Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Булдаев, Методы неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 183, 22–34

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-22-34>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:29:15

МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

© 2020 г. А. С. БУЛДАЕВ

Аннотация. Рассматривается новый подход к оптимизации управляемых нелинейных систем, основывающийся на представлении условий оптимальности и улучшения управления в форме специальных задач о неподвижной точке операторов управления. Предлагаются алгоритмы приближенного решения задач оптимального управления на основе итерационных методов поиска неподвижных точек. Эффективность предлагаемых методов оптимизации иллюстрируется на расчетах модельных и тестовых задач.

Ключевые слова: управляемая система, условия улучшения и оптимальности управления, задача о неподвижной точке, численные алгоритмы оптимизации.

FIXED-POINT METHODS IN OPTIMIZATION PROBLEMS FOR CONTROL SYSTEMS

© 2020 А. S. BULDAEV

ABSTRACT. In this paper, we consider a new approach to optimization of nonlinear control systems based on the representation of optimality conditions and improvement of the control in the form of special fixed-point problems for control operators. We propose algorithms for approximate solution of optimal control problems based on iterative methods for finding fixed points. The effectiveness of the optimization methods proposed is illustrated by model and test problems.

Keywords and phrases: control system, conditions for improvement and optimality of control, fixed-point problem, numerical optimization algorithms.

AMS Subject Classification: 49Kxx, 37Cxx

Предлагаемые методы являются обобщением и развитием нелокальных методов улучшения и оптимизации управлений, первоначально разработанных в классах линейных (см. [6]) и полиномиальных (см. [1]) по состоянию динамических систем.

1. Задачи о неподвижной точке. Рассматриваемый подход неподвижных точек иллюстрируется в рамках следующего класса задач оптимального управления:

$$\Phi(\sigma) = \varphi(x(t_1), \omega) + \int_T F(x(t), u(t), \omega, t) dt \rightarrow \inf_{\sigma \in \Omega}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \omega, t), \quad x(t_0) = a, \quad u(t) \in U, \omega \in W, \quad a \in A, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в котором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ — вектор управляющих функций, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_l)$ и $a = (a_1, \dots, a_n)$ — векторы управляющих параметров. Будем

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-030005ра) и Министерства образования и науки РФ (проект № 1.5049.2017/БЧ)..

считать, что выполнены следующие условия. Множества $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^l$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнуты и выпуклы. Интервал T фиксирован. В качестве допустимых управляющих функций рассматривается множество V кусочно непрерывных на T функций со значениями в множестве U ; $\sigma = (u, \omega, a)$ — допустимое управление со значениями в множестве $\Omega = V \times W \times A$. Функция $\varphi(x, \omega)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n \times W$, функции $F(x, u, \omega, t)$, $f(x, u, \omega, t)$ и их частные производные по x, u, ω непрерывны по совокупности аргументов на множестве $\mathbb{R}^n \times U \times W \times T$. Функция $f(x, u, \omega, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $\mathbb{R}^n \times U \times W \times T$ с константой $L > 0$:

$$\|f(x, u, \omega, t) - f(y, u, \omega, t)\| \leq L\|x - y\|.$$

Условия гарантируют существование и единственность решения $x(t, \sigma)$, $t \in T$ системы (2) для любого допустимого управления $\sigma \in \Omega$.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in \mathbb{R}^n$ и стандартная сопряженная система имеют вид

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, \omega, t) &= \langle \psi, f(x, u, \omega, t) \rangle - F(x, u, \omega, t), \\ \dot{\psi}(t) &= -H_x(\psi(t), x(t), u(t), \omega, t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1), \omega). \end{aligned} \quad (3)$$

Для допустимого управления $\sigma \in \Omega$ обозначим $\psi(t, \sigma)$, $t \in T$, решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t, \sigma)$ и аргументах u, ω , соответствующих компонентам управления σ . Частное приращение произвольной вектор-функции $g(y_1, \dots, y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2} будем обозначать следующим образом:

$$\Delta_{y_{s_1} + \Delta y_{s_1}, y_{s_2} + \Delta y_{s_2}} g(y_1, \dots, y_l) = g(y_1, \dots, y_{s_1} + \Delta y_{s_1}, \dots, y_{s_2} + \Delta y_{s_2}, \dots, y_l) - g(y_1, \dots, y_l).$$

Дополнительно введем обозначения

$$\Delta x(t) = x(t, \sigma) - x(t, \sigma^I), \quad \Delta u(t) = u(t) - u^I(t), \quad \Delta \omega = \omega - \omega^I, \quad \Delta a = a - a^I.$$

Обозначим через P_Y оператор проектирования на множество $Y \subset \mathbb{R}^k$ в евклидовой норме:

$$P_Y(z) = \arg \min_{y \in Y} (\|y - z\|), \quad z \in \mathbb{R}^k.$$

В [2] получены необходимые условия оптимальности управления $\sigma^I \in \Omega$ в задаче (1), (2) в форме принципа максимума:

$$u^I(t) = \arg \max_{\tilde{u} \in U} H(\psi(t, \sigma^I), x(t, \sigma^I), \tilde{u}, \omega^I, t), \quad t \in T, \quad (4)$$

$$\omega^I = \arg \max_{\tilde{\omega} \in W} \left\langle -\varphi_\omega(x(t_1, \sigma^I), \omega^I) + \int_T H_\omega(\psi(t, \sigma^I), x(t, \sigma^I), u^I(t), \omega^I, t) dt, \tilde{\omega} \right\rangle, \quad (5)$$

$$a^I = \arg \max_{\tilde{a} \in A} \langle \psi(t_0, \sigma^I), \tilde{a} \rangle. \quad (6)$$

