и в п. 4.1.1 для некоторого произвольно выбранного

$$\mathbf{n}' \in S^{n-1} \setminus \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathcal{N}_{n-1}^{(1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1)}$$

опорную гиперплоскость $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}$ будем параллельно передвигать в положение $\mathcal{L}_{\mathbf{n}'}(v)$, $v \geq 0$, так, что $v = V_n(Q \cap \mathcal{L}_{\mathbf{n}'}^+(v))$. Одновременно с этим параллельно сдвигаются гиперплоскости $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-1}^{(1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1)}$, точнее, параллельно сдвигается множество

$$\Lambda^{(i)}(v) = \bigcap_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{n-1}^{(1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1)}} \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^-(v)$$

так, что

$$\Lambda^{(i)}(v') \subsetneq \Lambda^{(i)}(v'') \quad \text{при } v' < v'',$$

$$V_n(Q(v)) = 1, \quad Q(v) = \bigcap_{n \in S^{n-1}} \mathcal{L}_n^-(v).$$

В задании многогранника $Q(v)$ неупомянутые (пассивные) опорные гиперплоскости $\mathcal{L}_n$, $n \in S^{n-1}$, предполагаются неподвижными или параллельно передвигающимися до касания с $Q \cap \mathcal{L}_{n'}^-(v)$, некоторые из них из несущественных изначально могут превращаться в существенные. Строгое уменьшение при этом функции $w(Q(v)) = V_n(L \cap [\Delta_n, Q(v)])$ проверяется аналогично тому, как это было в п. 4.1.1.

5.1.2. Пусть теперь

$$Q = Q^{(j)} \subsetneq Q^{(j+1)}, \quad 1 < j \leq n-1.$$

Тогда для некоторых различных $i_1, \dots, i_{n-j+1} \in \{1, \dots, n+1\}$ аналогом включения (17) будет включение (8): $\hat{Q}^{(j+1)} \supsetneq Q$. Положим $\{k_1, \dots, k_j\} = \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-j+1}\}$ и рассмотрим некоторую точку $x \in \hat{Q}^{(j+1)} \cap \partial Q$ вместе с замкнутым шаром $\bar{O}(x, r) \subset \hat{Q}^{(j+1)}$. Часть границы ∂Q , выделяющая многогранник Q в большем многограннике $\hat{Q}^{(j+1)}$, равная $\hat{Q}^{(j+1)} \cap \partial Q$, представляется $(n-j)$ -мерным семейством $(j-1)$ -мерных многогранников, параллельных $\hat{\Delta}_{j-1}^{(\{k_1, \dots, k_j\})} = [A_{k_1}, \dots, A_{k_j}]$.

Как и в п. 4.2.2 на ребре $[B_{i_1}, B_{k_j}]$ симплекса $\hat{\Delta}_n = [B_1, \dots, B_{n+1}]$ выберем внутреннюю точку B' ближе к B_{k_j} . Симплекс $[B_1, \dots, B_{n+1}]$ разбиваем на два симплекса гиперплоскостью $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{n'}$, содержащей $(n-1)$ -мерный симплекс $\{[B_i | i \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, k_j\}\} \cup \{B'\}\}$, а симплекс $\Delta_n \subset L_0$ разобьем на два симплекса параллельной $\mathcal{L}$ гиперплоскостью $\mathcal{L}_{n'}^{(0)} \subset L_0$. Ориентация гиперплоскости $\mathcal{L}$ выбрана так, что $B_{k_j} \in \mathcal{L}_{n'}^+$.

