Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Блимман, Д. Кардона-Сальгадо, И. Дюмон, О. О. Васильева, Оптимальное управление в реализации методов стерильных насекомых, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, том 183, 35–51

DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-183-35-51>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:20:21

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 183 (2020). С. 35–51
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-35-51

УДК 517.97

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ СТЕРИЛЬНЫХ НАСЕКОМЫХ

© 2020 г. П. А. БЛИМАН, Д. КАРДОНА-САЛЬГАДО, И. ДЮМОН, О. ВАСИЛЬЕВА

Аннотация. Борьба с переносчиками заболеваний или вредителями имеет важное значение для снижения риска трансмиссивных болезней или потерь урожая. Среди доступных средств биологической борьбы метод стерильных насекомых (МСН) является одним из самых многообещающих. Для того чтобы добиться желаемых результатов, применение этого метода должно быть тщательно спланировано заранее. В статье обсуждаются программы управления МСН, которые позволяют избежать мониторинга дикой популяции в реальном времени и требуют массового выращивания минимального общего числа стерильных насекомых, требуемого для локального уничтожения дикой популяции в кратчайшее время. При помощи методов теории оптимального управления сначала строятся программы непрерывного выпуска, а затем разрабатываются более практичные программы управления МСН, состоящие из периодических импульсных выпусков.

Ключевые слова: борьба с вредителями, векторное управление, метод стерильных насекомых, оптимальное управление, периодическое импульсное управление, управление без обратной связи.

OPTIMAL CONTROL APPROACH FOR IMPLEMENTATION OF STERILE INSECT TECHNIQUES

© 2020 P.-A. BLIMAN, D. CARDONA-SALGADO, Y. DUMONT, O. VASILIEVA

ABSTRACT. The vector or pest control is essential to reduce the risk of vector-borne diseases or crop losses. Among the available biological control tools, the sterile insect technique (SIT) is one of the most promising. However, SIT-control campaigns must be carefully planned in advance in order to render desirable outcomes. In this paper, we design SIT-control intervention programs that can avoid the real-time monitoring of the wild population and require to mass-rear a minimal overall number of sterile insects, in order to induce a local elimination of the wild population in the shortest time. Continuous-time release programs are obtained by applying an optimal control approach, and then laying the groundwork of more practical SIT-control programs consisting of periodic impulsive releases.

Keywords and phrases: pest control, vector control, sterile insect technique, optimal control, periodic impulsive control, open-loop control.

AMS Subject Classification: 92D25, 49K15, 93C15, 34A37

1. Введение. Наличие и численность видов комаров тесно коррелируют с прогрессирующим распространением и устойчивостью различных трансмиссивных болезней среди населения и, таким образом, представляют собой серьезную проблему для органов здравоохранения многих стран. В отсутствие эффективной вакцины против малярии (передается видами комаров

Исследование выполнено при поддержке Colciencias and ECOS-Nord Program (Colombia: Project CI-71089; France: Project C17M01). Работа Д. Кардона-Сальгадо и О. Васильевой была поддержана программой межведомственного сотрудничества MathAmsud (18-MATH-05, MOVECO project). Работа И. Дюмона выполнена при поддержке проекта GEMDOTIS при участии ECOPHYTO 2018 (Action 27), а также гранта № 82770 DST/NRF SARChI кафедры математических моделей и методов в биологических науках и биоинженерии Университета Претории.

Anopheles), энцефалита и вируса Западного Нила (передается видами *Culex*), а также лихорадки денге, вирусов Чикунгунья и Зика (распространяются *Aedes*), борьба с этими инфекционными заболеваниями в первую очередь сосредоточена на подавлении местных популяций комаров с помощью химических веществ (ларвицидов, инсектицидов).

Из-за негативного воздействия химических веществ на нецелевые виды и на окружающую среду и обнаруженной устойчивости комаров к инсектицидам и ларвицидам были предложены и оценены другие методы. Одним из них является так называемый метод стерильных насекомых (МСН), который основан на массовом выпуске самцов насекомых, стерилизованных ионизирующим излучением или с использованием несовместимых штаммов симбионта *Wolbachia*. После спаривания со стерилизованными самцами или самцами, несущими *Wolbachia*, самки комаров должным образом откладывают яйца, из которых не вылупляются личинки, что вызывает прогрессирующее подавление целевой дикой популяции (подробное описание метода и его приложений см. в [5]).

Точно так же вредители, такие как плодовые мухи, несут ответственность за значительные потери урожая во всем мире. Например, в Южной Африке примерно в 2010 г. был обнаружен высокоинвазивный вид *Bactrocera dorsalis* (см. [13]). Впервые наблюдения были проведены на острове Реюньон в 2017 г., а также впервые в Европе, на юге Италии, в 2018 г. К сожалению, для борьбы с таким вредителем, кроме инсектицидов, имеется очень мало средств.

Применение МСН было многократно смоделировано и изучено теоретически и численно в большом количестве работ с использованием временных и пространственно-временных моделей с дискретными, непрерывными и гибридными шкалами времени; рассматривались как модели без обратной связи, так и модели, включающие обратную связь (см., например, [1, 2, 4, 9, 11, 18] и приведенную в этих работах библиографию). Однако предлагаемые программы применения МСН требовали либо обильных выпусков насекомых в течение значительного времени, либо мониторинга текущей численности диких популяций для достижения ликвидации в конечном итоге. Некоторые ученые применили подход динамической оптимизации, стремясь минимизировать общее количество стерильных насекомых, которые будут выпущены во время кампании, при предположении определенной фиксированной продолжительности контрольного вмешательства (см. [6, 14]).

Статья посвящена разработке оптимальной программы в рамках МСН. Основная цель МСН-кампаний — уничтожение или резкое сокращение числа диких насекомых в пределах некоторой целевой местности за конечное время. Другие (второстепенные) цели связаны с сокращением основных затрат на вмешательство по МСН-контролю, которые обычно выражаются такими ключевыми показателями, как общая продолжительность кампании МСН-контроля, количество требуемых выпусков и количество стерилизованных самцов для выпуска. Некоторые программы МСН-контроля требуют периодической оценки численности диких популяций для определения объема последующих выпусков. Такие измерения представляют собой дополнительные расходы на программы МСН-control и должны приниматься во внимание. Следовательно, важно определить наилучший компромисс между различными второстепенными целями и разработать программу управления МСН, которая требует более низких общих затрат. Другими словами, мы стремимся разработать программы контрольных вмешательств, которые требуют не только умеренных усилий по контролю (выражаемых через общее число выпускаемых стерильных насекомых), но также индуцируют локальное уничтожение диких насекомых в разумные сроки и без привлечения оценок численности дикой популяции в реальном времени.

Для этого мы используем энтомологическую модель, изначально предложенную и тщательно проанализированную в [2] (ее ключевые особенности приведены в разделе 2), а затем формулируем задачу оптимального управления со свободным конечным временем и многокритериальным целевым функционалом (раздел 3). При помощи традиционной техники (см. [10]) эта задача сводится к системе оптимального управления для программ выпуска в непрерывном времени с условием оптимальности по времени, которая решается численно. Кроме того, мы принимаем программы оптимального выпуска с непрерывным временем для практической реализации и

предлагаем «почти оптимальные» (далее используем термин *субоптимальные*) программы МСН-контроля, состоящие из периодических импульсных выпусков стерильных насекомых. Для численного моделирования мы рассматриваем случай популяции комаров *Aedes spp* (см. [2]). Представлены результаты всех численных расчетов; в обсуждении подчеркивается производительность программ субоптимального выпуска с чисто разомкнутым циклом, а также проводится их сравнение со смешанными программами импульсного выпуска с открытым/замкнутым циклом (см. [2]). В разделах 4 и 5 приведены некоторые заключительные замечания и выводы.