Из условий (4)–(6) следуют ослабленные необходимые условия в форме дифференциального принципа максимума:

$$\begin{aligned} u^I(t) &= \arg \max_{\tilde{u} \in U} \left\langle H_u(\psi(t, \sigma^I), x(t, \sigma^I), u^I(t), \omega^I, t), \tilde{u} \right\rangle, \quad t \in T, \\ \omega^I &= \arg \max_{\tilde{\omega} \in W} \left\langle -\varphi_\omega(x(t_1, \sigma^I), \omega^I) + \int_T H_\omega(\psi(t, \sigma^I), x(t, \sigma^I), u^I(t), \omega^I, t) dt, \tilde{\omega} \right\rangle, \\ a^I &= \arg \max_{\tilde{a} \in A} \langle \psi(t_0, \sigma^I), \tilde{a} \rangle, \end{aligned}$$

которые можно представить в проекционной форме с параметром $\alpha > 0$:

$$u^I(t) = P_U \left(u^I(t) + \alpha H_u \left(\psi(t, \sigma^I), x(t, \sigma^I), u^I(t), \omega^I, t \right) \right), \quad t \in T, \quad (7)$$

$$\omega^I = P_W \left(\omega^I + \alpha \left(-\varphi_\omega(x(t_1, \sigma^I), \omega^I) + \int_T H_\omega(\psi(t, \sigma^I), x(t, \sigma^I), u^I(t), \omega^I, t) dt \right) \right), \quad (8)$$

$$a^I = P_A(a^I + \alpha \psi(t_0, \sigma^I)). \quad (9)$$

Задача улучшения управления рассматривается в следующей общей постановке: для заданного управления $\sigma^I \in \Omega$ требуется найти управление $\sigma \in \Omega$ с условием

$$\Delta_\sigma \Phi(\sigma^I) = \Phi(\sigma) - \Phi(\sigma^I) \leq 0.$$

Введем модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему:

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), u(t), \omega, t) - r(t), \quad (10)$$

$$\left\langle H_x(p(t), x(t), u(t), \omega, t) + r(t), y(t) - x(t) \right\rangle = \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), u(t), \omega, t) \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1), \omega) - q, \quad (12)$$

$$\left\langle \varphi_x(x(t_1), \omega) + q, y(t_1) - x(t_1) \right\rangle = \Delta_{y(t_1)} \varphi(x(t_1), \omega), \quad (13)$$

в которой по определению полагаем $r(t) = 0$, $q = 0$ в случае линейности по x функций φ , F , f (линейная по состоянию задача (1)), (2)), а также в случае $y(t) = x(t)$ при соответствующих $t \in T$.

В линейной по состоянию задаче (1), (2) модифицированная сопряженная система (10)–(13) в силу определения совпадает со стандартной сопряженной системой (3).

В нелинейной по состоянию задаче (1), (2) алгебраические уравнения (11) и (13) всегда можно разрешить относительно величин $r(t)$ и q (возможно, не единственным образом). Таким образом, дифференциально-алгебраическую сопряженную систему (10)–(13) всегда можно свести (возможно, не единственным образом) к дифференциальной сопряженной системе с однозначно определенными величинами $r(t)$ и q .

Для допустимых управлений $\sigma \in \Omega$, $\sigma^I \in \Omega$ обозначим через $p(t, \sigma^I, \sigma)$, $t \in T$, решение модифицированной сопряженной системы (10)–(13) при $x(t) = x(t, \sigma^I)$, $y(t) = x(t, \sigma)$, $u(t) = u^I(t)$, $\omega = \omega^I$. Из определения следует очевидное равенство

$$p(t, \sigma, \sigma) = \psi(t, \sigma), \quad t \in T.$$

В [3] показано, что для решения задачи улучшения заданного управления $\sigma^I \in \Omega$ достаточно решить следующую систему уравнений относительно $\sigma = (u, \omega, a)$ при $\alpha > 0$:

$$u(t) = P_U \left(u^I(t) + \alpha \left(H_u \left(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), u^I(t), \omega^I, t \right) + s^u(t) \right) \right), \quad t \in T, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{u(t)} H \left(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), u^I(t), \omega^I, t \right) = \\ = \left\langle H_u \left(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), u^I(t), \omega^I, t \right) + s^u(t), u(t) - u^I(t) \right\rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\omega = P_W \left(\omega^I + \alpha \left(-\varphi_\omega(x(t_1, \sigma), \omega^I) + \int_T H_\omega(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), u(t), \omega^I, t) dt + s^\omega \right) \right), \quad (16)$$

$$\Delta_\omega \left\{ -\varphi(x(t_1, \sigma), \omega^I) + \int_T H(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), u(t), \omega^I, t) dt \right\} = \\ = \left\langle -\varphi_\omega(x(t_1, \sigma), \omega^I) + \int_T H_\omega(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), u(t), \omega^I, t) dt + s^\omega, \omega - \omega^I \right\rangle, \quad (17)$$

$$a = P_A(a^I + \alpha p(t_0, \sigma^I, \sigma)), \quad (18)$$

в которой в уравнении (15) по определению принимается $s^u(t) = 0$ в случае линейности функций F, f по u (линейная по управляющей функции u задача (1), (2)), а также в случае $u(t) = u^I(t)$ при соответствующих $t \in T$. Аналогично в уравнении (17) по определению полагается $s^\omega = 0$ в случае линейности функций F, f по ω (линейная по параметру ω задача (1), (2)), а также для $\omega = \omega^I$.