Гиперплоскость $\mathcal{L}_{n'}$ параллельно перенесем в положение $\tilde{\mathcal{L}}_{n'}$ так, чтобы

$$V_n(\tilde{\mathcal{L}}_{n'}^+ \cap Q) = V_n(\mathcal{L}_{n'}^{(0)+} \cap \Delta_n).$$

Положим

$$Q^+ = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{n'}^+, \quad Q^- = Q \cap \tilde{\mathcal{L}}_{n'}^-, \quad Q = Q^- \cup Q^+,$$

$$\Delta_n^- = \Delta_n \cap \mathcal{L}_{n'}^{(0)-}, \quad \Delta_n^+ = \Delta_n \cap \mathcal{L}_{n'}^{(0)+}, \quad \Delta_n = \Delta_n^- \cup \Delta_n^+.$$

Согласно п. 3.6.4 точку $B' \in [B_{i_1}, B_{k_j}]$ можно выбрать настолько близкой к вершине B_{k_j} , что будет справедливо включение $\bar{O}(x, r/2) \cap \partial Q \subset Q^-$. Обратим внимание, что часть границы $\bar{O}(x, r/2) \cap \partial Q$ представляется $(n-1)$ -мерным семейством $(j-1)$ -мерных тел, параллельных $[B_{k_1}, \dots, B_{k_{j-1}}, B_{k_j}]$, но не параллельных $[B_{k_1}, \dots, B_{k_{j-1}}, B']$, а параллельных только $(j-2)$ -мерной грани $[B_{k_1}, \dots, B_{k_{j-1}}]$, параллельной соответствующей $(j-2)$ -мерной грани минимального симплекса $\hat{\Delta}_n^-$, содержащего многогранник Q_- и гомотетичного с положительным коэффициентом гомотетии симплексу Δ_n^- . Благодаря этому многогранник Q^- будет относиться (относительно симплекса Δ_n^-) к классу $j-1$.

С многогранником Q^- поступаем так же, как и с Q . Продолжая этот процесс, в конце концов получим разбиение

$$Q = Q_1^- \cup Q_2^- \cup \dots \cup Q_{j-1}^- \cup Q_j^-,$$

отвечающее разбиению симплекса Δ_n на симплексы тех же объемов

$$\Delta_n = \Delta_n^{(1)} \cup \Delta_n^{(2)} \cup \dots \cup \Delta_n^{(j-1)} \cup \Delta_n^{(j)}.$$

Здесь

$$Q_j^- = Q^+, \quad Q^- = Q_1^- \cup Q_2^- \cup \dots \cup Q_{j-1}^-, \quad \Delta_n^{(j)} = \Delta_n^+, \quad \Delta_n^- = \Delta_n^{(1)} \cup \Delta_n^{(2)} \cup \dots \cup \Delta_n^{(j-1)}.$$

В этом разбиении многогранника Q многогранник Q_1^- относится к классу 1 относительно симплекса $\Delta_n^{(1)}$, а многогранник Q_i^- , $i \in \{2, \dots, j\}$, относится к классу i относительно, соответственно, симплекса $\Delta_n^{(i)}$.

Пусть $V_n(Q_i^-) = v_i$, $i = 1, \dots, j$, $v_1 + \dots + v_j = 1$. Согласно пп. 5.1.1 и 3.3.6 имеем

$$\begin{aligned} w(Q) &\geq w(Q^-) + w(Q^+) \geq w(Q_1^-) + w(Q_2^-) + \dots + w(Q_{j-1}^-) + w(Q_j^-) \geq \\ &\geq w(Q_1^-) + cv_2 + \dots + cv_{j-1} + cv_j > cv_1 + cv_2 + \dots + cv_{j-1} + cv_j = \\ &= c(v_1 + v_2 + \dots + v_{j-1} + v_j) = c. \end{aligned} \quad (18)$$

Ослабленный вариант теоремы для $n \geq 2$ и $P_0 = \Delta_n$ доказан.