2. Структурированная по полу энтомологическая модель с участием бесплодных самцов. Пусть $M(t)$ и $F(t)$ — текущие численности популяций самцов и самок, присутствующих в некоторой целевой местности в момент $t \geq 0$. Без ограничения общности будем предполагать, что время измеряется в днях. Предположим, что в этой местности выпускаются стерильные самцы с ежедневной интенсивностью $u(t) \geq 0$; обозначим их численность через $M_S(t)$ при каждом $t \geq 0$. Интенсивность выпуска может быть смоделирована кусочно непрерывной функцией $u(\cdot) \in PC$, определенной для всех $t \geq 0$. Эта функция представляет переменную решения или управления и выражает количество стерильных самцов M_S , выпущенных в день t в целевой местности. Другими словами, $u(t)$, $t \geq 0$, определяет внешнее управляющее воздействие на естественную динамику популяций диких субпопуляций M и F .

Используя структуру моделирования, предложенную в [2], будем описывать популяционную динамику диких насекомых (M и F) и их взаимодействие со стерильными самцами (M_S) следующей трехмерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{M} = r\rho \frac{FM}{M + \gamma M_S} e^{-\beta(M+F)} - \mu_M M, & M(0) = M^0 > 0, \\ \dot{F} = (1-r)\rho \frac{FM}{M + \gamma M_S} e^{-\beta(M+F)} - \mu_F F, & F(0) = F^0 > 0, \\ \dot{M}_S = u(t) - \mu_S M_S, & M_S(0) = M_S^0 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1a) \\ (1b) \\ (1c) \end{matrix}$$

Все параметры модели (1) положительны, их подробные описания приведены в таблице 1. Модель предполагает, что все самки F одинаково способны к спариванию, будь то дикие самцы M или стерильные самцы M_S . Однако жизнеспособное потомство дикие самки производят только после их успешного спаривания с дикими самцами. Следовательно, скорость пополнения диких насекомых (см. положительные члены в уравнениях (1a) и (1b)) зависит от вероятности $M/(M + \gamma M_S)$ эффективных контактов (или успешных спариваний) между дикими самцами и самками. Отметим, что стерилизация массово выращиваемых самцов комаров может повлиять на их брачную конкурентоспособность (см. [15]), и последняя выражается в модели коэффициентом $0 < \gamma \leq 1$, обозначающим относительную спариваемость, продуктивность или репродуктивную способность стерилизованных самцов (по сравнению с дикими).

Уравнения (1a) и (1b) утверждают, что среди новых особей появляются как самцы, так и самки в соответствии с основным соотношением полов $r \div (1-r)$, $r \in (0, 1)$, у жизнеспособных потомков, доживающих до взрослого состояния. Здесь ρ обозначает среднее количество яиц, откладываемых одной самкой в среднем за день, в то время как прямой и/или косвенный эффект конкуренции на разных стадиях (личинки, куколки, взрослые особи) учитывается через параметр β . Таким образом, более низкие значения β означают, что большая часть яиц может развиваться до взрослого насекомого, тогда как более высокие значения выражают более сильную конкуренцию и меньшее количество мест размножения.

Параметры μ_M , μ_F и μ_S в (1) представляют, соответственно, естественную (зависящую от пола) смертность диких самцов, диких самок и стерильных самцов. Научные данные подтверждают, что средняя продолжительность жизни самок при спаривании выше, чем у самцов (см. [12]), тогда как стерилизация самцов может сократить их среднюю продолжительность жизни (см. [15]). Поэтому на протяжении всей статьи мы предполагаем, что

$$\mu_S \geq \mu_M \geq \mu_F. \quad (2)$$

Таблица 1. Параметры модели (1) для вида *Aedes spp* (значения взяты из [2])

Параметр	Описание	Единица	Значение
r	Первичное соотношение полов	—	0.5
ρ	Среднее количество яиц, откладываемых самкой в день	день ⁻¹	4.55
β	Характеристика эффекта конкуренции на особь	—	3.57×10^{-4}
γ	Эффективность спаривания стерильных самцов	—	1
μ_M	Естественная смертность самцов	день ⁻¹	0.04
μ_F	Естественная смертность самок	день ⁻¹	0.03
μ_S	Естественная смертность стерильных самцов	день ⁻¹	0.04

Наконец, уравнение (1с) устанавливает, что утверждает, что стерильные самцы M_S высвобождаются «экзогенно» с зависящей от времени мгновенной скоростью $u(t)$. Предположим, что $u : \mathbb{R}_+ \mapsto [0, u_{\max}]$ — кусочно непрерывная функция, а $u_{\max} > 0$ — максимальная численность выпуска. При известной функции $u(t)$ уравнение (1с) можно решить в явном виде:

$$M_S(t; u(\cdot)) = e^{-\mu_S t} \left[M_S^0 + \int_0^t e^{\mu_S \xi} u(\xi) d\xi \right]. \quad (3)$$

Согласно (3), функция $M_S(t; u(\cdot))$ остается неотрицательной и ограниченной сверху, если функция $u(t)$ неотрицательна и ограниченной сверху. Кроме того, правые части уравнений (1а)–(1б) убывают по переменной $M_S(t)$. С другой стороны, в [2] было показано, что в отсутствие стерильных самцов (т.е. при $M_S(t) = 0$) энтомологическая модель (1а)–(1б) имеет ограниченные траектории, принадлежащие *поглощающему* множеству

$$\mathcal{D} = \left\{ (M(t), F(t)) : 0 \leq M(t) \leq C, 0 \leq F(t) \leq C \forall t \geq 0 \right\} \quad (4)$$

при некотором $C > 0$.

Поскольку правые части динамической системы в (1) липшиц-непрерывны, начальная задача (1) имеет единственное решение при любой кусочно непрерывной и ограниченной функции $u(t) \in [0, u_{\max}]$, $t \geq 0$.

В контексте этой модели верхняя граница $u(t)$, выраженная максимальной численностью выпуска $u_{\max}$, играет существенную роль, и ее значение должно определяться в соответствии с параметрами модели, представленными в таблице 1. Недавние исследования (см. [2]) объясняют принципы выбора величины $u_{\max}$.

В частности, случай $u(t) = \Lambda$, $\Lambda = \text{const} > 0$, был тщательно проанализирован в [2]. В этом случае уравнение (1с) полностью отделяется от системы (1), и стационарное значение $M_S^\# = \Lambda / \mu_S$ можно подставить в (1а)–(1б). Таким образом, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{M} = r\rho \frac{FM}{M + \gamma M_S^\#} e^{-\beta(M+F)} - \mu_M M, \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} \dot{F} = (1-r)\rho \frac{FM}{M + \gamma M_S^\#} e^{-\beta(M+F)} - \mu_F F \end{cases} \quad (5b)$$

для естественно устойчивых диких популяций. Напомним, что популяции вредителей или комаров называются *естественно устойчивыми*, когда одна особь (самец или самка) производит в среднем более одной особи. В [2]) были введены две положительные константы N_F и N_F , представляющие собой так называемые *основные числа потомков*, относящиеся к диким самкам и самцам соответственно. В дальнейшем будем иметь дело с естественно устойчивыми популяциями насекомых. Таким образом, будем предполагать, что параметры модели, определенные

в таблице 1, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$N_F := \frac{(1-r)\rho}{\mu_F} > 1, \quad N_M := \frac{r\rho}{\mu_M} > 1. \quad (6)$$

Для приведенной системы (5) в [2] были получены следующие фундаментальные результаты.