В нелинейной по управляющей функции u и параметру ω задаче (1), (2) уравнения (15) и (17) всегда можно разрешить относительно величин $s^u(t)$ и s^ω (возможно, не единственным образом).

Таким образом, систему (14)–(18) всегда можно свести (возможно, не единственным образом) к приведенной системе уравнений с однозначно определенными величинами $s^u(t)$ и s^ω .

Пусть система условий (14)–(18) имеет решение $\sigma^{\text{II}} = (u^{\text{II}}, \omega^{\text{II}}, a^{\text{II}})$ (возможно, не единственное) и управление u^{II} является кусочно непрерывным. Тогда имеет место оценка улучшения функционала

$$\Delta_{\sigma^{\text{II}}} \Phi(\sigma^I) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|u^{\text{II}}(t) - u^I(t)\|^2 dt - \frac{1}{\alpha} \|\omega^{\text{II}} - \omega^I\|^2 - \frac{1}{\alpha} \|a^{\text{II}} - a^I\|^2.$$

Структура сконструированных условий оптимальности и улучшения управления и используемая система обозначений решений фазовой и сопряженной систем в форме явной зависимости от управления позволяет интерпретировать системы уравнений (4)–(6), (7)–(9) и (14)–(18) как задачи о неподвижной точке специальных однозначно определяемых операторов управления. Это позволяет применить развитую теорию и методы неподвижных точек для эффективного поиска экстремальных и улучшающих управлений.

2. Итерационные алгоритмы. Предлагаемые методы в классе задач (1), (2) можно проиллюстрировать двумя следующими алгоритмами оптимизации.

1. Для численного решения задачи о неподвижной точке (14)–(18) для улучшения заданного управления σ^I выбирается следующий итерационный процесс при $k \geq 0$:

$$u^{k+1}(t) = P_U \left(u^I(t) + \alpha \left(H_u(p(t, \sigma^I, \sigma^k), x(t, \sigma^k), u^I(t), \omega^I, t) + s^u(t) \right) \right), \quad t \in T,$$

$$\Delta_{u^k(t)} H(p(t, \sigma^I, \sigma^k), x(t, \sigma^k), u^I(t), \omega^I, t) = \\ = \left\langle H_u(p(t, \sigma^I, \sigma^k), x(t, \sigma^k), u^I(t), \omega^I, t) + s^u(t), u^k(t) - u^I(t) \right\rangle,$$

$$\omega^{k+1} = P_W \left(\omega^I + \alpha \left(-\varphi_\omega(x(t_1, \sigma^k), \omega^I) + \int_T H_\omega(p(t, \sigma^I, \sigma^k), x(t, \sigma^k), u^k(t), \omega^I, t) dt + s^\omega \right) \right),$$

$$\Delta_{\omega^k} \left\{ -\varphi(x(t_1, \sigma^k), \omega^I) + \int_T H(p(t, \sigma^I, \sigma^k), x(t, \sigma^k), u^k(t), \omega^I, t) dt \right\} = \\ = \left\langle -\varphi_\omega(x(t_1, \sigma^k), \omega^I) + \int_T H_\omega(p(t, \sigma^I, \sigma^k), x(t, \sigma^k), u^k(t), \omega^I, t) dt + s^\omega, \omega^k - \omega^I \right\rangle,$$

$$a^{k+1} = P_A(a^I + \alpha p(t_0, \sigma^I, \sigma^k)).$$

Задается начальное приближение итерационного процесса $\sigma^0 \in \Omega$ при $k = 0$.

Расчет задачи о неподвижной точке (14)–(18) производится до первого улучшения исходного управления σ^I . Далее строится новая задача улучшения для полученного управления σ^I и расчет повторяется. Итерации улучшения управления продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие

$$|\Phi(\sigma^I) - \Phi(\sigma^I)| \leq \varepsilon |\Phi(\sigma^I)|,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная точность расчета.

2. Для решения задачи о неподвижной точке дифференциального принципа максимума (7)–(9) применяется следующий итерационный процесс при $k \geq 0$ с начальным управлением $\sigma^0 \in \Omega$:

$$\begin{aligned} u^{k+1}(t) &= P_U \left(u^k(t) + \alpha H_u(\psi(t, \sigma^k), x(t, \sigma^k), u^k(t), \omega^k, t) \right), \quad t \in T, \\ \omega^{k+1} &= P_W \left(\omega^k + \alpha \left(-\varphi_\omega(x(t_1, \sigma^k), \omega^k) + \int_T H_\omega(\psi(t, \sigma^k), x(t, \sigma^k), u^k(t), \omega^k, t) dt \right) \right), \\ a^{k+1} &= P_A(a^k + \alpha \psi(t_0, \sigma^k)). \end{aligned}$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие

$$|\Phi(\sigma^{k+1}) - \Phi(\sigma^k)| \leq \varepsilon |\Phi(\sigma^k)|,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная точность расчета.

Для анализа сходимости рассматриваемых итерационных процессов к решениям задач о неподвижной точке при достаточно малых параметрах проектирования $\alpha > 0$ применяется аналогично работам [1, 2] известный принцип сжимающих отображений (см. [5]).