С учетом леммы из п. 3.2 ослабленный вариант теоремы для $n \geq 2$ справедлив для произвольного выпуклого многогранника P_0 с $V_n(P_0) = 1$:

$$V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) > \inf_{Q: V_n(Q)=1} V_n(L \cap [P_0 \cup Q]) = c.$$

5.2. Для доказательства теоремы остается убедиться, что в строгом неравенстве (3) константа c равна 1. Пусть $P_0 \subset L_0$, $P_1 \subset L_1$ — выпуклые многогранники (или тела), $V_n(P_0) = V_n(P_1) = 1$. Как и в [8], приведем свое оригинальное доказательство нестрогого неравенства

$$V_n(L \cap [P_0 \cup P_1]) \geq 1, \quad (19)$$

следуя первоначальным соображениям Брунна, используя (1).

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n$. Пусть многогранник P_0 покрыт сеткой из n -мерных одинаковых кубиков со стороной $\varepsilon > 0$, получающихся в результате разбиения его n семействами гиперплоскостей, перпендикулярных соответственно $\mathbf{n}_i$, $i = 1, \dots, n$. Назовем их верхними гиперплоскостями. Граничными назовем пересекающиеся с границей ∂P_0 кубики, часть вершин которых находится за пределами P_0 . Данное разбиение индуцирует разбиение многогранника P_1 на параллелепипеды следующим образом.

Семейство верхних гиперплоскостей, перпендикулярных $\mathbf{n}_1$, индуцирует однозначно задаваемое семейство такого же числа нижних гиперплоскостей, перпендикулярных $\mathbf{n}_1$ и разрезающих многогранник P_1 . Однозначность обеспечивается тем, что соответственные ломти (включая крайние) между каждой парой соответственных верхних и нижних гиперплоскостей должны иметь одинаковый n -мерный объем. Каждый образовавшийся ломоть в P_1 независимо от остальных ломтей P_1 аналогично разбивается семейством гиперплоскостей, перпендикулярных $\mathbf{n}_2$, исходя из уже имеющегося разбиения соответствующего ломтя из P_0 . И так для всех остальных по порядку векторов $\mathbf{n}_3, \dots, \mathbf{n}_n$.

Граничные кубики в P_0 (точнее, их пересечения с P_0) и соответствующие им ломти в P_1 исключаем из дальнейшего рассмотрения. (Выпуклая оболочка не исключенных из тела P_0 кубиков является выпуклым многогранником в P_0 с n -мерным объемом сколь угодно близким к $V_n(P_0)$.)

После этого многогранник P_1 помещаем в такую же сетку из n -мерных кубиков со стороной, для определенности, тоже ε . Эта сетка индуцирует разбиение на параллелепипеды каждого (не исключенного) ломтя Q_1 многогранника P_1 . Ломтю Q_1 (объема ε^n) отвечает кубик Q_0 в P_0 , на котором (как и выше) индуцируется разбиение на параллелепипеды, отвечающее разбиению Q_1 .

Долю ломтя Q_1 , не являющуюся параллелепипедом (соприкасающуюся с границей ∂P_1 , содержащуюся в кубике, пересекающемся с границей ∂P_1 по внутренним точкам), исключаем из дальнейшего рассмотрения вместе с соответствующей долей (в виде параллелепипеда) кубика Q_0 .

Суммарный объем всех оставшихся параллелепипедов в P_0 и в P_1 за счет выбора $\varepsilon > 0$ достаточно малым будет приближаться снизу к 1 сколь угодно близко, так как исключенные доли содержатся в сколь угодно малых окрестностях границ ∂P_0 и ∂P_1 .

Согласно (1) неравенство (19) достаточно доказать для двух прямоугольных параллелепипедов Π_0, Π_1 со сторонами $a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}$, $j = 0, 1$, для которых

$$a_1^{(0)} \cdot \dots \cdot a_n^{(0)} = a_1^{(1)} \cdot \dots \cdot a_n^{(1)} = 1.$$

Тогда неравенство (19) принимает вид

$$\prod_{i=1}^n \left((1-t)a_i^{(0)} + ta_i^{(0)} \right) \geq 1 \quad \text{или} \quad t^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{1-t}{t} + \frac{a_i^{(1)}}{a_i^{(0)}} \right) \geq 1.$$