Теорема 1 (наличие положительных равновесий для приведенной системы МСН (5); см. [2]). *Предположим, что $N_F > 1$. Тогда существует такое $\Lambda^{\kappa p} > 0$, что система (5)*

- (i) *имеет два различных положительных равновесных состояния, если $0 < \Lambda < \Lambda^{\kappa p}$;*
- (ii) *имеет одно положительное равновесное состояние, если $\Lambda = \Lambda^{\kappa p}$;*
- (iii) *не имеет положительных равновесных состояний, если $\Lambda > \Lambda^{\kappa p}$.*

Значение $\Lambda^{\kappa p}$ однозначно определяется формулой

$$\Lambda^{\kappa p} := 2 \frac{\mu_S}{\beta\gamma} \frac{\phi^{\kappa p}(N_F)}{1 + N_F/N_M}, \quad (7)$$

где $\phi^{\kappa p} := \phi^{\kappa p}(N_F)$ — единственное положительное решение трансцендентного уравнения

$$1 + \phi \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\phi}} \right) = N_F \exp \left[-\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2/\phi}} \right]. \quad (8)$$

Теорема 2 (устойчивость равновесия без насекомых, см. [2]). *Если приведенная система (5) не имеет положительных состояний равновесия (т.е. если $\Lambda > \Lambda^{\kappa p}$), то тривиальное равновесие $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ системы (5) глобально экспоненциально устойчиво.*

Формальные доказательства теорем 1 и 2 приведены в [2]. Эти теоремы вместе дают пороговое значение $\Lambda_{\text{кр}} > 0$ такой постоянной скорости выпуска, что для всех *постоянных* скоростей выпуска $u(t) = \Lambda > \Lambda_{\text{кр}}$, $t \geq 0$, траектории МСН-системы (1), порожденные произвольным неотрицательным множеством начальных условий (M^0, F^0, M_S^0) , сходятся глобально экспоненциально к единственному равновесному состоянию $E_0^\# = (0, 0, M_S^\#)$ без диких насекомых, и это в конечном итоге обеспечивает возможное уничтожение дикой популяции. Следовательно, разумно взять u_{max} больше, чем $\Lambda_{\text{кр}}$.

В следующем разделе мы применим подходы динамической оптимизации для разработки зависящей от времени программы выпуска стерильных самцов, при которой локальное уничтожение дикой популяции может быть достигнуто за минимальное время. Такая программа характеризуется формой кусочно непрерывной функции $u(t)$, которая выражает для каждого t мгновенную скорость выпуска стерильных самцов.

3. Подход, основанный на оптимальном управлении. Наша основная цель — определить зависящую от времени скорость выпуска $u^*(t)$, которая обеспечивает локальное уничтожение дикой популяции за минимальное время $T^* \in (0, \infty)$ при минимальном общем количестве стерильных самцов, которые будут выпущены в целевой местности в течение всей кампании, т.е. в течение периода $[0, T^*]$.

Предположим, что конечное время управляющего воздействия $0 < T < \infty$ установлено свободным, а затем определим несколько целей принятия решения:

- (i) достижение уничтожения дикой популяции за конечное время;
- (ii) минимизация общего времени управляющего воздействия;
- (iii) минимизация основных затрат на управляющее воздействие.

Первую цель можно формализовать, наложив следующее условие конечной точки:

$$F(T) = \varepsilon, \quad (9)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0^+$ определяется лицом, принимающим решение. Строго говоря, условие конечной точки (9) должно иметь вид $F(T^*) = 0$. Однако поскольку уравнения состояния (1a)-(1b) имеют экспоненциальный характер, траектория $F(t)$ может приближаться к нулю только асимптотически

при $t \rightarrow \infty$, но не может достичь этого значения за конечное время. Следовательно, процесс уничтожения диких самок при некотором конечном $0 < T < \infty$ можно моделировать с помощью (9) лишь с некоторым достаточно малым $\varepsilon > 0$. Уничтожение диких самок неизбежно влечет за собой уничтожение диких самцов насекомых, поскольку дикие самцы являются потомками диких самок. Следовательно, условие (9) гарантирует уничтожение всей дикой популяции (самцов и самок).

Минимизация времени (вторая цель) стандартным образом выражается тождеством

$$T = \int_0^T dt,$$

в то время как затраты, связанные с определенной программой выпуска $u(t)$, $t \in [0, T]$ (третья цель), передаются через совокупное число стерильных самцов (CNSM), выпущенных в течение всей кампании, которое выражается формулой

$$\text{CNSM}(u) = \int_0^T u(t) dt. \quad (10)$$

Таким образом, вышеупомянутые три цели могут быть в целом выражены следующим показателем эффективности (или целевым функционалом):

$$\mathcal{J}(u, T) = A_1 \left(F(T) - \varepsilon \right)^2 + \int_0^T \left[A_2 F(t) + A_3 + \frac{1}{2} A_4 u^2(t) \right] dt. \quad (11)$$

Неотрицательные коэффициенты A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, в (11) должны быть правильно выбраны, чтобы отражать желаемые приоритеты принятия решений. Именно, A_1 определяет наивысший приоритет цели «уничтожение популяции за конечное время», являясь штрафом за нарушение условия конечной точки (9), и поэтому предполагаем, что $A_1 \gg A_i$, $i = 2, 3, 4$. Коэффициент A_2 характеризует важность цели «интенсивность уничтожения диких самок» $F(t)$ во время кампании по выпуску, A_3 выражает оценку времени T и A_4 относится к затратам на кампанию (т.е. массовое выращивание стерильных самцов).

Стоит отметить, что мы не предполагаем линейной зависимости между охватом контрольных вмешательств и соответствующими затратами. Однако мы предполагаем, что *предельная* стоимость управляющего воздействия, т.е. $A_4 u(t)$, пропорциональна управлению в каждый момент времени $t \in [0, T]$, выражаемому, в свою очередь, количеством стерильных самцов, выпускаемых в каждый момент t . По этой причине подынтегральное выражение в (11) считается квадратичным по отношению к управляющей переменной u . При таком предположении «прямые» затраты на определенную программу выпуска $u(t)$, $t \in [0, T]$, выражаются величиной $A_4 \cdot \text{CNSM}(u)$, где $\text{CNSM}(u)$ задано формулой (10), в то время как «непрямые» затраты можно оценить по длительности T МСН-программы. Такое предположение не слишком реалистично, но на данном этапе является наиболее удобным.