Построенные проекционные методы неподвижных точек характеризуется тем, что улучшающие и экстремальные управления определяются решениями соответствующих задач о неподвижной точке при любом значении параметра проектирования $\alpha > 0$, в частности, при достаточно малых $\alpha > 0$, обеспечивающих принципиальную сходимость конструируемых итерационных процессов последовательных приближений к решениям задач о неподвижной точке.

Эффективность предлагаемых алгоритмов демонстрируется и анализируется на расчетах модельных и тестовых задач.

3. Примеры. К задачам вида (1),(2) могут быть сведены многие задачи оптимального управления с ограничениями, в том числе с нефиксированным временем. Предлагаемый подход неподвижных точек демонстрируется на двух известных примерах.

Пример 1. В [4] известная задача оптимального быстрогодействия (задача Цермело) методом штрафов приводится к следующей задаче оптимального управления с нефиксированным временем управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \cos x_3(t), & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = \sin x_3(t), & x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = u(t), & x_3(0) = 0, \\ t \in [0, t_1], & |u(t)| \leq 0,5, \end{cases}$$

$$G(u, t_1) = t_1 + 1000 \left((x_1(t_1) - 4)^2 + (x_2(t_1) - 3)^2 \right) \rightarrow \min.$$

Заменой времени по правилу

$$\begin{aligned} t(\tau) &= t_0 + (t_1 - t_0)\tau = \omega\tau, \quad \tau \in [0, 1], \quad \omega = t_1 \geq 0, \\ v(\tau) &= u(t(\tau)), \quad y(\tau) = x(t(\tau)), \quad \sigma = (v, w), \end{aligned}$$

указанная задача сводится к задаче с закрепленным временем

$$\begin{cases} \dot{y}_1(\tau) = \omega \cos y_3(\tau), & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2(\tau) = \omega \sin y_3(\tau), & y_2(0) = 0, \\ \dot{y}_3(\tau) = \omega v(\tau), & y_3(0) = 0, \end{cases}$$

$$\Phi(\sigma) = \omega + 1000 \left((y_1(1) - 4)^2 + (y_2(1) - 3)^2 \right) \rightarrow \min,$$

$$T = [0, 1], \quad U = \{u : |u| \leq 0,5\}, \quad W = \{\omega : \omega \geq 0\}.$$

Функция Понтрягина с производными и стандартная сопряженная система в преобразованной задаче имеют следующий вид:

$$H(\psi, y, v, \omega, \tau) = \omega(\psi_1 \cos y_3 + \psi_2 \sin y_3 + \psi_3 v),$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(\tau) = 0, & \psi_1(1) = -2000(y_1(1) - 4), \\ \dot{\psi}_2(\tau) = 0, & \psi_2(1) = -2000(y_2(1) - 3), \\ \dot{\psi}_3(\tau) = \omega \psi_1 \sin y_3(\tau) - \omega \psi_2 \cos y_3(\tau), & \psi_3(1) = 0. \end{cases}$$

Для допустимого управления $\sigma = (v, \omega) \in \Omega$ обозначим через $\psi(\tau, \sigma)$, $\tau \in [0, 1]$, решение сопряженной системы при $y(\tau) = y(\tau, \sigma)$ и при соответствующих σ компонентах v, ω .

Полученная сведенная задача с закрепленным временем является линейной по v и ω , что существенно упрощает структуру задач о неподвижной точке. В частности, задача о неподвижной точке дифференциального принципа максимума в проекционной форме относительно экстремального управления $\sigma = (v, \omega) \in \Omega$ согласно формулам (7)–(9) принимает следующий вид:

$$v(\tau) = P_U \left(v(\tau) + \alpha \omega \psi_3(\tau, \sigma) \right), \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\omega = P_W \left(\omega + \alpha \left(-1 + \int_0^1 \left(\psi_1(\tau, \sigma) \cos y_3(\tau, \sigma) + \psi_2(\tau, \sigma) \sin y_3(\tau, \sigma) + \psi_3(\tau, \sigma) v(\tau) \right) d\tau \right) \right), \quad \alpha > 0.$$

Для реализации полученной задачи о неподвижной точке рассматривается следующий явный итерационный процесс при $k \geq 0$ с заданным начальным приближением $\sigma^0 = (v^0, \omega^0) \in \Omega$:

$$v^{k+1}(\tau) = P_U \left(v^k(\tau) + \alpha \omega \psi_3(\tau, \sigma^k) \right), \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\omega^{k+1} = P_W \left(\omega^k + \alpha \left(-1 + \int_0^1 \left(\psi_1(\tau, \sigma^k) \cos y_3(\tau, \sigma^k) + \psi_2(\tau, \sigma^k) \sin y_3(\tau, \sigma^k) + \psi_3(\tau, \sigma^k) v^k(\tau) \right) d\tau \right) \right), \quad \alpha > 0.$$

Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось методом Рунге—Кутты—Вернера пятого или шестого порядка точности с помощью библиотеки IMSL языка Fortran PowerStation 4.0. Значения управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах фиксированной равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 10^{-3}$. В промежутках между соседними узлами сетки T_h значение управляющей функции принималось постоянным и равным значению в левом узле. Численный расчет задачи о неподвижной точке проводился до выполнения условия

$$\left| \Phi(\sigma^{k+1}) - \Phi(\sigma^k) \right| \leq \left| \Phi(\sigma^k) \right| \cdot \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная точность расчета. В качестве $\varepsilon > 0$ выбиралось вычисленное согласно [7] значение «машинного эпсилон», которое при расчетах с переменными двойной точности оказалось равным 10^{-16} .