Справедливость последнего неравенства следует из того, что минимум произведения

$$p = p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (\tau + x_i)$$

при $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, заданном $\tau = (1-t)/t$ и $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, достигается только при $x_1 = \dots = x_n = 1$ и равен $(\tau + 1)^n$. Действительно, при замене $x_i \neq x_j$ на $x'_i = x'_j = \sqrt{x_i x_j}$ величина p становится строго меньшей, поэтому

$$p(x_1, \dots, x_n) > p'' = p(x'_1, \dots, x'_n),$$

причем произведение p'' можно сделать сколь угодно близким к $(\tau + 1)^n$ за счет того, что все компоненты $x'_1, \dots, x'_n$ можно сделать несколькими заменами пар различных компонент на равные сколь угодно близкими к 1. В результате неравенство (19) доказано.

Теорема элементарными методами (первым способом) доказана.

5.3. Если предыдущие рассуждения в доказательствах проводились элементарными методами, то рассуждения настоящего пункта, доказывающие равенство $c = 1$ вторым — наиболее естественным — способом, нельзя отнести к элементарным, хотя они и самые простые в статье.

Пусть $\mathcal{K}$ — множество всех тел Q (ограниченных замкнутых выпуклых множеств) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, для которых $V_n(Q) = 1$, $t^n \leq w(Q) \leq 1$, и центры тяжести Q совпадают с началом координат $\mathcal{O}$. Согласно п. 3.6.1 для некоторого фиксированного $R > 0$ имеет место включение $Q \subseteq \overline{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, R)$ для всех $Q \in \mathcal{K}$.

На множестве $\mathcal{K}$ рассмотрим метрику, определяемую равенством (4). Относительно этой метрики множество $\mathcal{K}$ компактно. Действительно, если Q_i , $i \in \mathbb{N}$, фундаментальная последовательность элементов из $\mathcal{K}$, то последовательность $f_{Q_i}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{N}$, непрерывных функций на компакте S^{n-1} будет фундаментальной, в частности, для всех векторов $\mathbf{n} \in S^{n-1}$ последовательности $f_{Q_i}(\mathbf{n}) \in [0, R]$, $i \in \mathbb{N}$, фундаментальны. Соответствующие их пределы, принадлежащие отрезку $[0, R]$, обозначим $f_0(\mathbf{n})$. Непосредственно проверяется, что множество

$$T = \bigcup_{\mathbf{n} \in S^{n-1}} [\mathcal{O}, f_0(\mathbf{n})\mathbf{n}]$$

является ограниченным, выпуклым и замкнутым, является телом, причем последовательность f_{Q_i} , $i \in \mathbb{N}$, равномерно сходится к непрерывной функции $f_T = f_0$, поэтому $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = T$. Объем $V_n(T)$ сколь угодно близко приближается к $V_n(Q_i) = 1$, $i \in \mathbb{N}$, поэтому $V_n(T) = 1$. Из непрерывности функции $w(Q)$ следует, что $t^n \leq w(T) \leq 1$, так как $t^n \leq w(Q_i) \leq 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, $T \in \mathcal{K}$, поэтому множество $\mathcal{K}$ компактно. Непрерывная функция w на компакте $\mathcal{K}$ принимает минимум, равный $\inf_{Q \in \mathcal{K}} w(Q) = c_0 = w(Q_0) \leq c$ для некоторого тела $Q_0 \in \mathcal{K}$.

Рассуждения п. 5.1, изложенные для выпуклых многогранников, дословно переносятся на случай тел, поэтому при $Q_0 \not\parallel \Delta_n$ имеем $w(Q_0) > c_0 = w(Q_0)$. Это противоречие говорит о том, что $Q_0 \parallel \Delta_n$ и $c_0 = 1 = c$.

Теорема вторым способом доказана.