Наша цель — найти оптимальную программу выпуска стерильных самцов $u^*(t) \in [0, u_{\max}]$, $t \in [0, T^*]$, и минимальное время $T^* \in (0, \infty)$, которые совместно минимизируют целевой функционал (11) с учетом динамики дикой популяции, заданной формулой (1). Иными словами, требуется решить задачу оптимального управления

$$\min_{\substack{0 \leq u(t) \leq u_{\max} \\ 0 < T < \infty}} \mathcal{J}(u, T) = A_1 \left(F(T) - \varepsilon \right)^2 + \int_0^T \left[A_2 F(t) + A_3 + \frac{1}{2} A_4 u^2(t) \right] dt \quad (12a)$$

при условиях

$$\begin{cases} \dot{M} = r\rho \frac{FM}{M + \gamma M_S} e^{-\beta(M+F)} - \mu_M M, & M(0) = M^0 > 0, \end{cases} \quad (12b)$$

$$\begin{cases} \dot{F} = (1-r)\rho \frac{FM}{M + \gamma M_S} e^{-\beta(M+F)} - \mu_F F, & F(0) = F^0 > 0, \end{cases} \quad (12c)$$

$$\begin{cases} \dot{M}_S = u(t) - \mu_S M_S, & M_S(0) = M_S^0 \geq 0, \end{cases} \quad (12d)$$

где

$$u(\cdot) \in PC, \quad 0 \leq u(t) \leq u_{\max} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (12e)$$

Существование решения задачи оптимального управления (12) обосновывается следующим результатом.

Теорема 3. *Предположим, что $N_F > 1$ и $u_{\max} > \Lambda_{кр}$. Тогда задача оптимального управления (12) имеет такое решение (u^*, T^*) , что*

$$\min_{\substack{0 \leq u(t) \leq u_{\max} \\ 0 < T < \infty}} \mathcal{J}(u, T) = \mathcal{J}(u^*, T^*).$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы используем классический подход, основанный на теореме существования Филиппова—Чезари, подробно изложенной в [7, 17]. Грубо говоря, мы должны показать, что задача оптимального управления (12) удовлетворяет следующим достаточным условиям существования оптимального решения:

- (i) решение $\mathbf{X}(t) := (M(t), F(t), M_S(t))'$ динамической системы (12b)–(12d) корректно определено и единственно для каждого допустимого $u(t) \in [0, u_{\max}]$, $t \geq 0$, причем множество всех $\mathbf{X}(t)$ непусто и ограничено для всех $u(t) \in [0, u_{\max}]$ и всех $t \geq 0$;
- (ii) множества всех начальных и терминальных состояний $\mathbf{X}(0) = (M(0), F(0), M_S(0))$ и $\mathbf{X}(T) = (M(T^*), F(T^*), M_S(T^*))$ замкнуты и ограничены в $\mathbb{R}_+^3$;
- (iii) множество управлений $[0, u_{\max}]$ замкнуто, ограничено и выпукло в $\mathbb{R}$;
- (iv) правые части динамической системы (12b)–(12d) линейны по управляющей переменной u ;
- (v) функция терминального состояния $\phi(\mathbf{X}) := A_1(F - \varepsilon)^2$ непрерывна;
- (vi) подинтегральная функция в (12a) выпукла по u и удовлетворяет условию коэрцитивности

$$A_2 F(t) + A_3 + \frac{1}{2} A_4 u_1^2(t) \geq \mathcal{K}_1 \|u\|^\alpha - \mathcal{K}_2,$$

где $\mathcal{K}_1 > 0$, $\alpha > 1$ и $\mathcal{K}_2$ — некоторые константы.

Условия (i)–(ii) были подтверждены в разделе 2, где мы установили, что динамическая система (12b)–(12d) имеет единственное решение для любого $u(t) \in [0, u_{\max}]$, существующее при всех $t \geq 0$. Кроме того, траектории $M(t)$, $F(t)$ и $M_S(t)$ остаются ограниченными для всех $t \geq 0$, поскольку они принадлежат компактному поглощающему множеству

$$\mathcal{Z} := \left\{ (M(t), F(t)) \in \mathcal{D}, \quad 0 \leq M_S(t) \leq \frac{u_{\max}}{\mu_S} \quad \forall t \geq 0 \right\},$$

порожденному начальными данными $(M(0), F(0), M_S(0)) \in \mathcal{Z}$. В определении множества $\mathcal{Z}$, приведенном выше, символом $\mathcal{D}$ обозначено множество (4).

Справедливость условий (iii)–(v) очевидно, в то время как условие (vi) выполнено при $\mathcal{K}_1 = A_4/2$, $\alpha = 2$ и $\mathcal{K}_2 = 0$ при всех $t \geq 0$. Доказательство завершено. $\square$

Формальное решение задачи оптимального управления (12) может быть получено применением принципа максимума Понтрягина — необходимого условия оптимальности для пары (u^*, T^*) , которая существует в силу теоремы 3. В частности, нас интересует вариант принципа максимума, применимый к задачам оптимального управления со свободным конечным временем (см. [10]). Функция Гамильтона

$$H(M, F, M_S, u, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \mathcal{Z} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

связанная с задачей оптимального управления (12), определяется следующим образом:

$$H(\mathbf{X}, u, \boldsymbol{\lambda}) = -A_2 F - A_3 - \frac{1}{2} A_4 u^2 + \lambda_1 \left[r \rho \frac{FM}{M + \gamma M_S} e^{-\beta(M+F)} - \mu_M M \right] \\ + \lambda_2 \left[(1-r) \rho \frac{FM}{M + \gamma M_S} e^{-\beta(M+F)} - \mu_M M \right] + \lambda_3 [u(t) - \mu_S M_S], \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)'$ можно рассматривать как вектор множителей Лагранжа, связанный с дифференциальными ограничениями (12b)–(12d). С другой стороны, $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, представляют собой изменяющиеся во времени вещественные сопряженные функции, которые выражают предельные изменения значения целевого функционала $\mathcal{J}(u, T)$, вызванные изменениями текущих значений переменных состояния $(M(t), F(t), M_S(t))$ (в покомпонентном смысле). Таким образом, текущие значения $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, отражают дополнительные выгоды или затраты, связанные с изменениями в $(M(t), F(t), M_S(t))$, и они являются необходимыми элементами принципа максимума Понтрягина, который формулируется следующим образом (см. [10]).

Пусть (u^*, T^*) — оптимальная пара для задачи (12) в том смысле, что $u^*(t)$ — кусочно непрерывная вещественнозначная функция с областью определения $[0, T^*]$ и множеством значений $[0, u_{\max}]$ и $\mathcal{J}(u^*, T^*) \leq \mathcal{J}(u, T)$ для всех других управлений u и значений времени T . Пусть $\mathbf{X}^*(t) = (M^*(t), F^*(t), M_S^*(t))'$ — соответствующее состояние, определенное для всех $t \in [0, T^*]$. Тогда существует кусочно дифференцируемая сопряженная функция $\boldsymbol{\lambda} : [0, T^*] \mapsto \mathbb{R}^3$, удовлетворяющая сопряженному дифференциальному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^*, u^*, \boldsymbol{\lambda}) \quad (14)$$

и условиям трансверсальности

$$\lambda_1(T^*) = 0, \quad \lambda_2(T^*) = -\phi_{\mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(T^*)} = -2A_1(F^*(T^*) - \varepsilon), \quad \lambda_3(T^*) = 0, \quad (15)$$

причем $0 < T^* < \infty$ удовлетворяет условию оптимальности по времени

$$H(\mathbf{X}^*(T^*), u^*(T^*), \boldsymbol{\lambda}(T^*)) = 0. \quad (16)$$

Кроме того, гамильтониан (13) имеет критическую точку (точку максимума) $u = u^*$: легко проверить, что $H_{uu} = -A_4 < 0$ при всех u . Следовательно,

$$H(\mathbf{X}^*(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \geq H(\mathbf{X}^*(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \quad (17)$$

для всех $u(t) : [0, T^*] \mapsto [0, u_{\max}]$ и почти всех $t \in [0, T^*]$.