Таблица 1

Метод	Φ^*	N
1	5,85	100010
2	5,26	100125
3	5,13	100002
4	5,18	100019
5	5,26	100036
6	6,41	100008
7	5,33	100015
8	5,11	100012
МНТ	5,117	70619

Таблица 2

α	v^0	ω^0	Φ^*	N
10^{-5}	0,5	5	5,117	70619
$> 10^{-5}$	0,5	5	не сходится	—
10^{-6}	0,5	5	5,117	> 200000
10^{-5}	0	5	5,117	103999
$> 10^{-5}$	0	5	не сходится	—
10^{-6}	0	5	5,117	> 200000
10^{-5}	-0,5	5	5,117	141853
$> 10^{-5}$	-0,5	5	не сходится	—
10^{-6}	-0,5	5	7,00	200001
10^{-5}	0,5	10	5,117	> 200000
$> 10^{-5}$	0,5	10	не сходится	—
10^{-6}	0,5	10	5,117	> 200000
10^{-5}	0	10	5,117	> 200000
$> 10^{-5}$	0	10	не сходится	—
10^{-6}	0	10	7,00	7715
10^{-5}	-0,5	10	не сходится	—
$> 10^{-5}$	-0,5	10	не сходится	—
10^{-5}	0,5	1	5,117	> 200000
$> 10^{-5}$	0,5	1	не сходится	—
10^{-6}	0,5	1	5,117	> 200000
10^{-5}	0	1	не сходится	—
$> 10^{-5}$	0	1	не сходится	—
10^{-6}	0	1	5,117	> 200000
10^{-5}	-0,5	1	не сходится	—
$> 10^{-5}$	-0,5	1	не сходится	—

В таблице 1 приведены сравнительные результаты расчета рассматриваемой задачи Цермело предлагаемым методом неподвижных точек (МНТ) с методами из [4], которые в указанной работе условно обозначены цифрами от 1 до 8. В таблице указаны расчетные значения функционала Φ^* и количество N расчетных фазовых и сопряженных задач Коши.

В таблице 2 приведены результаты расчета алгоритмом МНТ при различных значениях проекционного параметра $\alpha > 0$ и начального допустимого приближения $\sigma^0 = (v^0, \omega^0) \in \Omega$.

Расчеты показали, что при $\alpha > 10^{-5}$ алгоритм не сходится, а при уменьшении α ниже значения 10^{-5} сходимость алгоритма существенно замедляется и соответственно возрастает количество расчетных задач Коши. Вычислительная эффективность алгоритма, оцениваемая количеством расчетных задач Коши, значительно зависит от выбора начального приближения.

На рис. 1 и 2 представлены расчетные оптимальные траектории фазовых переменных и расчетная оптимальная управляющая стратегия.

Проекционный метод неподвижных точек для расчета модельной задачи Цермело характеризуется сравнительно высокой вычислительной эффективностью, достаточно широкой областью

Рис. 1. Расчетная оптимальная траектория $x(t)$ Рис. 2. Расчетное оптимальное управление $u(t)$.

сходимости итерационного алгоритма по начальному приближению и простотой настройки проекционного параметра, определяющего скорость сходимости итерационного процесса.

Пример 2. Рассматривается задача оптимального быстрогодействия об ориентации летательного аппарата в пространстве, которая в [4] методом штрафных функционалов сведена к следующей задаче:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t), & x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t), & x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = -x_4(t) + u_1(t) \sin u_2(t), & x_3(0) = 0, \\ \dot{x}_4(t) = x_3(t) + u_1(t) \cos u_2(t), & x_4(0) = 0, \end{cases}$$

$$t \in [0, t_1], \quad 0 \leq u_1(t) \leq 1, \quad -\pi \leq u_2(t) \leq \pi, \quad u = (u_1, u_2),$$

$$G(u, t_1) = t_1 + 1000 \left(x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) + x_3^2(t_1) + x_4^2(t_1) \right) \rightarrow \min.$$

Заменой времени по правилу

$$t(\tau) = t_0 + (t_1 - t_0)\tau = \omega\tau, \quad t_0 = 0, \quad \tau \in [0, 1], \quad \omega = t_1 \geq 0,$$

$$v(\tau) = u(t(\tau)), \quad y(\tau) = x(t(\tau)), \quad \sigma = (v, \omega)$$

данная задача сводится к следующей нелинейной по управлению задаче с фиксированным временем и смешанными управляющими функциями и параметрами:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(\tau) = \omega y_3(\tau), & y_1(0) = 10, \\ \dot{y}_2(\tau) = \omega y_4(\tau), & y_2(0) = 0, \\ \dot{y}_3(\tau) = -\omega y_4(\tau) + \omega v_1(\tau) \sin v_2(\tau), & y_3(0) = 0, \\ \dot{y}_4(\tau) = \omega y_3(\tau) + \omega v_1(\tau) \cos v_2(\tau), & y_4(0) = 0, \end{cases}$$

$$\Phi(\sigma) = \omega + 1000 \left(y_1^2(1) + y_2^2(1) + y_3^2(1) + y_4^2(1) \right) \rightarrow \min,$$

$$T = [0, 1], \quad U = \{u = (u_1, u_2) : 0 \leq u_1 \leq 1, -\pi \leq u_2 \leq \pi\}, \quad W = \{\omega : \omega \geq 0\}.$$