5.4. Таким образом, в статье элементарными методами доказаны теорема для $n = 2$ и $n = 3$ и ослабленный вариант теоремы для $n \geq 2$. Для завершения доказательства теоремы элементарными методами в п. 5.2 приведено доказательство нестрогого неравенства $V_n(L \cap [P_0, P_1]) \geq V_n(P_0) = V_n(P_1)$ путем традиционного одинакового деления объемов P_0, P_1 параллельными гиперплоскостями. Для второго (не элементарного) доказательства теоремы при $n \geq 4$ в п. 5.3 приведены простые рассуждения (в рамках начальных понятий метрических пространств), устанавливающие равенство $c = 1$.

В п. 5.3 теорема доказана даже в более общей ситуации, когда P_0 — выпуклый многогранник, P_1 — тело, которое у нас выпуклое по определению. Если и P_0 тело, $V_n(P_0) = V_n(P_1) = v$, то нестрогое неравенство $V_n(P) \geq v$ устанавливается стандартно, например, рассмотрением многогранников $P'_0 \subseteq P_0$ и выпуклых тел $P'_1 \subseteq P_1$ таких, что $V_n(P'_0) = V_n(P'_1)$, поскольку

$$P' = L \cap [P'_0, P'_1] \subseteq P = L \cap [P_0, P_1], \quad V_n(P) \geq V_n(P') \geq V_n(P'_0) = v - \varepsilon,$$

а ε можно сделать сколь угодно малым.

Далее, пусть $P_0 \not\parallel P_1$. Тело P'_1 можно получать последовательными отсечениями частей P_1 гиперплоскостями, параллельными граням многогранника P'_0 , отслеживая каждый раз равенство отсекаемых объемов у P_0 и P_1 . Совместив центры тяжести тел P_0, P_1 в точке $\mathcal{O}$, благодаря наличию внутренней точки $x \in P_0, x \notin P_1$, убеждаемся, что при достаточно малых ε можно считать $P'_0 \not\parallel P'_1$, так как $x \in P''_0$ внутренняя, $x \notin P''_1$, где $P''_0 \parallel P'_0, P''_1 \parallel P'_1$, а центры тяжести P''_0, P''_1 совпадают с $\mathcal{O}$. Тогда $P''_0 \not\parallel P''_1$ и $P'_0 \not\parallel P'_1$, поэтому

$$V_n(L \cap [P'_0, P'_1]) > V_n(P'_0) = V_n(P'_1).$$

После этого по аналогии с (18) имеем $V_n(P) > v$.

В результате получили доказательство теоремы и в случае, когда P_0, P_1 являются выпуклыми телами, хоть это и не было целью статьи. Обобщение теоремы с выпуклых многогранников на выпуклые тела по большому счету не вносит принципиальной новизны, происходит достаточно просто и стандартно.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ИТОВЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Ранее традиционно в геометрических доказательствах теоремы для выпуклых многогранников (или тел, что не принципиально) $P_0 \subset L_0, P_1 \subset L_1, V_n(P_0) = V_n(P_1) = v > 0, P = L \cap [P_0, P_1]$, доказывались два утверждения: 1) $V_n(P) \geq v$, и, как более трудное, 2) если $V_n(P) = v$, то $P_1 \parallel P_0$.

В настоящей статье (см. также [10]) доказано эквивалентное им одно утверждение: если $P_1 \not\parallel P_0$, то $V_n(P) > v$, имеющее ослабленный вариант: если $P_1 \not\parallel P_0$, то найдется выпуклый многогранник $P'_1, V_n(P'_1) = v$, для которого $V_n(P) > V_n(P'), P' = L \cap [P_0, P'_1]$. Благодаря этому исчезают наиболее трудная часть доказательства теоремы и необходимость обращения к симметризации Штейнера. Отметим еще в связи с этим, что вместо устоявшейся терминологии о случае равенства в теореме правильной говорить о строгом неравенстве.