Согласно [10], условие (17) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} u^*(t) = 0, & \text{если } H_u < 0, \\ 0 < u^*(t) < u_{\max}, & \text{если } H_u = 0, \\ u^*(t) = u_{\max}, & \text{если } H_u > 0; \end{cases} \quad (18)$$

это приводит к более компактной форме $u^*(t)$, также известной как *характеристика* оптимального управления:

$$u^*(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{1}{A_4} \cdot \lambda_3(t), u_{\max} \right\} \right\}. \quad (19)$$

Стоит отметить, что условия оптимальности (18) довольно значимы и дают интересную информацию о преимуществах и стоимости управляемых выпусков. Именно, из условия

$$H_u = -A_4 u + \lambda_3 = 0$$

следует, что при оптимальной программе выпуска u^* и при каждом t предельные затраты на управляемый выпуск (определяемые членом $A_4 u$) должны быть равны его предельной выгоде (выраженной членом λ_3). Если предельные издержки u^* выше, чем предельная выгода (т.е. $H_u < 0$ в (18)), то оптимальным решением будет вообще не реализовывать эту программу, и, следовательно, мы полагаем $u^*(t) = 0$. С другой стороны, если предельные издержки u^* ниже,

чем предельная выгода (т.е. $H_u > 0$ в (18)), то оптимальным решением будет использовать все доступные ресурсы, поэтому мы полагаем $u^*(t) = u_{\max}$.

Используя характеристику величины u^* , данную в (19), можем свести исходную задачу оптимального управления (12) к двухточечной краевой задаче. Эта краевая задача (также известная как *система оптимальности*) состоит из шести дифференциальных уравнений с шестью граничными условиями:

- (i) три исходных уравнения с базовыми начальными условиями (12b)–(12d), где $u(t)$ заменяется его характеристикой (19);
- (ii) три сопряженных уравнения (14) с условиями трансверсальности (15), где $u(t)$ также заменяется его характеристикой (19).

Оптимальное время $0 < T^* < \infty$ определяется условием оптимальности по времени (16).

Из-за нелинейности, сложности и большой размерности описанной выше системы оптимальности ее можно решить только численно, и следующий раздел полностью посвящен этой проблеме, с особым вниманием к параметрам *Aedes spp*, приведенным в таблице 1.

4. Результаты численного моделирования.

4.1. Предварительные сведения. Проведенное численное моделирование было сосредоточено на «наихудшем сценарии», т.е. на предположении, что дикие комары имеют равновесную плотность в начале МСН-кампании ($t = 0$), в то время как стерильные самцы в целевой местности отсутствуют ($M_S(0) = 0$). В [2] был сделан вывод, что положительное установившееся состояние $E^\# = (M^\#, F^\#)$ системы (1) (или (5)), учитывающей половую структуру популяции, с $M_S(t) \equiv 0$ имеет координаты

$$M^\# := \frac{N_M}{N_F + N_M} \frac{1}{\beta} \ln N_F, \quad F^\# := \frac{N_F}{N_F + N_M} \frac{1}{\beta} \ln N_F, \quad (20)$$

где базовые числа потомков N_F и N_M удовлетворяют соотношениям (6). Таким образом, начальные условия для динамической системы (12b)–(12d) определены следующим образом: $M(0) = M^\#$, $F(0) = F^\#$ и $M_S(0) = 0$.

Для значений параметров, указанных в последнем столбце таблицы 1, имеем $N_F \approx 75.83$, $N_M \approx 56.87$, в то время как плотности численности комаров в равновесии $E^\# = (M^\#, F^\#)$ равны $M^\# \approx 5.19 \times 10^3$ and $F^\# \approx 6.93 \times 10^3$ особей на гектар (шт/га).

Мы предполагаем, что уничтожение дикой популяции достигается, когда условие конечной точки (9) выполняется с $\varepsilon = 10^{-1}$, что означает, что в целевом районе не осталось самок комаров ($F^*(T^*) < 1$).

Значение $u_{\max}$ должно быть больше, чем $\Lambda_{\text{кр}} \approx 1.29 \times 10^3$ (см. теоремы 1 и 2 в разделе 2). С одной стороны, величина $u_{\max}$ не должна быть слишком большой, чтобы избежать больших выпусков и поддерживать общую стоимость МСН-кампании на приемлемом уровне. С другой стороны, величина $u_{\max}$ должны быть достаточно большой, чтобы способствовать более быстрой ликвидации дикой популяции. Следовательно, во всех последующих моделях мы выберем значение $u_{\max} = 2.5 \times 10^3$ как максимальный объем выпуска. Этот выбор также связан с производственной мощностью лаборатории по производству стерильных насекомых, и правильное значение $u_{\max}$ должно быть определено практикующими энтомологами.

Коэффициенты A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, в (12a) должны учитывать масштаб всех величин, входящих в целевой функционал. В этом исследовании мы используем следующее масштабирование для A_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$A_1 = \frac{\mathcal{P}_1}{F^\#}, \quad A_2 := \frac{\mathcal{P}_2}{F^\#}, \quad A_3 = \frac{\mathcal{P}_3}{365}, \quad A_4 = \frac{\mathcal{P}_4}{u_{\max}}, \quad (21)$$

где $F^\#$ — равновесная численность диких самок (20), время измеряется в годах (= 365 дней), а величина управления нормирована на максимальную численность выпуска $u_{\max}$. В переменных (21) безразмерные коэффициенты $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, определяют «чистые» приоритеты принятия решений.

Главный приоритет — добиться уничтожения диких комаров в минимальные сроки; поэтому наибольшее значение присваивается $\mathcal{P}_1$, чтобы выполнить условие конечной точки (9) и получить, что $A_1\phi(\mathbf{X}^*(T^*)) = 0$. С другой стороны, самый низкий приоритет может быть присвоен параметру $\mathcal{P}_4$, который обозначает стоимость выращивания одного стерильного самца.

Интенсивность уничтожения диких комаров, выражаемая коэффициентом $\mathcal{P}_2$ в целевом функционале (12а), также важна, и более высокое значение $\mathcal{P}_2$ позволяет продолжить процесс уничтожения насекомых, даже когда текущее значение $F(t)$ станет относительно небольшим. Роль минимизации времени ($\mathcal{P}_3$) следует дополнительно изучить, рассмотрев три варианта:

$$\mathcal{P}_3 = 0, \quad \mathcal{P}_4 < \mathcal{P}_3 < \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_3 > \mathcal{P}_2.$$

Обобщая изложенные выше соображения, примем следующие значения «чистых» коэффициентов приоритета:

$$\mathcal{P}_1 = 10^{10}, \quad \mathcal{P}_2 = 10^4, \quad \mathcal{P}_3 \in \{0, 10^3, 10^5\}, \quad \mathcal{P}_4 = 1. \quad (22)$$

4.2. Оптимальные программы выпуска в непрерывном режиме. Для численного решения систем оптимальности, описанных в заключительной части раздела 3, вместе с условием оптимальности по времени (16) для свободного терминального времени, было использовано программное обеспечение GPOPS-II, разработанного для платформы MATLAB (см. <http://gpops2.com/>). Краткое описание этого программного продукта и его возможностей также доступно в [3, приложение В]. В программном обеспечении GPOPS-II реализован адаптивный численный метод, основанный на *прямой ортогональной коллокации*, известной также как *псевдоспектральный метод Radau* (см. [8, 16]). Кроме того, программа GPOPS-II автоматически масштабирует все входные интервалы $[0, T]$ к диапазону $[-1, 1]$, поэтому достаточно поддерживать стандартную числовую погрешность 10^{-5} для внутреннего масштаба.