Функция Понтрягина преобразованной задачи:

$$H(p, y, v, \omega, \tau) = \omega \left((p_1 + p_4)y_3 + (p_2 - p_3)y_4 + (p_3 \sin v_2 + p_4 \cos v_2)v_1 \right).$$

Ввиду линейности функции Понтрягина по переменной $y(\tau)$ модифицированная дифференциально-алгебраическая сопряженная система в соответствии с (10)–(13) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(\tau) = 0, & p_1(1) = -2000y_1(1) - q_1, \\ \dot{p}_2(\tau) = 0, & p_2(1) = -2000y_2(1) - q_2, \\ \dot{p}_3(\tau) = -\omega(p_1(\tau) + p_4(\tau)), & p_3(1) = -2000y_3(1) - q_3, \\ \dot{p}_4(\tau) = -\omega(p_2(\tau) - p_3(\tau)), & p_4(1) = -2000y_4(1) - q_4, \end{cases}$$

в которой величина $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} 1000(z_1^2(1) - y_1^2(1) + z_2^2(1) - y_2^2(1) + z_3^2(1) - y_3^2(1) + z_4^2(1) - y_4^2(1)) = \\ = (2000y_1(1) + q_1)(z_1(1) - y_1(1)) + (2000y_2(1) + q_2)(z_2(1) - y_2(1)) + \\ + (2000y_3(1) + q_3)(z_3(1) - y_3(1)) + (2000y_4(1) + q_4)(z_4(1) - y_4(1)). \end{aligned}$$

Выберем следующий способ однозначного разрешения $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$:

1. если $z_1(1) \neq y_1(1)$, то $q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0$,

$$\begin{aligned} q_1 = \frac{1000(z_1^2(1) - y_1^2(1) + z_2^2(1) - y_2^2(1) + z_3^2(1) - y_3^2(1) + z_4^2(1) - y_4^2(1))}{z_1(1) - y_1(1)} - \\ - \frac{2000y_2(1)(z_2(1) - y_2(1))}{z_1(1) - y_1(1)} - \frac{2000y_3(1)(z_3(1) - y_3(1))}{z_1(1) - y_1(1)} - \frac{2000y_4(1)(z_4(1) - y_4(1))}{z_1(1) - y_1(1)} - \\ - 2000y_1(1); \end{aligned}$$

2. если $z_1(1) = y_1(1)$, то

2.1. если $z_2(1) \neq y_2(1)$, то $q_1 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0$,

$$\begin{aligned} q_2 = \frac{1000(z_1^2(1) - y_1^2(1) + z_2^2(1) - y_2^2(1) + z_3^2(1) - y_3^2(1) + z_4^2(1) - y_4^2(1))}{z_2(1) - y_2(1)} - \\ - \frac{2000y_3(1)(z_3(1) - y_3(1))}{z_2(1) - y_2(1)} - \frac{2000y_4(1)(z_4(1) - y_4(1))}{z_2(1) - y_2(1)} - 2000y_2(1); \end{aligned}$$

2.2. если $z_2(1) = y_2(1)$, то

2.2.1. если $z_3(1) \neq y_3(1)$, то $q_1 = 0, q_2 = 0, q_4 = 0$,

$$\begin{aligned} q_3 = \frac{1000(z_1^2(1) - y_1^2(1) + z_2^2(1) - y_2^2(1) + z_3^2(1) - y_3^2(1) + z_4^2(1) - y_4^2(1))}{z_3(1) - y_3(1)} - \\ - \frac{2000y_4(1)(z_4(1) - y_4(1))}{z_3(1) - y_3(1)} - 2000y_3(1); \end{aligned}$$

2.2.2. если $z_3(1) = y_3(1)$, то

2.2.2.1. если $z_4(1) \neq y_4(1)$, то $q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0$,

$$\begin{aligned} q_4 = \frac{1000(z_1^2(1) - y_1^2(1) + z_2^2(1) - y_2^2(1) + z_3^2(1) - y_3^2(1) + z_4^2(1) - y_4^2(1))}{z_4(1) - y_4(1)} - \\ - 2000y_4(1); \end{aligned}$$

2.2.2.2. если $z_4(1) = y_4(1)$, то $q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0$.

Для допустимых управлений $\sigma \in \Omega$, $\sigma^I \in \Omega$ обозначим через $p(\tau, \sigma^I, \sigma)$, $\tau \in [0, 1]$, решение модифицированной сопряженной системы при $y(\tau) = y(\tau, \sigma^I)$, $z(\tau) = y(\tau, \sigma)$, $v(\tau) = v^I(\tau)$, $\omega = \omega^I$.