Новизна предлагаемых в статье семи доказательств теоремы (три для $n = 2$, по два для $n = 3$ и для $n \geq 2$) обусловлена двумя соображениями:

1. Вместо традиционных семейств параллелепипедов (инициировавших трудный случай в теореме), приближающих «снизу» многогранник P_0 , используются симплексы, исчерпывающие объем P_0 полностью (Лемма п. 3.2), что как раз и позволило избежать трудный случай и доказывать теорему только для симплексов P_0 .
2. Введение последовательности (2) (или (10)) вложенных многогранников, начинающейся с P_1 и заканчивающейся минимальным симплексом $\hat{P}_0 \subset L_1$, содержащим P_1 и гомотетичным симплексу P_0 . Промежуточные многогранники последовательности определяются по разбиению сферы S^{n-1} (состоящей из нормалей опорных гиперплоскостей для P_1) на грани центральной проекции (на сферу S^{n-1}) симплекса P_0^* , двойственного к $\hat{P}_0$ (см. (7) и (9)).

В доказательствах использовались два технических приема:

1. Для многогранника P_1 общего положения для уменьшения $V_n(P)$ производился параллельный перенос его опорной гиперплоскости с нормалью в виде вершины симплекса P_0^* к центру P_1 , уменьшая его объем, с одновременным параллельным переносом существенной опорной гиперплоскости с нормалью из внутренности $(n-1)$ -мерной грани симплекса P_0^* от центра P_1 , напротив, увеличивая объем многогранника P_1 до значения v . Остальные опорные гиперплоскости остаются при этом «пассивными». (См. пп. 2.2, 2.3, 4.1.1, 4.2.1, 5.1.1).
2. Выделение из особых многогранников P_1 многогранников общего положения путем разбиения гиперплоскостями симплекса P_0 на меньшие симплексы и многогранника P_1 на меньшие части

тех же объемов, что и у частей P_0 . Каждая пара гиперплоскостей из L_0 и L_1 , разбивающих соответственно P_0 и P_1 , должна быть параллельной. (См. п. 4.2.2, рис. 6, п. 5.1.2).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Р. Н. Карасеву. Предоставленные им материалы и проведенные обсуждения с острой взаимной критикой оказались исключительно полезными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. — М.: Мир, 2006.
2. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. — М.: ГИТТЛ, 1950.
3. Белоусов Е. Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. — М.: МГУ, 1977.
4. Бляшке В. Круг и шар. — М.: Наука, 1967.
5. Булдыгин В. В., Харацишвили А. Б. Неравенство Брунна—Минковского и его приложения. — Киев: Наукова Думка, 1985.
6. Бураго Д. М., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. — Л.: Наука, 1980.
7. Делоне Б. Н. Герман Минковский// Усп. мат. наук. — 1936. — № 2. — С. 32–38.
8. Делоне Б. Н. Доказательство неравенства Брунна—Минковского// Усп. мат. наук. — 1936. — № 2. — С. 39–46.
9. Лейтвейс К. Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
10. Малышев Ф. М. Новое доказательство неравенства Брунна—Минковского// Мат. Междунар. конф. «Классическая и современная геометрия», посв. 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. — М.: МПГУ, 2019. — С. 111–113.
11. Малышев Ф. М. Оптимизационная задача для неравенства Брунна—Минковского// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1997. — 218. — С. 262–265.
12. Федерер Г. Геометрическая теория меры. — М.: Наука, 1987.
13. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изометрии. — М.: Наука, 1966.
14. Ball K. An Elementary Introduction to Monotone Transportation// Lect. Notes Math. — 2004. — 1850. — P. 41–52.
15. Brunn H. Über Ovale und Eiflachen. — Munchen, 1887.
16. Gardner R. J. The Brunn–Minkowski inequality// Bull. Am. Math. Soc. — 2002. — 39, № 3. — P. 355–405.

Малышев Федор Михайлович

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

E-mail: malyshevfm@mi-ras.ru