На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи оптимального управления (12) для трех наборов «чистых» значений приоритета, заданных в (22). В верхнем ряду на рис. 1 изображены весьма похожие структуры программ оптимального выпуска $u^*(t)$ для всех трех случаев, что, естественно, демонстрирует их надежность. Однако по мере увеличения $\mathcal{P}_3$ общее количество стерильных насекомых, необходимых для реализации программы, увеличивается, в то время как общее время T^* реализации программы медленно сокращается. Эта информация полезна руководителям процесса для достижения компромисса между общей продолжительностью МСН-кампании и ее затратами.

Кроме того, стоит отметить, что оптимальные программы выпуска приостанавливаются точно в момент $t = T^*$, т.е. когда выполняется условие конечной точки (9). Последнее вызвано условиями трансверсальности (15), согласно которым после момента T^* не ожидается дополнительных выгод.

Несмотря на то, что все три оптимальные программы выпуска $u^*(t)$, $t \in [0, T^*]$, показанные на рис. 1, имеют четкую и ясную структуру, их осязаемая реализация может стать невозможной, так как выпуск в непрерывном режиме практически невозможен. В следующем разделе предложен более реалистичный тип программ выпуска, основанный на оптимальных решениях $u^*(t)$; по этой причине они далее именуется «субоптимальными» стратегиями, основанными на импульсных выпусках стерильных самцов.

4.3. Практическое применение: субоптимальные программы импульсного выпуска. С практической точки зрения более реалистично рассматривать периодические выпуски стерильных самцов комаров каждые $n\tau$ дней, где $n \in \mathbb{N}$, пока не будет выполнено условие конечной точки (9).

Рис. 1. *Верхний ряд:* Оптимальные программы выпуска $u^*(t)$, $t \in [0, T^*]$ для $\mathcal{P}_3 \in \{0, 10^3, 10^5\}$. *Нижний ряд:* Временная эволюция популяций комаров при соответствующих $u^*(t)$: дикие самцы $\log_{10} M(t)$ (синие линии), дикие самки $\log_{10} F(t)$ (красные линии), стерильные самцы $\log_{10} M_S(t)$ (желтые линии).

В [2]) была изучена следующая модификация МСН-модели (1):

$$\begin{cases} \dot{M} = r\rho \frac{FM}{M + \gamma M_S} e^{-\beta(M+F)} - \mu_M M, & M(0) = M^0 > 0, & (23a) \\ \dot{F} = (1-r)\rho \frac{FM}{M + \gamma M_S} e^{-\beta(M+F)} - \mu_F F, & F(0) = F^0 > 0, & (23b) \\ \dot{M}_S = -\mu_S M_S, & \forall t \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n\tau, (n+1)\tau), & (23c) \\ M_S(n\tau^+) = \tau \Lambda_n + M_S(n\tau^-), & n \in \mathbb{N}, & (23d) \end{cases}$$

где кусочно непрерывная функция $M_S(t)$ имеет скачки при $t = n\tau$, $M_S(n\tau^+)$ обозначают ее правый и левый пределы при $t = n\tau$, а Λ_n обозначает количество стерильных самцов комаров, которое будет выпущено в целевой местности за день. Соотношение (23d) означает, что при $t = n\tau$ единичное количество $\tau \Lambda_n$ стерильных насекомых сразу попадает в дикую популяцию, тогда как на объединении открытых интервалов $(n\tau, (n+1)\tau)$, $n \in \mathbb{N}$, популяции комаров $M(t)$, $F(t)$ и $M_S(t)$ эволюционируют в соответствии с уравнениями (23).

Отметим, что в [2] были предложены и изучены различные стратегии для реализации импульсных выпусков стерильных самцов, которые генерируются выбором Λ_n в (23d). Именно, МСН-стратегии без обратной связи для импульсных выпусков были разработаны с учетом константы $\Lambda_n = \Lambda$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В качестве альтернативы выбор каждого Λ_n в соответствии с периодическими измерениями численности дикой популяции (синхронизированными с выпусками

или более редкими) позволил разработать периодические импульсные схемы с обратной связью. Более того, сочетание двух упомянутых подходов привело к разработке смешанных стратегий периодической импульсной МСН-кампании, и этот режим управления фактически дал лучший результат, что выражается в более коротком времени ликвидации популяции, меньшем общем числе выпускаемых стерильных насекомых и меньшем количестве выпусков.

С другой стороны, смешанные стратегии периодической импульсной МСН-кампании по-прежнему требуют оценок численности диких популяций $M(t)$ и $F(t)$ в реальном времени, которые являются весьма затратными по времени и стоимости, даже при редких измерениях, проводимых каждые $p\tau$ дней, где $p = 2, 3, \dots$. При $p = 1$ подразумевается, что измерения синхронизированы с выпусками (дополнительную информацию о синхронизированных и разреженных измерениях можно найти в [2]).

В данной работе предложен другой тип периодических импульсных стратегий МСН-кампаний без обратной связи, не требующих оценки численности дикой популяции в реальном времени. Их разработка выполнена на основе численных решений в непрерывном времени $u^*(t)$, $t \in [0, T^*]$, задачи оптимального управления (12) (см. раздел 4.2); мы называем их «субоптимальными». В отличие от непрерывного случая (см. раздел 3) и случая, рассмотренного в [2], мы не можем ни строго доказать существование оптимального решения, ни показать сходимость $F(t)$ к ϵ за конечное время. Тем не менее, мы исследуем этот случай численно.

Сначала определим расширение программы оптимального управления $u^*(t)$ следующим образом:

$$\hat{u}^*(t) = \begin{cases} u^*(t), & \text{если } t \in [0, T^*], \\ 0, & \text{если } t > T^*. \end{cases} \quad (24)$$

Для выбранного значения τ построим последовательность импульсов $\{U_n\}$ по следующему правилу:

$$U_n = \max_{t \in [n\tau, (n+1)\tau]} \hat{u}^*(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Эта последовательность $\{U_n\}$ сходится к нулю и достигает этого значения за некоторое конечное время $\hat{T}^* < \infty$. Принимая во внимание соотношение (25), можно ожидать, что общее количество выпущенных стерильных насекомых в течение всей МСН-кампании при неоптимальных импульсных выпусках будет немного выше, чем при непрерывных программах оптимального выпуска $u^*(t)$. С другой стороны, условие конечной точки (9) при субоптимальных импульсных выпусках может быть достигнуто немного раньше, чем в программах оптимального выпуска с непрерывным временем $u^*(t)$ и, следовательно, $\hat{T}^* \leq T^*$. Именно это и иллюстрируют численные эксперименты (см. рис. 2 и 3 для $\tau = 7$ дней и $\tau = 14$ дней соответственно).

Как указано в верхних рядах рис. 2 и 3, значения объемов выпуска ($\tau u_{\max}$ на гектар) известны заранее, и экспериментатор может выбирать частоту выпуска (τ дней) в соответствии с имеющимися возможностями массового выращивания стерильных насекомых.

В следующем разделе мы сравним результаты, представленные на рис. 2 и 3 для субоптимальных импульсных МСН-программ без обратной связи со смешанными импульсными программами, разработанными в [2].

4.4. Обсуждение результатов. Отметим, что численное моделирование было выполнено с использованием числовых значений параметров модели, взятых из [2]) (см. таблицу 1). Таким образом, наши результаты сопоставимы с результатами, полученными в [2].