Система условий улучшения допустимого $\sigma^I \in \Omega$ при $\alpha > 0$ в форме задачи о неподвижной точке согласно (14)-(18) принимает следующий вид:

$$(v_1(\tau), v_2(\tau)) = P_U \left(v_1^I(\tau) + \alpha \left(\omega^I \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) \right) + s_1(\tau) \right), \right. \\ \left. v_2^I(\tau) + \alpha \left(\omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) - p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) \right) + s_2(\tau) \right) \right) \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\omega = P_W \left(\omega^I + \alpha \left(-1 + \int_T \left(\left(p_1(\tau, \sigma^I, \sigma) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \right) y_3(\tau, \sigma) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(p_2(\tau, \sigma^I, \sigma) - p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \right) y_4(\tau, \sigma) + v_1(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2(\tau) \right) \right) d\tau \right) \right),$$

в которой величина $s(\tau) = (s_1(\tau), s_2(\tau))$ определяется из алгебраического уравнения

$$\omega^I v_1(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2(\tau) \right) - \\ - \omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) \right) = \\ = \left(\omega^I \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) \right) + s_1(\tau) \right) (v_1(\tau) - v_1^I(\tau)) + \\ + \left(\omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) - p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) \right) + s_2(\tau) \right) (v_2(\tau) - v_2^I(\tau)).$$

Выберем следующий способ однозначного разрешения величины $s(\tau) = (s_1(\tau), s_2(\tau))$ из алгебраического уравнения:

1. если $v_1(\tau) \neq v_1^I(\tau)$, то $s_2(\tau) = 0$,

$$s_1(\tau) = \frac{\omega^I v_1(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2(\tau) \right)}{v_1(\tau) - v_1^I(\tau)} - \\ - \frac{\omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) \right)}{v_1(\tau) - v_1^I(\tau)} - \\ - \frac{\omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) - p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) \right) (v_2(\tau) - v_2^I(\tau))}{v_1(\tau) - v_1^I(\tau)} - \\ - \omega^I \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) \right);$$

2. если $v_1(\tau) = v_1^I(\tau)$, то

2.1. если $v_2(\tau) \neq v_2^I(\tau)$, то $s_1(\tau) = 0$,

$$s_2(\tau) = \frac{\omega^I v_1(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2(\tau) \right)}{v_2(\tau) - v_2^I(\tau)} - \\ - \frac{\omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) \right)}{v_2(\tau) - v_2^I(\tau)} - \\ - \omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma) \cos v_2^I(\tau) - p_4(\tau, \sigma^I, \sigma) \sin v_2^I(\tau) \right);$$

2.2. если $v_2(\tau) = v_2^I(\tau)$, то $s_1(\tau) = 0$, $s_2(\tau) = 0$.

Для решения указанной задачи о неподвижной точке применялся явный итерационный алгоритм простых итераций:

$$\begin{aligned} (v_1^{k+1}(\tau), v_2^{k+1}(\tau)) &= P_U \left(v_1^I(\tau) + \alpha \left(\omega^I \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \cos v_2^I(\tau) \right) + s_1^k(\tau) \right), \right. \\ &\quad \left. v_2^I(\tau) + \alpha \left(\omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \cos v_2^I(\tau) - p_4(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \sin v_2^I(\tau) \right) + s_2^k(\tau) \right) \right), \quad \tau \in [0, 1], \\ \omega^{k+1} &= P_W \left(\omega^I + \alpha \left(-1 + \int_T \left(\left(p_1(\tau, \sigma^I, \sigma^k) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \right) y_3(\tau, \sigma^k) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left(p_2(\tau, \sigma^I, \sigma^k) - p_3(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \right) y_4(\tau, \sigma^k) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + v_1^k(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \sin v_2^k(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \cos v_2^k(\tau) \right) \right) d\tau \right) \right), \end{aligned}$$

в котором величина $s^k(\tau) = (s_1^k(\tau), s_2^k(\tau))$ определяется из соответствующего алгебраического уравнения:

$$\begin{aligned} &\omega^I v_1^k(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \sin v_2^k(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \cos v_2^k(\tau) \right) - \\ &\quad - \omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \cos v_2^I(\tau) \right) = \\ &= \left(\omega^I \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \sin v_2^I(\tau) + p_4(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \cos v_2^I(\tau) \right) + s_1^k(\tau) \right) (v_1^k(\tau) - v_1^I(\tau)) + \\ &\quad + \left(\omega^I v_1^I(\tau) \left(p_3(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \cos v_2^I(\tau) - p_4(\tau, \sigma^I, \sigma^k) \sin v_2^I(\tau) \right) + s_2^k(\tau) \right) (v_2^k(\tau) - v_2^I(\tau)) \end{aligned}$$

аналогично указанному выше однозначному правилу для величины $s(\tau)$. Операция проектирования $P_U(z)$ на множество $U = \{u = (u_1, u_2) : 0 \leq u_1 \leq 1, -\pi \leq u_2 \leq \pi\}$ реализуется аналитически в виде простой условной формулы.

Если в процессе расчета задачи о неподвижной точке выполнялось условие первого улучшения управления $\sigma^I \in \Omega$:

$$\Phi(\sigma^{k+1}) + \varepsilon_1 < \Phi(\sigma^I),$$

где $\varepsilon_1 \geq 0$ — заданная точность улучшения управления, то строилась новая задача о неподвижной точке для улучшения полученного расчетного управления, и итерационный алгоритм повторялся.

Если улучшения в указанном смысле не происходит, то численный расчет задачи о неподвижной точке проводился до выполнения условия

$$\|\sigma^{k+1} - \sigma^k\|_{T_h} \leq \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_2 > 0$ — заданная точность расчета задачи о неподвижной точке. На этом построение и расчет последовательных задач улучшения управления заканчивался.