Обратим внимание, что субоптимальные импульсные МСН-программы, разработанные для $\mathcal{P}_3 = 10^3$ (см. средние столбцы на рис. 2 и 3), не имеют большого смысла. А именно, для их реализации требуется такое же время $\hat{T}^*$, как и для программ с $\mathcal{P}_3 = 0$ (см. левые столбцы на рис. 2 и 3), однако требуется выпустить большее количество стерильных насекомых. Поэтому эти две субоптимальные программы выпуска исключены из дальнейшего рассмотрения, и мы сосредоточимся на двух ключевых вариантах, а именно:

- (1) без оценки времени $\mathcal{P}_3 = 0$;
- (2) с использованием оценки времени $\mathcal{P}_3 = 10^5$.

Субоптимальные импульсные стратегии выпуска

Траектории субоптимальных состояний

$$\mathcal{P}_3 = 0, \hat{T}^* = 504 \text{ дня} \\ \text{CNSM}(U_n) = 434,820 \text{ шт/га}$$

$$\mathcal{P}_3 = 10^3, \hat{T}^* = 504 \text{ дня} \\ \text{CNSM}(U_n) = 435,420 \text{ шт/га}$$

$$\mathcal{P}_3 = 10^5, \hat{T}^* = 490 \text{ дней} \\ \text{CNSM}(U_n) = 457,500 \text{ шт/га}$$

Рис. 2. *Верхний ряд*: субоптимальные программы выпуска $\{U_n\}$ для $\mathcal{P}_3 \in \{0, 10^3, 10^5\}$ при $\tau = 7$ дней. *Нижний ряд*: Временная эволюция популяций комаров при соответствующих $\{U_n\}$: дикие самцы $\log_{10} M(t)$ (синие линии), дикие самки $\log_{10} F(t)$ (красные линии), стерильные самцы $\log_{10} M_S(t)$ (желтые линии).

В таблице 2 сведены ключевые особенности данных моделирования для субоптимальных (без обратной связи) и смешанных (с обратной связью, см. [2]) импульсных МСН-программ, такие как общее количество стерильных самцов, необходимое для успешного проведения МСН-кампании, количество недель, требуемое для ликвидации дикой популяции, и количество эффективных (ненулевых) выпусков, которые должны быть выполнены в течение всей кампании.

Отметим, что общее число стерильных самцов, необходимое для успешного выполнения импульсивной субоптимальной МСН-программы, рассчитывается как $\tau \sum_{n=0}^{\infty} U_n$. В первом столбце таблицы 2 управляющий коэффициент определяется как $1/k - 1$, а параметр k выбирается так, чтобы удовлетворять неравенству $0 < k < 1/N_F$. Таким образом, меньшие значения k означают больший коэффициент управления, в то время как большие значения k подразумевают меньший коэффициент управления. Подробное объяснение выбора k приведено в [2], где рассматриваются два значения k : $k = 0.2/N_F$ и $k = 0.99/N_F$, которые соответствуют усилению управления порядка ≈ 378 и ≈ 76 соответственно. Значение $p = 1$ соответствует измерениям, которые синхронизированы с выпусками, а $p = 4$ — более редким измерениям, которые должны выполняться каждые 4τ дней.

Согласно второму столбцу таблицы 2, программы субоптимального импульсного выпуска требуют массового выращивания меньшего числа стерильных комаров, чем смешанные стратегии с

Таблица 2. Данные моделирования для субоптимальных (без обратной связи) и смешанных (с обратной связью) импульсных МСН-программ

Импульсная программа выпуска	Общее число выпущенных стерильных самцов	Время ликвидации популяции (нед.)	Количество ненулевых выпусков
Периодичность выпусков = 7 дней			
Субоптимальная без учета времени ($\mathcal{P}_3 = 0$)	434.820	72	72
Субоптимальная с учетом времени ($\mathcal{P}_3 = 10^5$)	457.500	70	70
Смешанная с синхронизированными измерениями и большим коэффициентом управления ($p = 1, k = 0.2/N_F, [2]$)	450.668	72	72
Смешанная с синхронизированными измерениями и меньшим коэффициентом управления ($p = 1, k = 0.99/N_F, [2]$)	457.489	246	246
Смешанная с редкими измерениями и большим коэффициентом управления ($p = 4, k = 0.2/N_F, [2]$)	534.849	65	53
Смешанная с редкими измерениями и меньшим коэффициентом управления ($p = 4, k = 0.99/N_F, [2]$)	450.077	69	53
Периодичность выпусков = 14 дней			
Субоптимальная без учета времени ($\mathcal{P}_3 = 0$)	442.480	74	37
Субоптимальная с учетом времени ($\mathcal{P}_3 = 10^5$)	464.050	72	36
Смешанная с синхронизированными измерениями и большим коэффициентом управления ($p = 1, k = 0.2/N_F, [2]$)	465.187	72	36
Смешанная с синхронизированными измерениями и меньшим коэффициентом управления ($p = 1, k = 0.99/N_F, [2]$)	427.701	136	68
Смешанная с редкими измерениями и большим коэффициентом управления ($p = 4, k = 0.2/N_F, [2]$)	499.497	66	25
Смешанная с редкими измерениями и меньшим коэффициентом управления ($p = 4, k = 0.99/N_F, [2]$)	449.099	74	28

Субоптимальные импульсные стратегии выпуска

Траектории субоптимальных состояний

$\mathcal{P}_3 = 0$, $\hat{T}^* = 518$ дней;
CNSM(U_n) = 442, 480 шт/га

$\mathcal{P}_3 = 10^3$, $\hat{T}^* = 518$ дней
CNSM(U_n) = 442, 550 шт/га

$\mathcal{P}_3 = 10^5$, $\hat{T}^* = 504$ дня
CNSM(U_n) = 464, 050 шт/га

Рис. 3. *Верхний ряд*: субоптимальные программы выпуска $\{U_n\}$ для $\mathcal{P}_3 \in \{0, 10^3, 10^5\}$ при $\tau = 14$ дней. *Нижний ряд*: Временная эволюция популяций комаров при соответствующих $\{U_n\}$: дикие самцы $\log_{10} M(t)$ (синие линии), дикие самки $\log_{10} F(t)$ (красные линии), стерильные самцы $\log_{10} M_S(t)$ (желтые линии).

обратной связью, за исключением случая $p = 1$, $k = 0.99/N_F$ (т.е. смешанная стратегия с синхронными измерениями, выполняемыми каждые $\tau = 14$ дней, и меньшим коэффициентом управления для режима обратной связи). Однако для уничтожения дикой популяции этой программе выпуска требуется больше всего времени; кроме того, требуются многочисленные измерения численности популяции.

Анализ данных из третьего и четвертого столбцов таблицы 2 показывает, что субоптимальные программы выпуска дают примерно те же преимущества, что и смешанные программы с обратной связью на основе синхронизированных измерений, но не требуют оценки численности дикой популяции и требуют меньшего количества стерильных насекомых. С другой стороны, смешанные программы с обратной связью, основанные на редких измерениях, показывают лучшие результаты, чем субоптимальные программы без обратной связи, с точки зрения общего времени ликвидации популяции и количества эффективных (ненулевых) выпусков. Однако эти преимущества уравниваются большим количеством стерильных насекомых, необходимых для успешного проведения МСН-кампании, и дополнительными затратами на выполнение оценок численности дикой популяции в реальном времени.

Окончательный выбор программы выпуска для МСН-кампании должен быть сделан специалистами-практиками после оценки реальных затрат, таких, как затраты на массовое выращивание стерильных насекомых, затраты на логистику, а также дополнительные затраты на проведение измерения численности дикой популяции в реальном времени.

5. Выводы. В этой работе методы динамической оптимизации были применены для разработки программ непрерывного времени без обратной связи для МСН-кампаний, которые не требуют оценки численности диких популяций в реальном времени. Были также предложены более реалистичные субоптимальные варианты для практической реализации в полевых условиях.

Все разработанные программы имеют четкую структуру и демонстрируют монотонность в отношении количества стерильных насекомых, выпускаемых в каждый день t (в случае оптимальных программ с непрерывным временем) или в начале каждого τ -дневного периода (в случае импульсных субоптимальных программ). Тот факт, что объемы выпусков во время МСН-кампании постепенно уменьшаются, на самом деле может помочь в адекватном планировании инфраструктуры и базовой логистике МСН-вмешательств.

Еще одним преимуществом программы импульсного выпуска без обратной связи является ожидаемое знание значений выпуска ($\tau u_{\max}$), что позволяет правильно выбрать частоту выпуска τ в соответствии с доступным массовым выращиванием стерильных насекомых.

Было также исследовано влияние экзогенного параметра $\mathcal{P}_3$, выражающего оценку времени, на структуру разработанных программ выпуска и соответствующие результаты. На основе этого было обнаружено наличие определенного компромисса между общим количеством выпущенных стерильных насекомых, необходимых для уничтожения, и общей продолжительностью МСН-кампании. А именно, увеличив (значительно) значение $\mathcal{P}_3$ (при прочих равных условиях), можно (немного) снизить общее время T^* (а также $\hat{T}^*$) за счет увеличения общего количества стерильных самцов, которые будут выпущены во время МСН-кампании (см. левый и правый столбцы на рис. 1-3). Однако общая структура как оптимальных, так и субоптимальных программ выпуска демонстрирует надежность и устойчивость к изменениям величины $\mathcal{P}_3$.

В этой работе мы попытались сохранить значение другого экзогенного параметра — суточной объема массового выращивания стерильных насекомых $u_{\max}$ — на умеренно реалистичном уровне: 2500 особей на гектар. Однако умеренное повышение (сокращение) $u_{\max}$ не сильно влияет на общую структуру оптимальных и субоптимальных программ выпуска. Единственное различие, которое было обнаружено с помощью численного эксперимента (и которое выходит за рамки данной статьи), состоит в том, что при максимальной мощности выпуска $u_{\max}$ в день (или $\tau u_{\max}$ каждые τ дней) требуется производить меньше (больше) начальных выпусков.

Методология, представленная в этой работе, может быть легко адаптирована к различным биологическим характеристикам других видов комаров или вредителей (таких как ρ , β , μ_M и μ_F) и стерильных насекомых (γ и μ_S), при учете общей площади целевой местности (еще раз подчеркнем, что все моделирования проводились для «стандартизированной» площади, равной 1 га) и объема массового выращивания стерильных самцов каждые τ дней. Таким образом, результаты этого исследования могут быть полезными в разработке и реализации успешных МСН-кампаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anguelov R., Dumont Y., Lubuma J. Mathematical modeling of sterile insect technology for control of *Anopheles* mosquito// Comput. Math. Appl. — 2012. — 64. — P. 374–389.
2. Bliman P.-A., Cardona-Salgado D., Dumont Y., Vasilieva O. Implementation of control strategies for sterile insect techniques// Math. Biosciences. — 2019. — 314. — P. 1907–1950.
3. Campo-Duarte D., Vasilieva O., Cardona-Salgado D., Svinin M. Optimal control approach for establishing *wMelPop* *Wolbachia* infection among wild *Aedes aegypti* populations// J. Math. Biology. — 2018. — 76, № 7. — P. 1907–1950.
4. Dumont Y., Tchuente J. Mathematical studies on the sterile insect technique for the Chikungunya disease and *Aedes albopictus*// J. Math. Biology. — 2012. — 65, № 5. — P. 809–854.
5. Dyck V. A., Hendrichs J., Robinson A. S. Sterile Insect Technique: Principles and Practice in Area-Wide Integrated Pest Management. — Dordrecht: Springer, 2005.
6. Fister K., McCarthy M., Oppenheimer S., Collins C. Optimal control of insects through sterile insect release and habitat modification// Math. Biosciences. — 2013. — 244, № 2. — P. 201–212.
7. Fleming W., Rishel R. Deterministic and stochastic optimal control. — New York: Springer-Verlag, 1975.

8. Garg D., Patterson M., Francolin C., Darby C., Huntington G., Hager W., Rao A. Direct trajectory optimization and costate estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems using a Radau pseudospectral method// Comput. Optim. Appl. — 2011. — 49, № 2. — P. 335–358.
9. Huang M., Song X., Li J. Modelling and analysis of impulsive releases of sterile mosquitoes// J. Biol. Dynam. — 2017. — 11, № 1. — P. 147–171.
10. Lenhart S., Workman J. Optimal Control Applied to Biological Models. — Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2007.
11. Li J., Yuan Z. Modelling releases of sterile mosquitoes with different strategies// J. Biol. Dynam. — 2015. — 9, № 1. — P. 1–14.
12. Liles J. Effects of mating or association of the sexes on longevity in *Aedes aegypti* (L.)// Mosquito News. — 1965. — 25, № 4. — P. 434–439.
13. Manrakhan A., Venter J. H., Hattingh V. The progressive invasion of *Bactrocera dorsalis* (Diptera: Tephritidae) in South Africa// Biol. Invasions. — 2015. — 17, № 10. — P. 2803–2809.
14. Multerer L., Smith T., Chitnis N. Modeling the impact of sterile males on an *Aedes aegypti* population with optimal control// Math. Biosciences. — 2019. — 311. — P. 91–102.
15. Oliva C., Jacquet M., Gilles J., Lemperiere G., Maquart P.-O., Quilici S., Schooneman F., Vreysen M., Boyer S. The sterile insect technique for controlling populations of *Aedes albopictus* (Diptera: Culicidae) on Reunion Island: mating vigour of sterilized males// PloS One. — 2012. — 7, № 11. — e49414.
16. Patterson M., Rao A. GPOPS-II: A MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive Gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming// ACM Trans. Math. Software. — 2014. — 41, № 1. — P. 1.
17. Seierstad A., Sydsaeter K. Optimal Control Theory with Economic Applications. — Amsterdam: Elsevier, 1987.
18. Strugarek M., Bossin H., Dumont Y. On the use of the sterile insect release technique to reduce or eliminate mosquito populations// Appl. Math. Model. — 2019. — 68. — P. 443–470.

Bliman Pierre-Alexandre

Sorbonne Université, Université Paris-Diderot SPC, INRIA, CNRS,

Laboratoire Jacques-Louis Lions, équipe Mamba, Paris, France

E-mail: pierre-alexandre.bliman@inria.fr

Cardona-Salgado Daiver

Universidad Autónoma de Occidente, Cali, Colombia

E-mail: dcardona@uao.edu.co

Dumont Yves

CIRAD, Umr AMAP & University of Pretoria, Pretoria, South Africa and AMAP,

Univ. Montpellier, CIRAD, CNRS, INRA, IRD, Montpellier, France

E-mail: yves.dumont@cirad.fr

Васильева Ольга Олеговна

Universidad del Valle, Cali, Colombia

E-mail: olga.vasilieva@correounivalle.edu.co