Для сравнения результатов расчета исходной задачи предлагаемым подходом неподвижных точек с методами, предложенными в [4], выбирались аналогичные условия расчета: $h = 10^{-2}$, $\varepsilon_1 = 10^{-7}$, $\varepsilon_2 = 10^{-10}$,

$$\|\sigma^{k+1} - \sigma^k\|_{T_h} = \max \left\{ |\omega^{k+1} - \omega^k|, |v^{k+1}(t) - v^k(t)|, t \in T_h \right\}.$$

В таблице 3 приводятся данные расчета модельной задачи разработанными в [4] многометодными итерационными технологиями, для которых в [4] не приводятся исходные начальные приближения для полного адекватного сопоставления рассматриваемых подходов с предлагаемым алгоритмом неподвижных точек.

В таблице 3 используется обозначение $\Delta\Phi^* = |\Phi^* - 10,285456|$, Φ^* — расчетное значение функционала, N — количество расчетных фазовых и сопряженных задач Коши.

Таблица 3

Метод	$\Delta\Phi^*$	N
1	$7,0 - 1$	100002
2	$7,1 - 1$	103191
3	$2,4 - 2$	100146
4	$5,3 + 1$	100069
5	$6,7 - 1$	100159
6	$6,8 + 2$	4978
7	$6,6 - 1$	100003
8	Не сходится	—

Таблица 4

ω^0	v_1^0	v_2^0	$\Delta\Phi^*$	N
1	1	1	не сходится	—
5	1	1	$1,4 - 1$	12181
10	1	1	$3,9 - 3$	11805
11	1	1	$7,0 - 1$	125925
15	1	1	4,7	137377
1	0,5	−1	$1,4 - 1$	12713
5	0,5	−1	$1,4 - 1$	12201
10	0,5	−1	$3,9 - 3$	11583
11	0,5	−1	$6,7 - 1$	206623
15	0,5	−1	4,5	400000
1	0,5	1	не сходится	—
5	0,5	1	$1,4 - 1$	12207
10	0,5	1	$5,1 - 3$	11117
11	0,5	1	$7,0 - 1$	177871
15	0,5	1	4,5	400000
1	0,5	0,5	не сходится	—
5	0,5	0,5	$1,4 - 1$	12183
10	0,5	0,5	$1,1 - 2$	8907
11	0,5	0,5	$6,5 - 1$	260473
15	0,5	0,5	4,5	400000
1	0,5	−0,5	$1,4 - 1$	12713
5	0,5	−0,5	$1,4 - 1$	12197
10	0,5	−0,5	$3,9 - 3$	11727
11	0,5	−0,5	$7,1 - 1$	87367
15	0,5	−0,5	4,5	400000

В таблице 4 приведены результаты расчета рассматриваемой задачи применяемым методом неподвижных точек при $\alpha = 10^{-6}$ и различных начальных приближениях. При $N \geq 400000$ расчет задачи останавливался.

Анализ расчетов предлагаемым алгоритмом неподвижных точек демонстрирует аналогичные первому модельному примеру закономерности зависимости сходимости алгоритма от проекционного параметра $\alpha > 0$ и начальных приближений.

Проведенные вычислительные эксперименты на модельных задачах быстродействия демонстрируют приемлемую для практики вычислительную и качественную эффективность предлагаемого подхода неподвижных точек в сравнении с известными методами (см. [4]). Разработанный нелокальный подход к поиску приближенно оптимальных решений обладает достаточно широкой областью сходимости по начальному приближению и характеризуется удобством и простотой экспериментальной настройки скалярного проекционного параметра, регулирующего качество и скорость сходимости рассматриваемого итерационного процесса. Получаемые с помощью предлагаемого подхода приближенно оптимальные решения задач оптимального быстродействия могут

рассматриваться в качестве приемлемых начальных приближений для дальнейшего итерационного уточнения другими методами.

4. Заключение. Разработанные алгоритмы неподвижных точек для поиска экстремальных управлений не гарантируют релаксацию по целевому функционалу в отличие от градиентных методов, но компенсируют это свойство нелокальностью последовательных приближений управления, обусловленной фиксированностью параметра проектирования; отсутствием операции варьирования управления в окрестности текущего приближения. Построенные алгоритмы неподвижных точек для улучшения управления в рассматриваемом классе оптимизационных задач обладают свойством нелокальности и отсутствием процедуры варьирования улучшающего управления в достаточно малой окрестности улучшаемого управления, характерной для стандартных градиентных методов, а также возможностью строгого улучшения неоптимальных экстремальных управлений. Указанная возможность появляется в случае неединственности решения задачи о неподвижной точке. Градиентные методы такой возможностью не обладают.

В целом оптимизация управлений на основе расчета конструируемых задач о неподвижной точке предлагаемыми итерационными методами последовательных приближений сводится к чередующемуся решению задач Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Указанные свойства предлагаемых методов неподвижных точек являются важными факторами повышения вычислительной и качественной эффективности решения задач оптимального управления и определяют перспективное направление развития методов оптимизации нелинейных динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. ун-та, 2008.
2. Булдаев А. С. Методы неподвижных точек в задачах оптимального управления. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. ун-та, 2016.
3. Булдаев А. С. Методы неподвижных точек на основе операций проектирования в задачах оптимизации управляющих функций и параметров динамических систем // Вестн. Бурят. ун-та. Мат. Информ. — 2017. — № 1. — С. 38–54.
4. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. — Новосибирск: Наука, 2009.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
7. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.

Булдаев Александр Сергеевич

Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова, Улан-Удэ

E-mail: buldaev@mail.ru